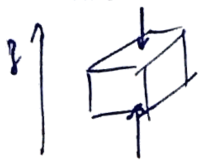
III Action de contact sur un fluide

L'écoulement n'étant jamais parfait, les couches de fluide entrent en friction les unes avec les autres ou avec les bords de l'écoulement.
On parle de <u>viscosité</u>

1) Pression : action normale. ⊥ sup.



$$df_z = +P(z)\,dS_{xy} - P(z+dz)\,dS_{xy} = -\frac{\partial P}{\partial z}\underbrace{dz.\overbrace{dx\,dy}^{dS_{xy}}}_{d\tau} \Rightarrow \frac{df_z}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On généralise $\boxed{\vec{f}_{vol} = -\vec{\nabla}(P)}$ force volumique élémentaire associée aux effets de pression surfacique.

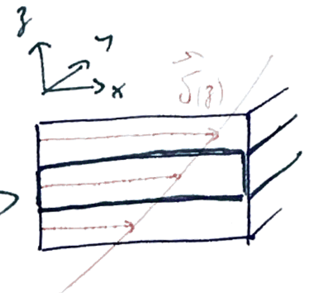
Révision : * Loi de Pascal (fluide incompressible)

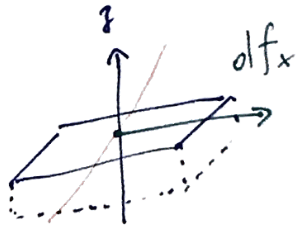
$\boxed{P + \rho g z = C^{te}}$ au sein du fluide

* Atmosphère isotherme (GP compressible).

$\boxed{P = P_0\, e^{-\frac{Mg}{RT}\cdot z}}$

2) Loi de Newton : action tangentielle





La couche intermédiaire est
- entraînée par friction de la couche supérieure.
- freinée par friction de la couche inférieure.

Modèle de Newton : Soit la face supérieure, la force produite par le fluide au-dessus vaut

$$\boxed{d\vec{f}_x^{\,\oplus} = \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z}\,dS_{xy}\,\vec{e_x}}$$

Viscosité en poiseuille (Pl).
(dynamique) (Pa.s)

Si $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0 \Rightarrow df_x > 0$

Le fluide est entraîné par le fluide supérieur qui va + vite.

Rq : Poise $1\,Po = 0{,}1\,Pl$

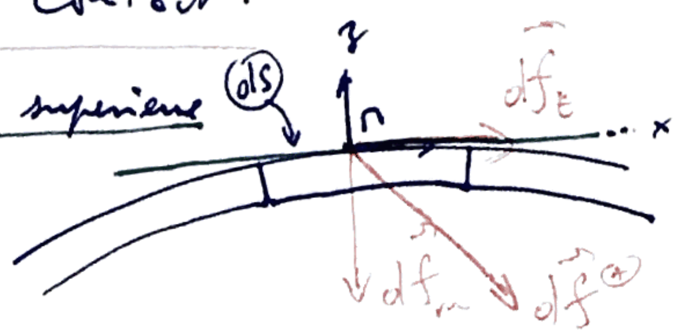
Pour la face inférieure c'est l'inverse puisque si le fluide inférieur va moins vite $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0 \Rightarrow df_x < 0$ la particule fluide sera freinée.

$$\boxed{d\vec{f}_x^{\ominus} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \, dS_{xy} \, \vec{e}_x}$$

ODG : $\begin{cases} \eta_{air} = 1{,}8.10^{-5} \text{ Pl.} \\ \eta_{eau} = 1{,}0 \; 10^{-3} \text{ Pl.} \\ \eta_{huile} \sim 0{,}1 \text{ Pl.} \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 20°C \\ 1 \text{ bar} \end{matrix} \right)$.

3) Action de contact.

α) Couche fluide supérieure



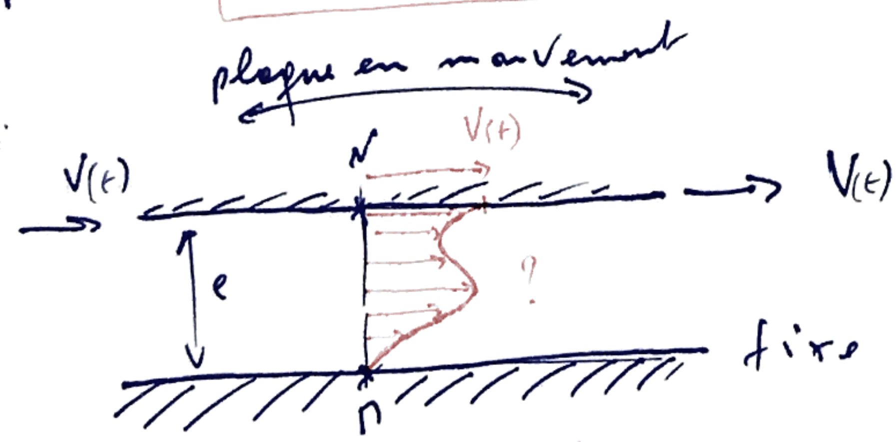
$$d\vec{f}^{\oplus} = d\vec{f}_n + d\vec{f}_t = -P_n \, dS \, \vec{n} + \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{t}$$

