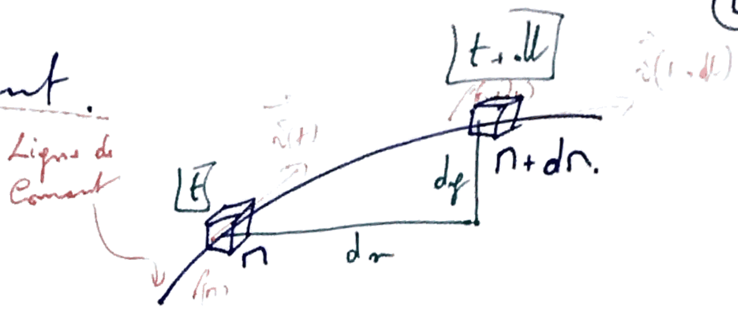
I Le fluide en écoulement

1) Dérivée particulaire $\frac{D\cdot}{Dt}$



Soit un fluide en mvt.

On souhaite "suivre" la particule fluide → $\boxed{\text{"pt de vue Lagrangien"}}$ et exprimer des grandeurs caractéristiques ($\vec{e}$, $\vec{v}$) en f^t de ses données de champ $\boxed{\text{"pt de vue Eulérien"}}$

exemple (scalaire) $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz) - \rho(t,x,y,z)}{dt}$

$$= \frac{\left[\cancel{\rho(t,x,y,z)} + \frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}dz - \cancel{\rho(t,x,y,z)}\right]}{dt}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}$$

On voit apparaître les composantes de la vitesse de la particule fluide

interprète :

Soit $\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\rho)}$

$\boxed{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\cdot) = v_x\frac{\partial \cdot}{\partial x} + v_y\frac{\partial \cdot}{\partial y} + v_z\frac{\partial \cdot}{\partial z}}$

Soit $\boxed{\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\cdot)}$ opérateur de dérivée particulaire

en suivant la particule

dérivée explicite sur $\boxed{t}$

Terme convectif qui accompagne la particule $\vec{v} = \vec{v}(M)$

2) Trajectoire de la particule fluide

On voit qu'une grandeur (ex simple $\rho(t,x,y,z)$) peut changer.

- Sous l'effet du temps en un pt précis : dépendance explicite en t
- Sous l'effet de son déplacement au sein du fluide dans son ensemble.

Cas de la vitesse :

En toute rigueur, le champ de vitesse $\vec{v}(t, x, y, z)$ évolue. Ainsi la trajectoire n'est pas identique à la ligne de champ / de courant instantanée.

On distingue ainsi 2 pts de vue :

Aspect Expérimental :

- point de vue Lagrangien : on suit la particule → paillette. → fumées colorées. + photos.
  → Dynamique : PFD sur la particule fluide.
- pt de vue Eulérien : On décrit le fluide par un champ(s) $\vec{v}(t, x, y, z)$
  → mesure : au tube de pitot / au fil chaud.
- Simulat° Numérique

⇒ La dérivée particulaire permet d'exprimer le point de vue Lagrangien dans le formalisme Eulérien.

Ainsi en suivant la particule $\boxed{\vec{a} = \dfrac{D\vec{v}}{Dt}}$

Donc $$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})(\vec{v})}$$ Accélérat° de la particule.

$(\vec{v}.\vec{\nabla}). = v_x \frac{\partial .}{\partial x} + v_y \frac{\partial .}{\partial y} + v_z \frac{\partial .}{\partial z}$

Exercice ⇒ 2' en page 4

3) L'équat° d'Euler : [HP] s'en déduit : soit une particule fluide de masse $dm = \rho \, d\tau$

soumise à des forces volumiques : [cf cours SUP]

- $\vec{f}_{poids} = \rho \vec{g}$
- $\vec{f}_{pression} = -\vec{\nabla}(P)$
- Autre : $\vec{f}_{autre}$

