

Les lois de l'induction:

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Loi de Faraday.

exp introductive:



$$\left. \begin{aligned} \phi \nearrow &\Rightarrow i = \frac{e}{R} < 0 \\ \phi = e^{kt} &\Rightarrow i = 0 \\ \phi \searrow &\Rightarrow i = \frac{e}{R} > 0 \end{aligned} \right\}$$

cohérent avec

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

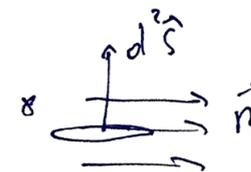
$$\phi \equiv \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Conclusion: (1) (2) (3) (4).

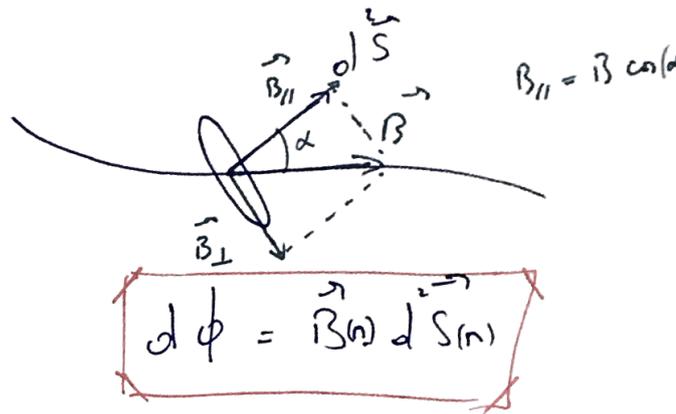
1) Flux d'un champ magnétique.



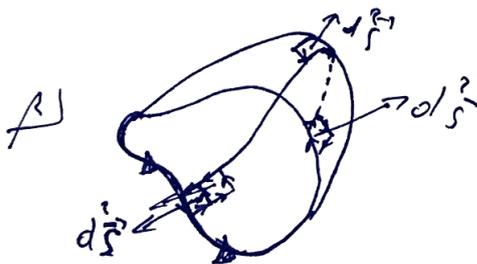
$$d\phi = B dS$$



$$d\phi = 0 \quad d^2S \perp B$$



$$d\phi = B(n) dS(n)$$

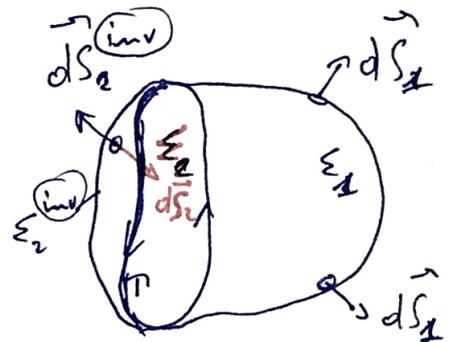


$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B}(n) \cdot d\vec{S}(n)$$

Propriété des flux

$$\text{Div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{locale}$$

$$\oiint_{\Sigma \text{ fermé}} \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0$$



$$T_2 = T_1 \text{ (inv)}$$

$$\phi_T = \iint_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 \quad \forall \vec{B}, T$$

$\forall \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \text{ parties par } T.$

Rp: Soit $\vec{B} = \vec{B}_0 = e^{kt}$ quelconque.

$$\vec{B}_0 \cdot \iint d\vec{S}_1 = \vec{B}_0 \cdot \iint d\vec{S}_2 =$$

avec $\vec{B}_0 \begin{cases} 1T \cdot \vec{e}_x \\ 1T \cdot \vec{e}_y \\ 1T \cdot \vec{e}_z \end{cases}$

$$\left[\vec{S}_1 = \vec{S}_2 \right]$$

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{S}_1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}_2 \quad \forall \vec{B}_0 \quad \forall T$$

$\forall \Sigma_1, \Sigma_2.$

2) Cas d'application $\phi = \oint_{\Sigma} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} (\vec{B}_0 \cdot \vec{e}_z) dS$
 $\vec{B}_0 \cos(\alpha)$