β) Contact avec un solide

Dans le cas d'un écoulement visqueux on considère que le fluide a la même vitesse que le solide avec lequel il entre en contact :

On parle de condition d'adhérence à l'interface fluide solide.

exemple :



$V_N^{(f)} = V_N^{(s)} = V_0(t)$

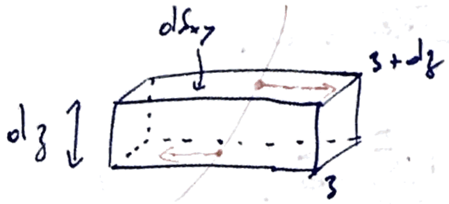
$V_n^{(f)} = V_n^{(s)} = 0$

Donc $\forall t$ $\begin{cases} V_x(z=0) = 0 \\ V_x(z=e) = V(t) \end{cases}$ Condition d'adhérence (X)

de plus $\begin{cases} V_y = 0 \\ \text{par Hypothèse} \end{cases}$ et écoulement $\boxed{2D}$ (Y)

$\boxed{V_z(0) = V_z(e) = 0}$ le fluide ne peut traverser le solide. (Z)

3/ Bilan des act° de friction sur une particule fluide



On raisonne sur df_x uniquement.

$$df_x = +\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z+dz).dS - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z)\, dS$$

Soit $df_x = +\eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} . \underbrace{dz . \overbrace{dx\, dy}^{dS}}_{d\tau}$ soit $\boxed{\dfrac{df_x}{d\tau} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}$

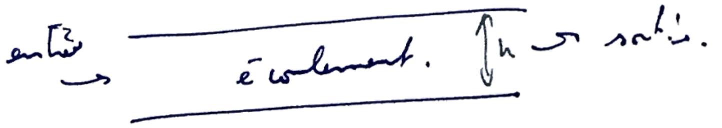
On admet qu'elle se généralise en 3D par $\dfrac{d\vec f}{d\tau} = \eta \Delta \vec v$.

D'où l'équat° de Navier Stokes :

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v.\vec\nabla)(\vec v)\right] = \rho\vec g - \vec\nabla P + \eta\Delta\vec v}.$$

4) Écoulements en régime permanents :

On considère des écoulements d'un fluide incompressible dans la direct° $\vec{e_x}$. L'écoulement (2D) est invariant selon y et loin des entrées/sortie de matière, on peut considérer que le chp de vitesse est invariant par translat° selon x.



$$\boxed{\vec v \begin{vmatrix} v_x(\cancel{x},z) \\ 0 \\ v_z(\cancel{x},z) \end{vmatrix}}$$

α) Équat° du PB

⊛ Caractère incompressible $\cancel{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}} + \mathrm{Div}(\rho\vec v) = 0$ $\quad \mathrm{Div}(\vec v) = 0$.

Soit $\cancel{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}} + 0 + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = C^{te}$ or sur un bord $v_z(0) = v_z(h) = 0$.

Donc $\boxed{\vec v = v_x(z)\,\vec{e_x}}$ Ainsi tte particule fluide est en T.R.U $\boxed{\vec a = \vec 0}$

or $\vec a = \dfrac{D\vec v}{Dt} = 0$ soit $\dfrac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v.\vec\nabla)(\vec v) = \vec 0$ il reste $\boxed{\vec\nabla P = \rho\vec g + \eta\Delta\vec v}$

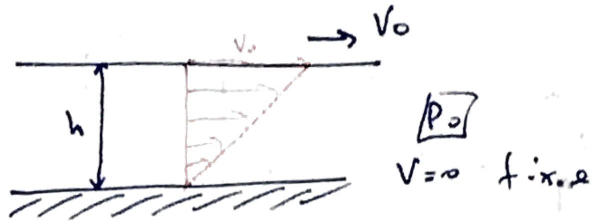
Rq calcul explicite $\dfrac{D\vec v}{Dt}$ au dos.