(!) forces volumiques

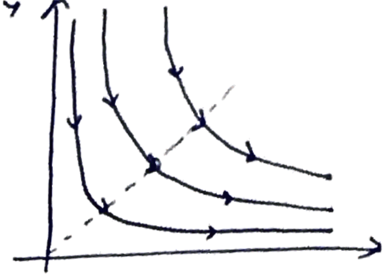
On obtient :

$$\underbrace{dm}_{\rho\,\cancel{d\tau}} \vec{a} = \underbrace{dm}_{\rho\,\cancel{d\tau}}\, \vec{g} - \vec{\nabla}(P).\cancel{d\tau} \left(+ \vec{f}_{autre}\, \cancel{d\tau}\right)$$

Soit $$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})(\vec{v})\right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla}(P)}$$ (Euler) exemple: On donne $\boxed{\vec{v}\begin{vmatrix} +kx \\ -ky \end{vmatrix}}$ (4) $\quad [k] = T^{-1}$

$\boxed{2°}$

Vitesse Euler



$\begin{cases} V_x > 0 \\ V_y < 0 \end{cases}$

α) pt de vue Lagrangien.

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +k\dot{x} \\ -k\dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +kv_x \\ -kv_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2x \\ k^2y \end{vmatrix} \quad \vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix}$$ → cinematique du pt.

Soit $\boxed{\vec{a}\begin{vmatrix} kV_{x0}e^{+kt} \\ -kV_{y0}e^{-kt} \end{vmatrix}}$ (k) $\quad \begin{cases} \dot{v}_x = +kv_x \\ \dot{v}_y = -kv_y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v_x(t) = V_{x0}e^{+kt} \\ v_y(t) = V_{y0}e^{-kt} \end{array}}$ (k) $= \begin{vmatrix} k\,x(t) \\ -k\,y(t) \end{vmatrix}$

Accélérat° Vitesse

Soit
$$\begin{pmatrix} x(t) = \frac{V_{x0}}{k}e^{+kt} + K_x \Rightarrow k\,x(t) = \cancel{V_{x0}e^{+kt}} = \cancel{V_{x0}e^{kt}} + kK_x \Rightarrow K_x = 0 \\ y(t) = -\frac{V_{y0}}{k}e^{-kt} + K_y \Rightarrow -k\,y(t) = +\frac{V_{y0}\cancel{k}}{\cancel{k}}e^{-kt} = V_{y0}e^{-kt} - kK_y \Rightarrow K_y = 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{V_{x0}}{k}e^{+kt} \\ y(t) = -\frac{V_{y0}}{k}e^{-kt} \end{cases}}$ (k) $\Rightarrow x\,y = -\frac{\overset{\oplus}{V_{x0}}\overset{\ominus}{V_{y0}}}{k^2} = A \geq 0$ Soit $\boxed{y = \frac{A}{x}}$

Trajectoire

Hyperbole.

β) pt de vue Eulerien:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})(\vec{v})$$

ici $\vec{v}.\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \partial_x . \\ \partial_y . \end{vmatrix} = (+kx)\frac{\partial .}{\partial x} + (-ky)\frac{\partial .}{\partial y} = \underbrace{kx\frac{\partial .}{\partial x} - ky\frac{\partial .}{\partial y}}_{\text{op. scalaire } (\vec{v}.\vec{\nabla})(\,.\,)}$ $\vec{v}$

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} kx\frac{\partial(kx)}{\partial x} - \cancel{ky\frac{\partial(+kx)}{\partial y}} \\ \cancel{kx\frac{\partial(-ky)}{\partial x}} - ky\frac{\partial(-ky)}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}\begin{vmatrix} k^2x \\ +k^2y \end{vmatrix}}$$

Accélérat° Euler.

et la posit° → Trajectoire: $\forall n \quad \vec{v} \wedge \vec{dl} = \vec{0}$ $\quad \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x dy - v_y dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

