qui reste borné dès que l'exponentielle ne diverge pas, c'est-à-dire si $\frac{b}{2a} > 0$, et donc si a et b sont de même signe. De plus, attendu que $\Delta < 0$, $0 < b^2 < 4ac$ et ainsi a et c sont de même signe. La solution homogène reste donc bornée si a, b et c sont de même signe.

Si $\Delta = 0$, alors $r = -\frac{b}{2a}$ est racine double et :

$$s_h(t) = (s_0 + \mu t)\exp\left(-\frac{b}{2a}t\right),$$

et la conclusion de stabilité est la même que précédemment.

Si $\Delta > 0$ alors les racines sont réelles $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et :

$$s_h(t) = s_1 \exp(r_1 t) + s_2 \exp(r_2 t),$$

qui reste borné si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, ce qui est équivalent à :

- leur somme est négative : $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} < 0$, soit $\frac{b}{a} > 0$;
- leur produit est positif : $r_1 r_2 = \frac{c}{a} > 0$.

On en déduit donc que la solution homogène reste bornée si a, b et c sont de même signe.

Critère de stabilité d'un système du premier ou du deuxième ordre

On conclut des paragraphes précédents :

> Un système est stable si, et seulement si, sa solution homogène, c'est-à-dire physiquement son régime libre, s'annule quand $t \to \infty$.

Ainsi, un système stable s'amortit en absence d'entrée. Il existe de plus un critère opérationnel de stabilité très simple.

> Un système du premier ou du deuxième ordre est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène ou du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe.

⚠ Ce critère n'est plus suffisant pour un système d'ordre trois ou plus.

Exemple

On rappelle que seul le dénominateur de la fonction de transfert détermine la stabilité du système :

Système stables	$\frac{1}{2+p}$,	$\frac{1}{-1-2p}$,	$\frac{1-p}{1+3p+4p^2}$,	$\frac{1-p+2p^2}{-4-p-p^2}$
Systèmes instables	$\frac{1}{2-p}$,	$\frac{p}{-1+p}$,	$\frac{1+p}{1-3p+4p^2}$,	$\frac{1-p+2p^2}{4+p-p^2}$

Lien avec la stabilité mécanique

La définition de la stabilité, utilisée en mécanique, semble *a priori* différente. On lit ainsi dans le Dictionnaire de l'Académie française, huitième édition, que le lecteur trouvera en ligne sur internet, la définition de la stabilité :

> En termes de mécanique, il désigne la propriété qu'un corps, écarté de son état d'équilibre, a de revenir à cet état.

Quel est donc le lien avec la sortie bornée associée à une entrée bornée ? La réponse à cette question passe par une autre interrogation : que signifie, pour un système électrique, être écarté de son état d'équilibre ?

On étudie par exemple le circuit électrique de la figure 1.3. Sans alimentation, c'est-à-dire pour une entrée nulle, la sortie est nulle, ce qui constitue sont état d'équilibre. Pour écarter le système de cette position d'équilibre, on lui impose une tension E_0 en entrée. Puis l'entrée est remise à la masse et le système évolue en décrivant son régime libre. Le régime libre, pour lequel l'entrée est nulle, est modélisé par l'équation différentielle homogène. Si celle-ci tend vers zéro quand $t \to \infty$, alors le système est stable et revient à son état d'équilibre de tension nulle.

Si les termes employés sont différents, la définition « mécanique » de la stabilité est équivalente à celle énoncée dans le paragraphe :

Système du premier ordre

Soit un système passe-bas du premier ordre, décrit par sa fonction de transfert, qui n'est pas écrite sous forme canonique pour les besoins de la démonstration :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{H_0}{a+bp}} \longrightarrow S(p)$$

Système passe-bas du premier ordre.

