# II Application : Théorème de Bernoulli

## 1 Hypothèses

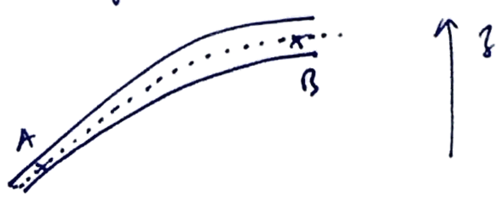
* On considère un (i) écoulement parfait sur le plan thermodynamique si il n'y a pas de source d'irréversibilité
  ↳ $\boxed{\delta S^c = 0}$
  - pas de diffusion de qté de Mvt.
    ↳ pas de viscosité.
  - pas de diffusion thermique.
    $dT = 0$

* Le fluide est (ii) incompressible.

* L'écoulement est (iii) stationnaire

Dans ce contexte, nous avions établi par la thermodynamique, le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = C^{te}}$$



## 2 Demo Bernoulli - Meca flux [HP]

On part de l'eq° d'Euler : $\cancel{\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\vec{v}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P$

(iii)

Prop d'opérateur : $\boxed{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\vec{v}) = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{Rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}}$

$$\partial_i\left(\frac{v_j v_i}{2}\right) + \varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{jlm}\partial_l v_m\right)v_k = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}v_j\partial_i v_j + \underbrace{\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm}}\, v_k\partial_l v_m = v_k\partial_k v_i$$

✓

* $k = l$, $i = m$ → $+ v_k\partial_k v_i$
* $k = m$, $i = l$ → $- v_k\partial_i v_k$

Ainsi : $\rho\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \rho\vec{g} + \vec{\nabla}P = -\vec{Rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}$.

idée : $\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$ ↑ $z$

$$\boxed{\vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P\right] = -\vec{Rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}.}$$

* Cas général : On suit une ligne de courant en régime stationnaire :

$$\underbrace{\int_A^B \vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P\right]\cdot \vec{dl}}_{\text{Par définit° du gradient.}} = \int_A^B \left[-\vec{Rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}\right]\cdot \vec{dl}$$ or $\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt} \propto \vec{v}$

$$= \cancel{-\int_A^B \left[\frac{\vec{dl}}{dt} \wedge \vec{dl}\right]\cdot \vec{Rot}(\vec{v}) = 0.}$$

:(

9

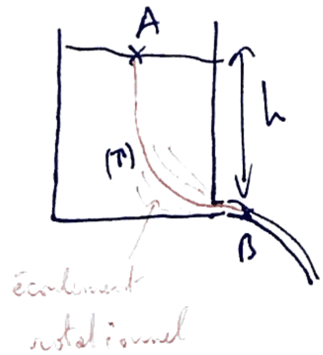
$$0 = \left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P\right]_A^B$$ soit $$\boxed{\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B}$$

⊗ **Cas particulier** : écoulement irrotationnel : $\boxed{\vec{Rot}(\vec{v}) = \vec{0}}$ $\forall M$.

Alors $\vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P\right] = \vec{0}$ $\forall M$.

Cette relat° s'intègre identiquement sans que l'on ait à suivre une ligne de courant, càd Bernoulli valide $\forall$ A et B

## 3 Formule de Torricelli




Soit (T) une ligne de courant.

$$\cancel{\underbrace{\frac{1}{2}\rho v_A^2}_{=0}} + \rho g \underbrace{z_A}_{=h} + \underbrace{P_A}_{=\boxed{P_0}} = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \cancel{\rho g \overbrace{z_B}^{=0}} + \cancel{\overbrace{P_B}^{=P_0}}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2 g h}}$$

On retrouve la conversion d'$E_p$ en $E_c$.

4 Tube de Pitot

5 Effet Venturi

6 Aile avion & effet Magnus.