$\vec{v} = v_x(z)\,\vec{e}_x \Rightarrow \circledast\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ $\quad \circledast\ \vec{v}.\vec{\nabla} = v_x \dfrac{\partial .}{\partial x}$

soit $(\vec{v}.\vec{\nabla})(\vec{v}) = \cancel{v_x \dfrac{\partial \vec{v}_x(z)}{\partial x}} = 0.$

Physiquement retenir que TRU $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$.

β) Écoulement de Couette plan :



Cond Bord $\begin{cases} \vec{v}(z=0) = \vec{0} \\ \vec{v}(z=h) = V_0\, \vec{e_x} \end{cases}$

Hypothèse : le fluide est entraîné par la plaque supérieure.
La pression supposée inchangée selon $\vec{e_x}$ $P(\cancel{x}, y, z) = P(z)$
[il n'y a pas de cause selon e_x mais $\vec{g}$ selon z].

$$\vec{\nabla}(P) = \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

Soit les 2 eq° :

$$\begin{vmatrix} \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial P}{\partial y}} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$v_x(z)$.

$v_y = v_z = 0$.

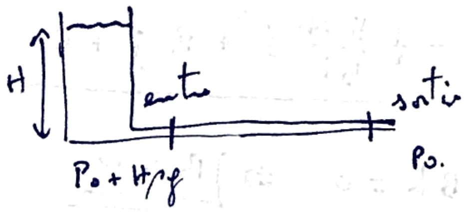
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad \boxed{P = P(0) - \rho g z}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \qquad v_x(z) = Az + B \qquad \begin{cases} v_x(0) = 0 = A\cdot 0 + B \Rightarrow \boxed{B = 0} \\ v_x(h) = V_0 = Ah + 0 \quad \boxed{A = \frac{V_0}{h}} \end{cases}$$

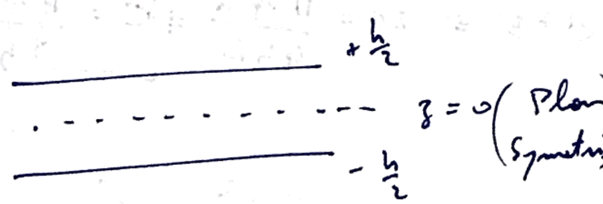
$$\boxed{v_x(z) = \frac{V_0}{h}\cdot z}$$

$$D_v = \iint_0^{L\ h} v\, dS = L\frac{V_0}{h}\underbrace{\int_0^h z\, dz}_{\frac{h^2}{2}} = \frac{hL}{2}V_0 \qquad \boxed{\langle V_0 \rangle = \frac{D_v}{hL} = \frac{V_0}{2}}$$

γ) Écoulement de Poiseuille plan :



On ajoute ici un gradient de pression qui pousse le fluide, les bords sont fixe



(*) Cond. Bord. $\vec{v}(z = \frac{h}{2}) = \vec{v}(z = -\frac{h}{2}) = \vec{0}$.

(*) La pression en $z = 0$ est une f° de x seule $P_0(x)$.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \cancel{\dfrac{\partial P}{\partial y}} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(i) $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} < 0.}$ perte de pression.

(ii) $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g}$

* Soit en x $P(x, z=0) = P_0(x) \Rightarrow P(x,z) = P_0(x) - \rho g z$.

* $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \underbrace{\dfrac{\partial P_0(x)}{\partial x}}_{f^t \text{ de } x \text{ seule}} = \underbrace{\eta \dfrac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}}_{f^t \text{ de } z \text{ seule}} = K$ Constante.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(x)}{\partial x} = K < 0 & \text{gradient de pression } c^{te}. \\ \dfrac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = \dfrac{K}{\eta}. \end{cases}$$

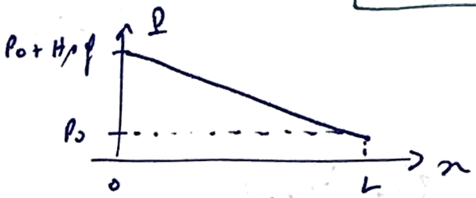
(ii)

On a $P_0(x) = Kx + c^{te}$.

$P_0(0) = \underline{H\rho g + P_0} = K \cdot 0 + \underline{c^{te}}$.

$P_0(L) = \cancel{P_0} = KL + c^{te} = KL + H\rho g + \cancel{P_0} \Rightarrow \boxed{K = -\dfrac{H\rho g}{L}.}$

Soit $\boxed{P_0(x) = P_0 + H\rho g(L - x)}$



Profil linéaire.

$$\boxed{P(x,z) = P_0 + H\rho g(L-x) - \rho g z}$$

Rq: la poussée d'Archimède (4) (ii) maintient la particule fluide sur une horizontale en compensant son poids.