L'équation différentielle, qui modélise le comportement temporel du système, est issue de la fonction de transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{a+bp} \quad \text{donc} \quad (bp+a)S(p) = H_0E(p) \quad \text{puis} \quad b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + as = H_0e.$$

La sortie $s(t)$, associée à l'entrée $e(t)$, est la somme de deux termes :

- la **solution particulière**, notée $s_p(t)$ (indice p pour « particulière »), cherchée sous la même forme que l'entrée (constante dans le cas d'un échelon, harmonique dans le cas d'une entrée harmonique). Cette solution représente physiquement le régime établi ;
- la **solution homogène**, notée $s_h(t)$ (indice h pour « homogène »), solution de l'équation homogène $b\frac{\mathrm{d}s_h}{\mathrm{d}t} + as_h = 0$:

$$s_h(t) = \lambda \exp\left(-\frac{at}{b}\right),$$

  où λ est une constante d'intégration trouvée avec les conditions initiales. Cette solution représente physiquement le régime libre, obtenu dans le cas où $e = 0$.

Ainsi, $s(t) = \lambda \exp\left(-\frac{at}{b}\right) + s_p(t)$. Avec une entrée bornée, la **solution particulière** est aussi bornée, car elle est de la même forme que l'entrée ; son amplitude reste limitée. Les cas classiques de l'entrée en forme d'échelon et l'entrée harmonique illustrent ce point :

- $s_p(t) = \frac{H_0E_0}{a}$ si $e(t) = E_0$;
- $s_p(t) = \frac{H_0E_0}{\sqrt{a^2+(b\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{b\omega}{a}\right)$ si $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ et $a > 0$.

Tel n'est pas toujours le cas pour la **solution homogène**, qui tend vers zéro quand $t \to \infty$ si $\frac{a}{b} > 0$, mais qui diverge si $\frac{a}{b} < 0$. Le système est donc stable si et seulement si les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, a et b, pour les termes en p^0 et p^1, sont de même signe.

> **Exemple**
>
> Le système de transmittance $H(p) = \frac{2}{2+3p}$ est stable, de même pour celui de transmittance $H(p) = \frac{1}{-1-2p}$.

Et si le filtre ne présentait pas de caractère passe-bas ? Le résultat serait le même. En effet, par exemple pour un passe-haut, la fonction de transfert et l'équation différentielle à laquelle obéit le circuit sont :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H_0\frac{\tau p}{a+bp} \quad \text{donc} \quad (bp+a)S(p) = H_0\tau pE(p) \quad \text{puis} \quad b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + as = H_0\tau\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

La solution particulière reste bornée si l'entrée est bornée. La stabilité est uniquement due à la solution homogène, solution de l'équation homogène $b\frac{\mathrm{d}s_h}{\mathrm{d}t} + as_h = 0$, qui reste inchangée par rapport au cas précédent. La conclusion quant à la stabilité est donc identique.

Les termes différentiels caractéristiques de l'entrée, nuls dans l'équation homogène, ne jouent aucun rôle dans la stabilité. Ils proviennent du numérateur de la fonction de transfert.

> Le numérateur de la fonction de transfert ne joue aucun rôle dans la stabilité d'un système linéaire.

Système du deuxième ordre

Soit un système passe-bas du deuxième ordre, décrit par sa fonction de transfert, qui n'est pas écrite sous forme canonique pour les besoins de la démonstration :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{H_0}{c+bp+ap^2}} \longrightarrow S(p)$$

Système passe-bas du deuxième ordre.

L'équation différentielle, qui modélise le comportement temporel du système, est :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{c+bp+ap^2} \quad \text{donc} \quad (ap^2+bp+c)S(p) = H_0E(p)$$

$$\text{puis} \quad a\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + cs = H_0e.$$

Comme pour un système du premier ordre, la solution particulière, cherchée sous la même forme que l'entrée, demeure bornée car l'entrée est bornée. Ce point reste acquis, quel que soit le numérateur de la fonction de transfert, et donc le caractère passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...

La stabilité n'est liée qu'à la solution homogène, solution de l'équation homogène :

$$a\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + cs = 0,$$

qui admet trois solutions suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, alors les racines sont complexes $r = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ et :

$$s_h(t) = \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\left(s_1\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right) + s_2\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t\right)\right),$$