Soit $\phi = B_0 \cos(\alpha) \int_{\Sigma} dS$
 S

$\phi = B_0 S \cos(\alpha)$

car $S = \int_{\Sigma} d\vec{S} = \left(\int_{\Sigma} dS \right) \vec{e}_z = S \vec{e}_z \Rightarrow$

$\phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$

Bonheur 4

1. Auto inductif

$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} \cdot I \vec{e}_z$ $\phi_0 = N \times \mu_0 \frac{N}{L} I \times S = \overbrace{\pi R^2}^{\leftarrow}$

Soit $\phi_0 = \mu_0 \frac{N^2 S}{L} \cdot I$ $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{L}$

ODG : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

$N = 1000$

$S = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}^2$

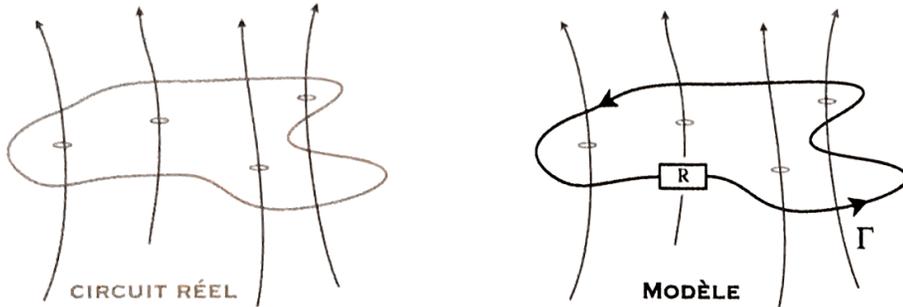
$L = 5 \text{ cm}$

$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} = 0,251 \text{ H}$
 $L = 251 \text{ mH}$

2 - LOI DE FARADAY

α - modélisation du circuit

- On modélise le circuit électrique (fil conducteur) par un contour Γ orienté, de résistance totale R , et traversé par des lignes de champ magnétique.
- On schématise ensuite le contour par un fil idéal, en série sur la résistance totale R du fil réel.



- On peut aussi ajouter d'autres dipôles notamment un générateur.

β- Loi de modération de Lenz

Soit un circuit de résistance R , et traversé par un flux de champ magnétique, qui varie dans le temps : $\Phi(t)$

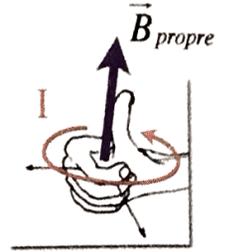
La loi de Lenz permet de déterminer le sens du courant :

Le courant induit dans le circuit crée lui-même un champ magnétique dont le flux propre tend à modérer la variation du flux extérieur qui lui a donné naissance.

Le champ magnétique propre obéit à la règle de la main droite :

Son flux vient s'ajouter à celui du champ extérieur :

On en déduit le signe du flux propre, compté positif selon le sens du contour orienté.



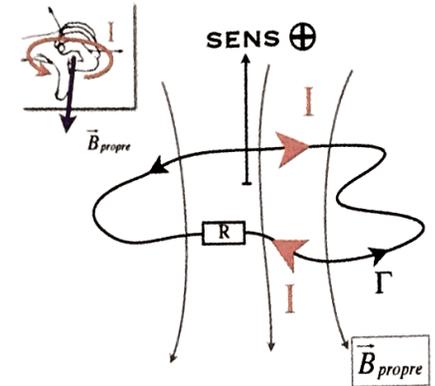
DEUX CAS DE FIGURE :

$$\Phi(t) \nearrow \Rightarrow \Phi_{propre}(t) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B}_{propre} \text{ dirigé dans le sens négatif}$$