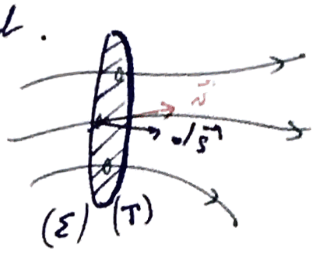
$kx\,dy + ky\,dx = 0$

$$\frac{dx}{kx} = -\frac{dy}{ky} \quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = 0 \quad \ln(xy) = \ln(x_0y_0) = \ln(A).$$

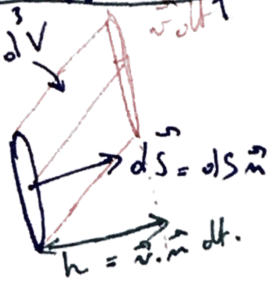
$\boxed{y = \frac{A}{x}}$ eq° Trajectoire

4) Calcul de Débit

Soit (Γ) un contour traversé par une ligne de courant.
et (Σ) une surface *fixe* qui s'appuie sur (Γ).



α) Débit Volumique



soit $\boxed{d^3V}$ le volume traversant $d\vec{S}$ pendant dt.

on a vu que $dV = dS . \underbrace{\vec{n}.\vec{v}\,dt}_{h}$

Soit $d^3V = d^2\vec{S} . \vec{v}\,dt = (\vec{v} . d^2\vec{S}) . dt$.

Ainsi $dV = \left(\iint_\Sigma \vec{v}(r) . d\vec{S}(r)\right) dt$ or $D_v = \dfrac{dV}{dt}$ $\boxed{D_v \equiv \iint_\Sigma \vec{v} . d\vec{S}}$ (h)

N.B : En toute rigueur le D_v dépend du choix de Σ car il peut y avoir accumulat° de matière.

β) Débit Massique : $\boxed{d^3m} = \rho(r)\, d^3V$ sachant que $\rho(r)$ est f° de la posit°.

$d^3m = \rho(r)\, \vec{v}(r) . d^2\vec{S}(r) . dt$. On a donc : $\boxed{D_m \equiv \iint_\Sigma \rho \vec{v}\, d\vec{S}}$ (h)

On peut définir $\boxed{\vec{j}_m \equiv \rho \vec{v}}$ vecteur densité de courant de matière

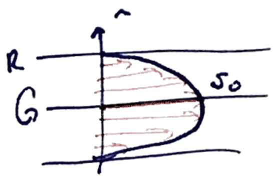
γ) fluide incompressible

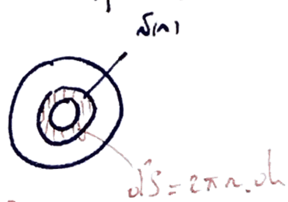
Ce sera souvent le cas ▵ c'est le cas de l'eau $\rho(M) = \rho_0$ Alors
▵ GP tant que $v \ll C_{son}$

$D_m = \iint_\Sigma \rho_0 \vec{v}\, d\vec{S}$

$D_m = \rho_0 \underbrace{\iint \vec{v}\, d\vec{S}}_{D_V}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_m = \rho_0 D_v}$

Écoulement de Poiseuille. (Visqueux)





δ) Exemple $v(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$

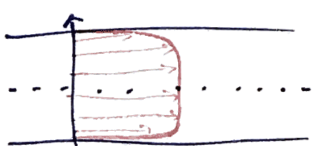
$D_v = \int_0^R \int_0^{2\pi} v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] . dr \times r\,d\theta = v_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = v_0\, 2\pi \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right] = \pi v_0 R^2 \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}\right]}_{\frac{1}{2}}$

$\boxed{D_v = \dfrac{\pi R^2 . v_0}{2}}$ On en tire la vitesse moyenne. $\langle v \rangle_\Sigma \times \pi R^2 = D_V$.