(i) $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\dfrac{H\rho g}{\eta L}$ $\qquad \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = -\dfrac{H\rho g}{\eta L} z + B$

$$\boxed{v_x(z) = -\frac{1}{2}\frac{H\rho g}{\eta L} z^2 + Bz + C}$$

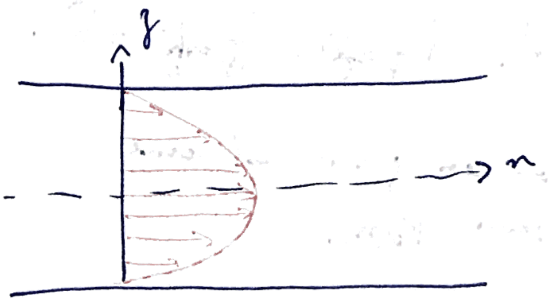
$v_x\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{H\rho g}{\eta L}\frac{h^2}{4} + B\frac{h}{2} + C = 0$ (1)

$v_x\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{H\rho g}{\eta L}\frac{h^2}{4} - B\frac{h}{2} + C = 0$ (2)

(1)-(2) $\Rightarrow Bh = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}$.

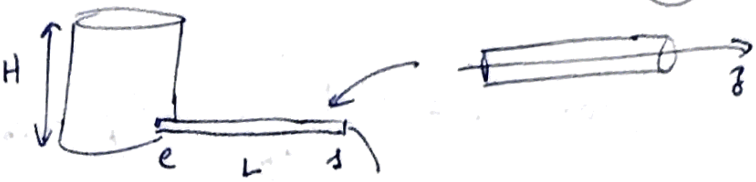
(1)+(2) $\Rightarrow 2C = \dfrac{H\rho g h^2}{4\eta L} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{H\rho g h^2}{8\eta L}}$

$$\boxed{v_x(z) = \frac{H\rho g}{2\eta L}\left[\frac{h^2}{4} - z^2\right]}$$



8) Ecoulement de Poiseuille cylindrique : Tube capillaire.

On reprend le dispositif précédent pour une conduite cylindrique de rayon faible $R < 1$ mm



⊛ Par des arguments semblables $\left\{ \begin{array}{l} \text{inv translat°} \\ \text{conservat incompressibl} \end{array} \right\}$ $\mathrm{Div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow$ fluide en TRU. selon $\vec{e_z}$

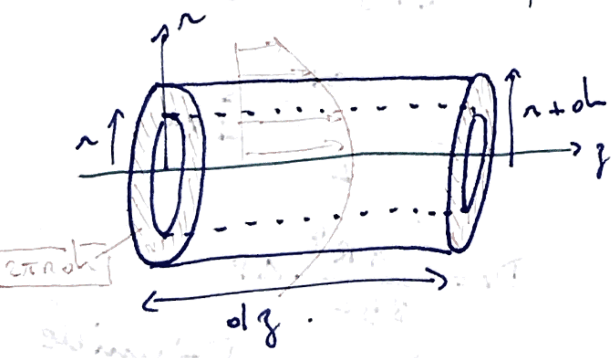
⊛ Soit $\vec{\nabla} P = \cancel{\rho \vec{g}} + \eta \Delta \vec{v}$

les variat° de pression dues à $\vec{g}$ sont ici négligeables mais compensent identiquement la composante verticale de $\vec{\nabla} P$. $\boxed{2R \ll H}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P(r, \theta, z) \simeq P(z)}$.

⊛ Le champ de vitesse possède les symétries suivantes
- invariance par rot $\boxed{\theta}$
- invariance par translat° $\boxed{z}$

$$\boxed{\vec{v} = v_z(r, \theta, \cancel{z})\, \vec{e_z}}$$

On construit le bilan des forces par le choix d'un $\boxed{\text{Tube}}$ de rayon $r \to r + dr$ de hauteur dz.



2 effets antagonistes $\Rightarrow$ TRU.

① * Poussée du différentiel de pression vers la droite.

② * freinage par viscosité sur les faces interne et externe.