$$\Rightarrow \text{I en sens inverse de } \Gamma$$

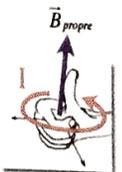
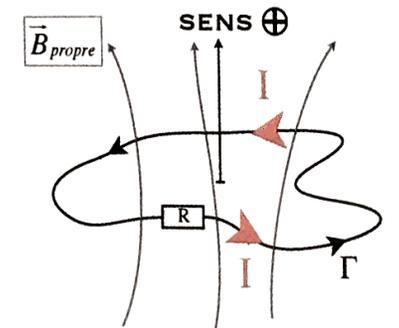


$$\Phi(t) \searrow \Rightarrow \Phi_{propre}(t) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B}_{propre} \text{ dirigé dans le sens positif}$$

$$\Rightarrow \text{I en sens de } \Gamma$$



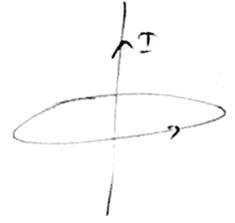
$$\boxed{I \text{ m du } d^0 \quad 4}$$

2)

$$\vec{B}(r) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \propto I$$

Loi de Biot & Savart.

Re: $2\pi R B = \mu_0 I$

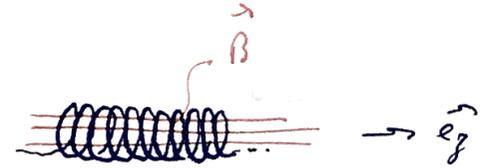


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

⇒ pratique d'airain μ dans μ_0 .

 $\boxed{B = \mu_0 n I}$

Application à un solénoïde ∞:



the champ: $\boxed{B = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_z}$ uniforme

$$\phi = N \phi_0 = N \times \frac{B_0 \times S}{\phi_0} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot I = L I$$

\uparrow
1 spire

Inductance: $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}}$

Bobine de GP

* ODG: $N=1000$
 $l=30\text{cm}$
 $R=2.5\text{cm}$ } $L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1000)^2 \times \pi (0,025)^2}{0,30} \approx 82 \text{ mH}$

en TP typiquement $10 \rightarrow 100 \text{ mH}$.

* 1 Henry: $N=10000$
 $l=1\text{m}$ } $n = 10^4 \text{ m}^{-1}$
 $R=5\text{cm}$

β - Modélisation d'un circuit électrique isolé d'influences extérieures

- Dans le cas isolé, le flux se réduit au flux propre. $\phi = \phi_{\text{propre}} = L I$

- Le circuit électrique est modélisé par la mise en série de :

Une inductance idéale L (CR):

$$\phi_{\text{propre}} = L I$$

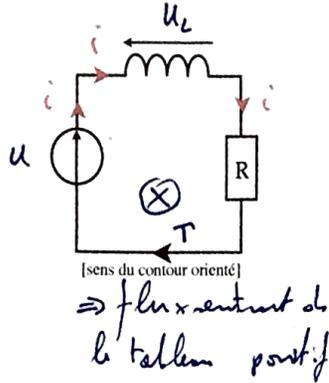
↳ représentant le flux propre

Un générateur de tension idéal u(t):

↳ générateur autonome eq.

Une Résistance R:

↳ résistance de l'ensemble du circuit (fil, générateur, etc...)

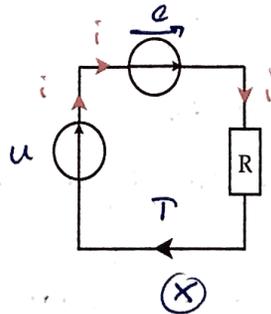


Re: pas besoin représenter la géométrie du circuit extérieurement

Application de la loi de Lenz:

Le générateur u(t) => fem, tente de faire varier le courant dans le circuit:

$$e(t) = - \frac{d\Phi_{\text{propre}}}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -u_L(t)$$



⊗ i(t) ↗ $\phi_{\text{propre}} \nearrow \Rightarrow e(t) < 0$ tente de faire diminuer le courant
 ⊗ i(t) ↘ $\phi_{\text{propre}} \searrow \Rightarrow e(t) > 0$ augmente

On appelle e(t) la force contre-électromotrice (FCEM) car elle s'oppose typ à la variat° du courant de la circuit

On comprend que l'on peut toujours modéliser le phénomène d'induction, par un générateur de fem e(t), donc en convention générateur (CG), et dirigé dans le sens du contour orienté Γ.