Soit $\langle v \rangle_\Sigma = \dfrac{v_0}{2}$

Rq : Modèle valide pour de l'eau tant que $R \leq 1$ mm

Contre exemple : tuyau arrosage/Robinetterie



Effet visqueux sur les bords. slt.

5] Ecoulement Stationnaire (Régime Permanent R.P)

α] voir (1)

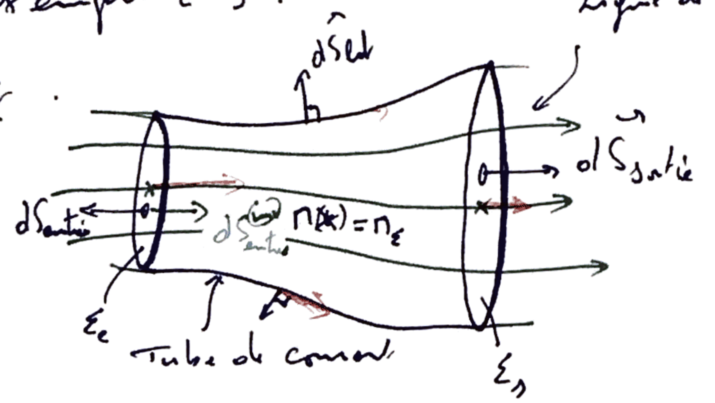
Dans la plupart des cas l'écoulement sera supposé stationnaire.
donc les grandeurs $G(t, r)$, $\vec{V}(t, r)$ ne dépendent pas du temps en un pt M
$[\rho, u, s_{etc...}]$ $[\vec{v}, \vec{e}]$

$\boxed{\text{La Trajectoire de la particule fluide se confond ainsi avec la ligne de courant.}}$

C'est le cas de l'exemple [2'].

Ligne de champ = Ligne de courant

γ] Tube de Courant.



β] Ligne de Courant

La vitesse lui est tangente en tt pt $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$ $\Rightarrow$ Σ d'éq° différentielles.

α] Régime permanent "Écoulement stationnaire"

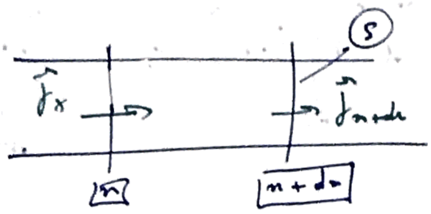
Il n'y a pas de "dépendance explicite" sur le temps càd $\boxed{\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0}$

⚠ La vitesse, masse volumique, Pression, s, u, h, de la particule fluide évolue le long de sa Trajectoire. $\Rightarrow$ pas en un point en f^t du temps

[6] Bilan de conservation de la matière.

On se place ici dans le cas le plus général : - fluide compressible
- Ecoulement non stationnaire

α) Bilan 1D



On calcule l'évolut° de la qté de matière au sein du Σ de 2 façons :

⊛ Variat° au sein du volume $dm_V = \rho(t+dt,x)\,d\tau - \rho(t,x)\,d\tau = \frac{\rho(t+dt,x)-\rho(t,x)}{dt}\cdot S\,dx$

$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot S\,dx\,dt$

⊛ Apport par les frontières $dm_\Sigma = \overset{\text{rentre}}{+j_x(x)\cdot S\,dt} - \overset{\text{sort}}{j_x(x+dx)\cdot S\,dt} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\cdot S\,dx\,dt$.

⊛ Il n'y a ni créat° ni disparition, soit $\boxed{dm_V = dm_\Sigma}$.

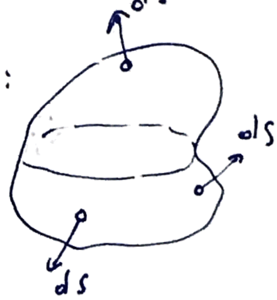
$dm = \frac{\partial\rho}{\partial t}\cancel{S\,dx\,dt} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\cancel{S\,dx\,dt}$. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$. Avec $j_x = \rho v$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0}$$

Soit $\boxed{\vec{j} = \rho\vec{v}}$ vecteur "densité de courant de matière"

β) Bilan 3D :

Soit V un volume de frontière fixe Σ :



$dm_V = \iiint_V \rho(t+dt)\,d\tau - \iiint_V \rho(t)\,d\tau = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\cdot d\tau$.

