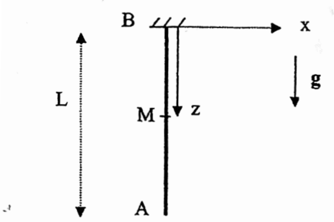
TD - PROPAGATION D'ONDES

CORDE – COAXIAL – ONDES EM

J.COURTIN

Exo 1 — Vibration d'une corde verticale pendante

La corde de longueur L est verticale, l'extrémité haute B est fixe, l'extrémité A est libre .



1. La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par :

$$T(z)=\mu g(L-z)$$

2. La corde vibre. Dans l'approximation des petits mouvements transversaux, montrer que la fonction d'onde $x(z,t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z} \quad (1)$$

3. Quelle est la nouvelle équation d'onde si l'on tient compte de la force df de frottement visqueux agissant sur l'élément de corde dz :

$$\mathrm{d}f = -\alpha\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}z \text{ où } \alpha \text{ est une constante.}$$

4. On suppose que la corde est très longue et on cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation ($z \ll L$). Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude complexe $x(z,t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}$, où k est une constante réelle, peut se propager si la constante de frottement α a une certaine valeur α_0 que l'on exprimera en fonction de μ, g et L.

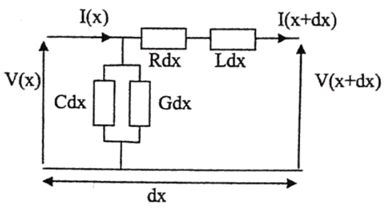
5. Pour $\alpha = \alpha_0$, donner les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g. Commenter.

Exo 2 — Chaine infinie d'oscillateurs

—> Donné en classe

Exo 3 — Ligne électrique avec pertes

Un élément dx de ligne électrique bifilaire est modélisé par une résistance Rdx en série avec une inductance Ldx et en parallèle avec une capacité Cdx et une conductance Gdx.



1. Montrer que le courant $I(x,t)$ suit l'équation différentielle dite *équation des télégraphistes* :

$$LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC+LG)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

2. On pose $I(x,t) = J(x,t)\,\mathrm{e}^{-\rho t}$. Montrer que pour une valeur particulière ρ_0 de ρ que l'on déterminera, l'équation suivie par $J(x,t)$ prend la forme :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} - \mu^2 J = v^2\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$$

Exprimer la constante μ.

3. Quelle est la condition sur les composants linéiques de la ligne R, L, C et G pour laquelle une onde se propage sur la ligne sans déformation.
Quelle est dans ce cas la forme de la solution générale de l'équation des télégraphistes ?

Le problème de la propagation s'est posé concrètement en 1854 à William Thomson (qui deviendra Lord Kelvin à cette occasion). Que réalisa-t-on cette année-là dans l'océan atlantique ?

Exo 4 — Dissipation dans une résistance : approche avec Poynting

On considère un fil cylindrique de rayon R_0 de longueur L et conductivité γ, parcouru par un courant continu I.

a - Trouver le champ $\overrightarrow{E}$ dans tous le fil, puis le champ $\overrightarrow{B}$

b - Calculer le vecteur de Poynting dans tous le fil.

c - En déduire la puissance entrant dans le fil. Retrouver l'expression de la résistance électrique.

Exo ## — Poynting solénoïde infini

On considère un solénoïde infini de rayon R et soit H une hauteur d'étude. Le fil est enroulé à raison de n spires par unité de longueur parcourues par un courant $I(t) = I_0 cos(\omega t)$ avec $\omega = 50\ Hz$ c-à-d des « variations lentes » du courant.

a - Justifier que l'on puisse se placer dans le cadre de l'ARQS pour un solénoïde usuel.
b - Trouver le champ $\overrightarrow{B}(t)$ uniforme dans le solénoïde en justifiant que l'on puisse appliquer le théorème d'Ampère et comment.
c - Trouver le champ $\overrightarrow{E}(t, M)$ dans le solénoïde à l'aide de Maxwell-Faraday.
d - En déduire le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}(t, M)$ ainsi que la densité d'énergie électromagnétique $w(M)$.
e - Soit un volume de contrôle sous forme d'un cylindre de rayon r. A partir de l'équation locale de l'énergie, proposer une écriture de la conservation de l'énergie sur ce cylindre :
- Calculer l'énergie interne E(r) et sa dérivée temporelle
- Calcul ensuite le flux sortant du vecteur de Poynting

f - Quel est le problème, et comment lever cette difficulté ?

h - Question plus difficile :
En revenant à l'équation de Maxwell-Ampère la plus générale, montrer que le champ $\overrightarrow{B}(M)$ ne saurait être uniforme dès lors qu'il existe un champ $\overrightarrow{E}(t, M)$ variable dans le temps.
On cherchera à établir $\dfrac{\partial B_z}{\partial r}(t, r)$ puis on tracera le profil du champ $\overrightarrow{B_z}(t, r)$