Y - Etude énergétique: $L D I \times i \quad (u = -e + R i) \times i$

$$\text{Soit } u i = - \left(-L \frac{di}{dt} \cdot i \right) + R i^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2$$

$$P_{\text{gen}} = \frac{d}{dt} (E_{\text{mag}}) + P_{\text{diss}}$$

fourni par le générateur

Stockage sous forme de chp magnétique

dissipé par la résistance

$$u_L = -e = - \left(-L \frac{di}{dt} \right) = +L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Soit } u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{T_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{T_2} \text{rot}(\vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2(r_2) \quad \vec{B}_2 \equiv \text{rot}(\vec{A}_2) \quad \vec{A}_1(r_2) = \int_{T_1} \frac{\mu_0 I_1 d\vec{l}_1}{4\pi \|r_2 - r_1\|}$$

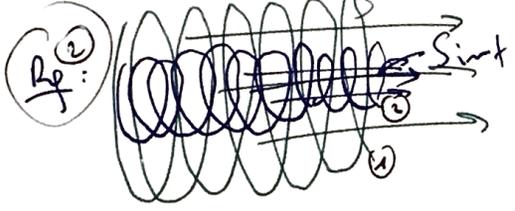
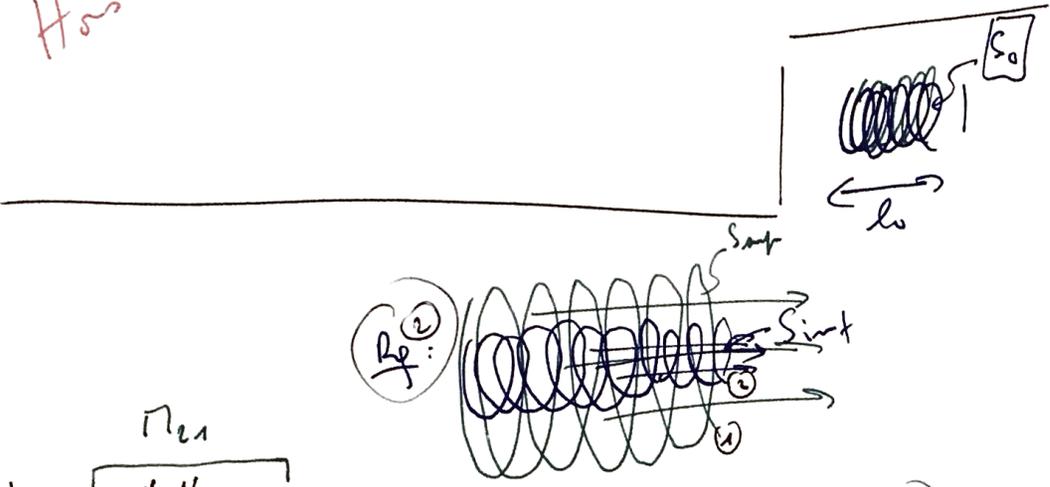
$$\vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{T_1, T_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{\|r_1 - r_2\|} \quad \text{de } \vec{m} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{T_1, T_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{\|r_1 - r_2\|} \cdot I_2$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_{21} I_1 \quad \mu_{21}$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_{12} I_2 \quad \mu_{12}$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$$

Hors Programme



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l_0} S_{int} I_1$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 N_2 N_1}{l_0} S_{int} I_2$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_0} S_{int} \quad (\checkmark)$$

$$\text{Mais } L_1 L_2 = \mu_0^2 \frac{N_1^2 N_2^2}{l_0^2} S_{int}^2$$

$$= \frac{S_{int}}{S_{int}} \times \mu^2 \quad (\times)$$

$$\mu^2 \ll L_1 L_2$$

ϵ_0 elec des circuits

LDN: $u_1 = R_1 i_1 - e_1$
 $u_2 = R_2 i_2 - e_2$

Flux: $\phi_1 = L_1 i_1 + \mu i_2$
 $\phi_2 = L_2 i_2 + \mu i_1$

choix de convention

Lois Faraday: $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - \mu \frac{di_2}{dt}$
 $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - \mu \frac{di_1}{dt}$