$dm_\Sigma = -\oiint_\Sigma \vec{j}\cdot \underset{\text{sortant}}{d\vec{S}}\,dt = -\iiint_V \mathrm{Div}(\vec{j})\,d\tau\,dt$ de même $dm_V = dm_\Sigma$

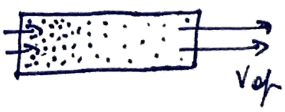
$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau\cdot dt = -\iiint_V \mathrm{Div}(\vec{j})\,d\tau\,dt$, soit $\iiint_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{Div}(\vec{j})\right] d\tau\cdot dt = 0 \quad \forall V$.

Soit $$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{Div}(\rho\vec{v}) = 0}$$

⚠ $\mathrm{Div}(\vec{v}) \neq 0$

γ) Hypothèses simplificatrices :

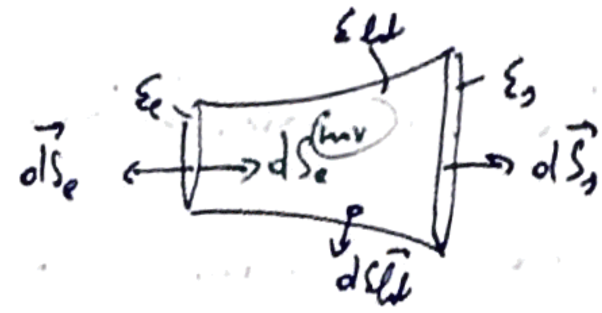
* Ecoulement stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ soit $\boxed{\mathrm{Div}(\rho\vec{v}) = 0}$

liq  Vap

* fluide incompressible $\rho(t,x,y,z) = \rho_0 = c^{te}$ $\quad \cancel{\frac{\partial\rho_0}{\partial t}} + \mathrm{Div}(\rho_0\vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Div}(\vec{v}) = 0}$

⊙ liquide
⊙ Gaz $v \ll c_{son}$

Conséquence sur le tube de courant :



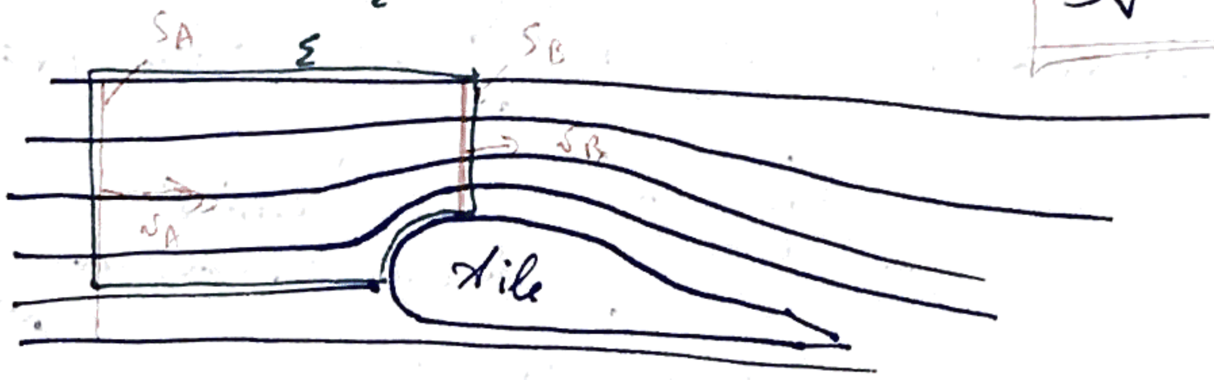
* Écoulement stationnaire : $\boxed{D_m^e = D_m^s}$

