TD - ELECTROSTATIQUE

Exo 1 — Charge de l'atome d'hydrogène

On considère pour l'électron en orbite autour du proton de l'hydrogène une distribution de densité de charge : $\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{2r}{a_0}}$

Exprimer ρ_0 telle que la charge totale de la distribution soit -e pour que l'atome soit neutre.
On utilisera des coordonnées sphériques et on procèdera par intégrations par parties successives

Exo 2 — Potentiel et champ $\overrightarrow{E}$ au centre d'une sphère de densité de charge variable

On considère une sphère de rayon R et de densité de charge surfacique $\sigma(r, \theta, \varphi) = \sigma_0 . cos(\theta)$:

a - Tracer la densité de charge surfacique en fonction de theta et tenter une représentation 3D de la sphère.

b - Calculer le potentiel au centre de la sphère. Peut-on le trouver autrement ?
Peut-on en déduire le champ au centre ?

c - Utiliser les symétries pour trouver la direction du champ. Trouver son sens.
<u>Calcul du champ (HP) :</u>
Ecrire la formule générale pour le champ au centre de la sphère.
Faire le produit scalaire avec le vecteur $\overrightarrow{e}_z$.
Calculer le champ E_0 au centre de la sphère.

Exo 3 — Champ d'un disque au voisinage de l'axe de révolution

On donne l'expression du champ $E_z(z)$ produit par un disque de rayon R sur son axe de révolution Δ :

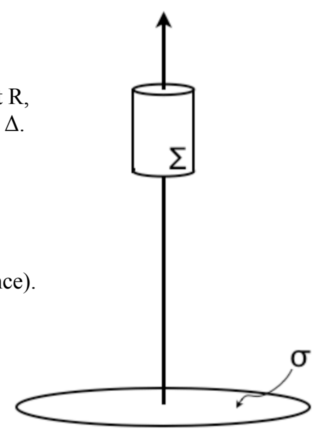
$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

a - Que vaut $E_z(z)$ quand $z \to \infty$. Commenter

b - En déduire son potentiel à l'infini.

c - Comment trouver $V(z)$? Le calculer.
Confirmer l'expression du potentiel à l'infini. Commenter.

On veut utiliser la conservation du flux dans un cylindre élémentaire de hauteur dz et de rayon r petit devant R, centré sur l'axe à une hauteur z, déterminer la composante radiale $E_r(r, z)$ du champ E au voisinage de l'axe Δ.



a - Tracer l'allure des lignes de champ $\overrightarrow{E}$.

b - Trouver une relation générale entre $E_z(z)$ et $E_r(r, z)$ par conservation du flux (cf cours opérateur divergence).

c - En déduire $E_r(r, z)$

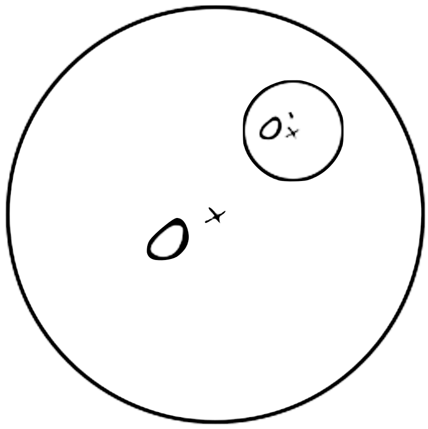
Exo 4 — Voyage au centre de la terre

Des voyageurs progressant vers le centre O de la terre de Rayon R_T découvrent une cavité sphérique de rayon R_c et de centre O' cachée en profondeur de la croûte terrestre. On modélise la terre par une sphère de masse volumique homogène ρ_0 :

a - Remplacer astucieusement cette distribution de masse par la superposition d'une sphère positive et d'une sphère négative.
Quel grand principe est mis en jeu ?

b - Calculer avec le théorème de Gauss le champ de gravité dans une sphère de masse volumique homogène valant $\pm\rho_0$.
Exprimer vectoriellement ce résultat pour les deux sphères, de centres respectifs O et O' à l'aide des vecteurs position.
En déduire le champ vectoriel réel dans la cavité sphérique.

c - Cette cavité est partiellement occupée par un liquide formant un océan souterrain.
Déterminer la forme de la surface de cette océan.



Exo 5 — Le potentiel de Yukawa 湯川

Dans l'espace rapporté à un repère galiléen $R_g(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ règne un champ électrique dérivant du potentiel : $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}e^{-\frac{r}{a}}$. L'exercice se propose de trouver la distribution de charge correspondante.

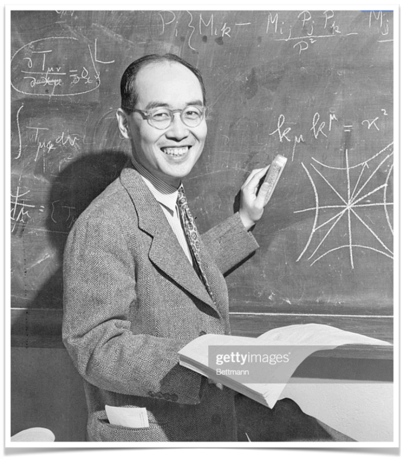
1. Quel est le champ électrique associé ? Exprimer le flux du champ électrique à travers une sphère de rayon r ?
En déduire deux renseignements sur la distribution de charge en faisant tendre r vers zéro ou vers l'infini.

2. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en prenant le flux du champ électrique sortant à travers une couronne sphérique $(r, r+dr)$.