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

eq Electriques:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \mu \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \mu \frac{di_1}{dt}$$

eq diff lin couples

Inductance mutuelle. (N_1, I_1) et (N_2, I_2) So lo

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_0} \quad \phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_0} N_2 S = \frac{\mu_0 S N_1 N_2}{l_0} I_1$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_0} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l_0} N_1 S = \frac{\mu_0 S N_1 N_2}{l_0} I_2$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$$

ODG: $N_1 = N_2 = 1000$
 $l_0 = 30 \text{ cm}$
 $R = 2,5 \text{ } \Omega$

$$\mu = L = 82 \text{ mH}$$

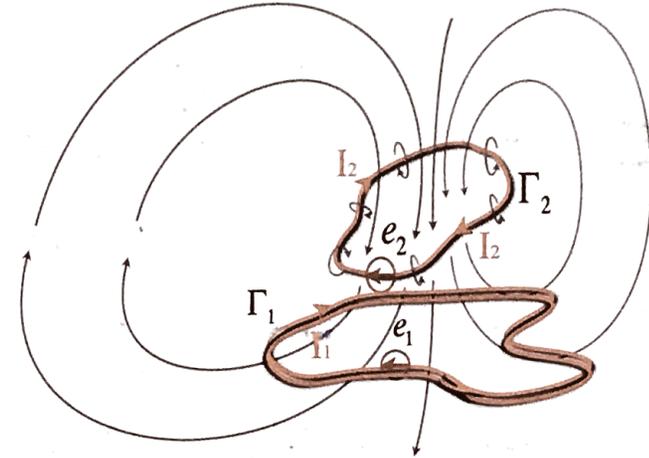
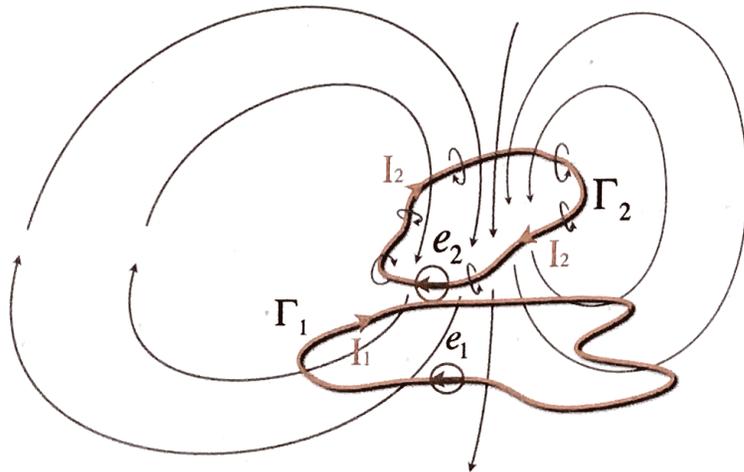
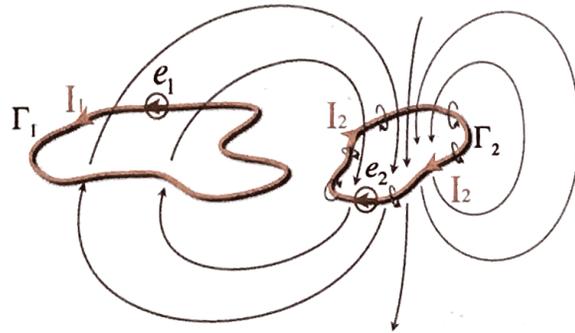
couplage parfait par Hyp.