$$\boxed{\mathrm{Div}(\vec j)=0} \quad \oiint \vec j\cdot d\vec S = 0 \qquad \underbrace{\iint_{\Sigma_e}\vec j\cdot d\vec S_e}_{-\iint_{\Sigma_e}\vec j\, d\vec S_e^{(inv)}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\Sigma_{lat}}\vec j\cdot d\vec S_{lat}}}_{\perp} + \iint_{\Sigma_s}\vec j\cdot d\vec S_s \Leftrightarrow \underbrace{\iint \vec j\cdot d\vec S_e^{(inv)}}_{D_m^e} = \underbrace{\iint \vec j\cdot d\vec S_s}_{D_m^s}$$

* fluide/écoulement incompressible $\boxed{\mathrm{Div}(\vec v)=0}$

$$\oiint \vec v\cdot d\vec S = 0 = \underbrace{\iint_{\Sigma_e}\vec v\, d\vec S_e}_{-\iint_{\Sigma_e}\vec v\, d\vec S_e^{(inv)}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\Sigma_{lat}}\vec v\cdot d\vec S_{lat}}}_{\perp} + \iint_{\Sigma_s}\vec v\cdot d\vec S_s \Leftrightarrow \underbrace{\iint \vec v\, d\vec S_e^{(inv)}}_{D_v^e} = \underbrace{\iint \vec v\cdot d\vec S_s}_{D_v^s}$$

Soit $\boxed{D_v^e = D_v^s}$



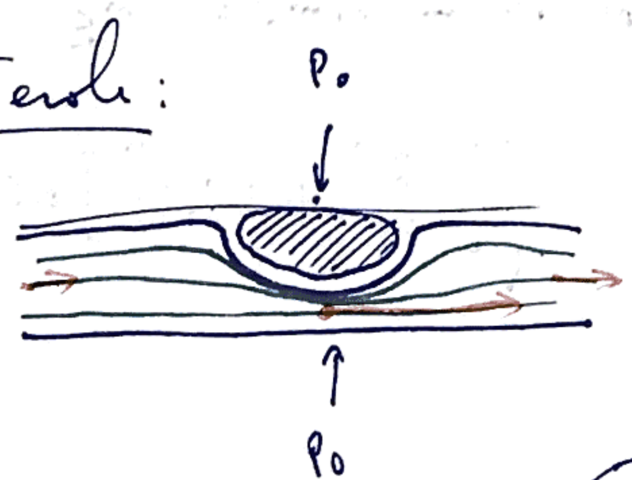
Hyp : Nb de Mach.

$$\boxed{m = \frac{v}{c_{son}} \ll 1}$$

$v_A S_A \simeq v_B S_B \qquad v_B = v_A \times \frac{S_A}{S_B} > v_A$

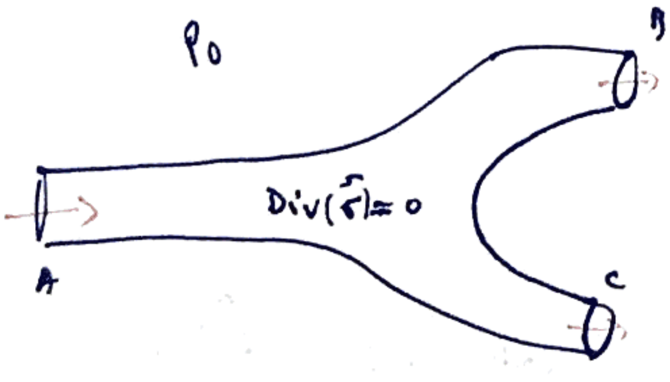
Le contournement de l'aile impose une augmentation de vitesse.
[tant que le fluide n'est pas compressible]
$v < c_{son}$

Cholestérol :



"dach-dach"

* LDN :



$$\boxed{v_A S_A = v_B S_B + v_C S_C}$$