① $dF_p = + P(z) \times 2\pi r\, dr - P(z+dz)\, 2\pi r\, dr = \boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} dz \cdot 2\pi r\, dr} > 0$ Poussée

② $dF_v = dF^{\oplus}_{\ominus} + dF^{\ominus}_{\oplus} = + \eta \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial r}(r+dr)}_{\text{grand } \ominus} \times 2\pi(r+dr)\, dz - \eta \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial r}(r)}_{\text{petit } \oplus} \times 2\pi r\, dz < 0$ freine

$$= 2\pi \eta\, dz \left[\frac{(r+dr) \frac{\partial v_z}{\partial r}(r+dr) - r \frac{\partial v_z}{\partial r}(r)}{dr} \right] dr = \boxed{2\pi \eta\, dz\, dr \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)} < 0$$

A l'équilibre $dF_p + dF_v = 0$ Soit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \cancel{2\pi} r\, \cancel{dr\, dz} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \cancel{2\pi} \eta\, \cancel{dr\, dz}$$

$$\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{f^{ct} \text{ de } z \text{ seule}} = \underbrace{\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)}_{f^{ct} \text{ de } r \text{ seule}} = K < 0$$

$*$ Soit $\frac{\partial P}{\partial z} = K \Rightarrow P(z) = Kz + P(0)$

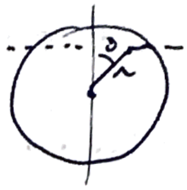
$P(0) = P_0 + H\rho g$.

$P(L) = \cancel{P_0} = KL + P(0)$

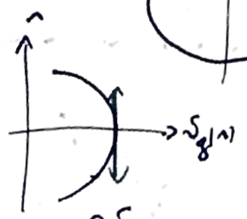
$= KL + \cancel{P_0} + H\rho g$

D'où $\boxed{K = -\frac{H\rho g}{L}}$ (h)

$\boxed{P(z) = P_0 + H\rho g\,[L - z]}$ $\cancel{- \rho g r \cos(\theta)}$



$*$ $\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -\frac{H\rho g}{L}$ $\quad r\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{H\rho g}{2L\eta}r^2 + \cancel{c^{te}}$



en $r = 0$ $\quad 0 \times 0 = 0 + c^{te} \Rightarrow c^{te} = 0$

$\frac{\partial v_z}{\partial r}(0) = 0$ par symétrie.

$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{H\rho g}{2L\eta}r$ $\quad \boxed{v_z(r) = c^{te'} - \frac{H\rho g}{4L\eta}r^2}$

or $v_z(R) = 0 = c^{te'} - \frac{H\rho g}{4L\eta}R^2 \Rightarrow c^{te'} = \frac{H\rho g}{4L\eta}.R^2$

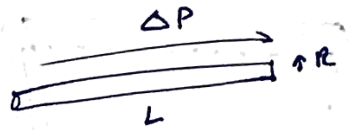
$\boxed{v_z(r) = \frac{H\rho g R^2}{4L\eta}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$ (h)

$[\eta \frac{v_z}{R}.L]L \overset{?}{=} [H\rho g R]L$

$[F] = [P].L^2$ ✓

Soit $\boxed{v(r) = v_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$ avec $\boxed{v_0 = \frac{\overbrace{H\rho g}^{\Delta P}.R^2}{4\eta L}}$

$*$ Débit : On a calculé $D_v = \frac{\pi R^2 v_0}{2}$



Soit $\boxed{D_v = \frac{H\rho g \pi R^4}{8\eta L}}$ De façon générale $\boxed{D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}.\Delta P}$

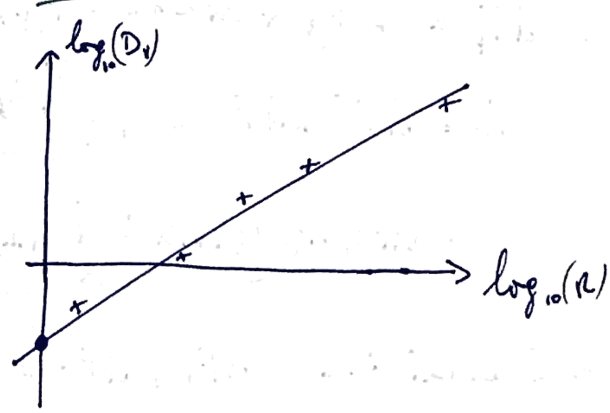
Loi de Hagen-Poiseuille

Rq : exp TP avec ≠ diamètre R.
avec $\Delta P = H\rho g$ fixée

$$\boxed{\log_{10}(D_v) = \log_{10}\left(\frac{\pi\Delta P}{8\eta L}\right) + 4\log_{10}(R)}$$

ordonnée à l'origine.
⇔ Mesure de $\boxed{\eta}$

pente.



E) Résistance hydraulique

⚠ uniquement régime visqueux ; Re bas

$U = RI \rightarrow \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot D_v$. Soit $R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

$\Rightarrow$ LDN & Associat° $\boxed{\text{série}}$, $\boxed{//}$