3. Le potentiel modélise de manière quantique l'interaction de l'électron et du proton dans l'atome d'hydrogène. Quelle est la densité de probabilité de présence de l'électron définie par : $p(r) = \dfrac{dq}{dr}$ où dq est la charge présente à l'intérieur de la couronne sphérique $(r, r+dr)$. Que représente a pour la probabilité de présence de l'électron ?

Justifier l'expression *potentiel coulombien avec écran* associée au potentiel de Yukawa.

Un modèle équivalent existe-t-il en mécanique gravitationnelle ?



Hideki Yukawa (湯川 秀樹)

(23 janvier 1907 - 8 septembre 1981 Tokyo)
physicien japonais.

Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1949 « pour sa prédiction de l'existence des mésons à partir de travaux théoriques sur les forces nucléaires ».

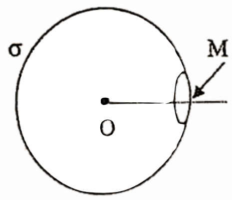
Exo 6 — GraviLOOP

Un tunnel traverse la terre (supposée homogène de masse volumique ρ_0) d'un point A à un point B quelconques
Dans ce tunnel on laisse glisser un wagon sous sous le seul effet gravitationnel.

- Etablir l'équation du mouvement. On étudiera ce dernier sur l'axe (Oz) du tunnel ou O est le point milieu.
- Déterminer la durée caractéristique de ce phénomène en lien avec le temps de traversée.

Exo 7 — **Equilibre et déséquilibre électrostatique**

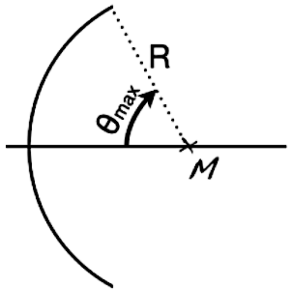
Une sphère creuse diélectrique de centre O, de rayon R porte une charge surfacique uniforme $\sigma > 0$. On découpe une petite calotte centrée en M.



1. Déterminer le champ électrique E au milieu M de la calotte à une distante $R + \varepsilon$ de O ?
2. Le résultat est-il changé si la sphère est métallique ?

COMPLEMENTS - HP :

Champ électrique d'un arc de cercle chargé

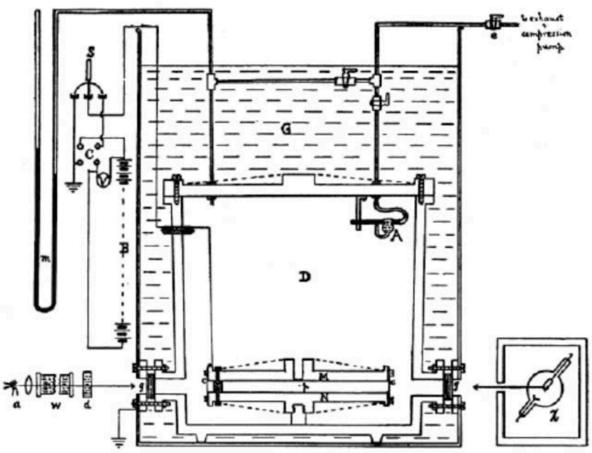


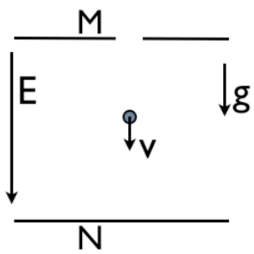
-On considère un arc de cercle chargé de densité de charge linéique λ constante et d'ouverture $2\theta_{max}$.
Calculer le champ créée en M, centre du cercle.
-On considère ensuite un segment de charge linéique λ constante, de longueur 2L et tel que M soit sur la médiatrice du segment, à une distance R. Tracé le segment sur le schéma précédent. Calculer à nouveau le champ en M produit par le segment. On se ramènera pour cela au premier cas.

Champ électrique sur l'axe d'un segment.

On se place cette fois-ci dans le prolongement d'un segment de longueur 2L, et à une distance x de son milieu ($x > L$). La charge linéique du segment est constante et vaut λ. Calculer le champ électrique en ce point. Vérifier le calcul dans le cas ou L tend vers 0.

Exercice de révision : Expérience de Millikan 1913





On considère une gouttelette d'huile en chute libre dans l'air de viscosité η (force de friction linéaires) et sous l'influence d'un champ électrique E et du champ de pesanteur terrestre g. L'huile ayant une densité ρ_h et l'air ρ_{air}, on prendra en compte la poussée d'Archimède dans le calcul. Lors de la pulvérisation, la goutte est électrisée et porte une charge -Ne.
-Faire le bilan des forces. En appliquant le PFD déterminer l'équation du mouvement sur la vitesse de la gouttelette.
-Trouver la vitesse solution de cette équation (du premier ordre) et donner l'expression de la vitesse limite.
On considérera alors le cas où la vitesse est nulle : calculer N en supposant e connue.
Que se passe t-il si on diminue alors le nombre de charge N à l'aide de rayon x ? Calculer les vitesses limites pour N-1, N-2 et N-3. Expliquer le résultat de Millikan.
AN : η = 1,882E-4 SI ; R = 2,76E-6 m ; E = 3,1E5 V.m-1 ; ρ_h = 0,92E3 kg.m-3 et
ρ_{air} = 1,2kg.m-3 ; g = 9,81 m.s-2 ; e = 1,602E-19C