RpA: cas d'un couplage total: $\mu^2 = L_1 L_2$

γ - Application : inductance mutuelle de deux solénoïdes infinis

- PROBLÈME DIRECTIONNEL :

- TROP LOIN LE CHAMP B EST TRÈS FAIBLE

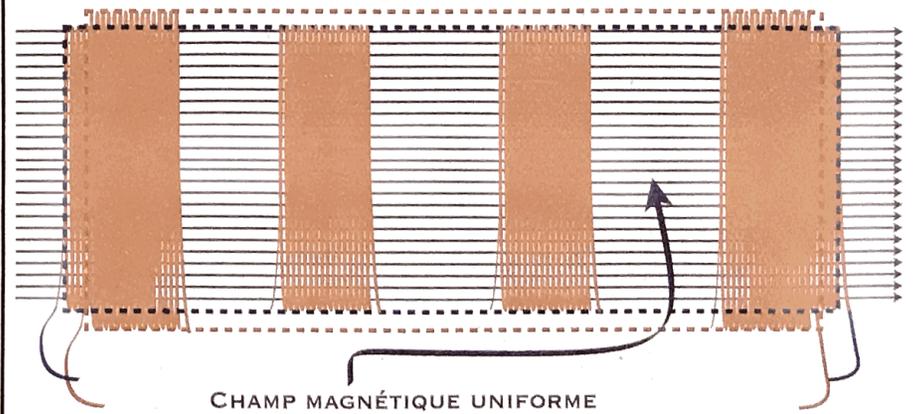


L'IDÉAL EST DE BOUCLER SUR UN MILIEU QUI CANALISE LES LIGNES DE CHAMP.

COUPLAGE IDÉALE : PAS DE PERTE CUIVRE !

CIRCUIT PRIMAIRE :

CIRCUIT SECONDAIRE :



3. Etude énergétique:

E_p^o électrique: $\begin{cases} \textcircled{1} \times i_1 \\ \textcircled{2} \times i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + \underbrace{\pi \frac{di_2}{dt} i_1}_{\text{partie commune à } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2}} \\ u_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + \underbrace{\pi \frac{di_1}{dt} i_2}_{\text{partie commune à } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2}} \end{cases}$

$\textcircled{1} \times i_1 + \textcircled{2} \times i_2 \Rightarrow \underbrace{P_{gen1} + P_{gen2}}_{\text{Polonné par les generateurs}} = \underbrace{P_{diss1} + P_{diss2}}_{\text{dissipés par effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \pi i_1 i_2 \right]}_{E_{mag} \Rightarrow \text{Stockée}}$

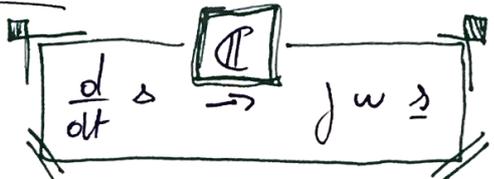
$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \pi i_1 i_2$

Re: $\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} L_1 & \pi \\ \pi & L_2 \end{bmatrix} \quad \pi_{12} = \pi_{21} = \pi$

$E_m = \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \hat{M} \mathbf{I}$

\hookrightarrow se généralise à N-bobines. $\begin{bmatrix} L_1 & \dots & \pi_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{ji} & \dots & L_n \end{bmatrix}$

4. Induction mutuelle en RSE:

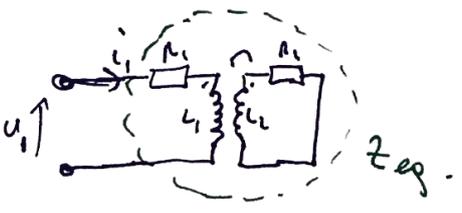


$\begin{cases} \underline{u}_1 = R_1 i_1 + j\omega L_1 i_1 + j\omega \pi i_2 = (R_1 + j\omega L_1) i_1 + j\omega \pi i_2 = \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 = R_2 i_2 + j\omega L_2 i_2 + j\omega \pi i_1 = (R_2 + j\omega L_2) i_2 + j\omega \pi i_1 = \underline{u}_2 \end{cases}$

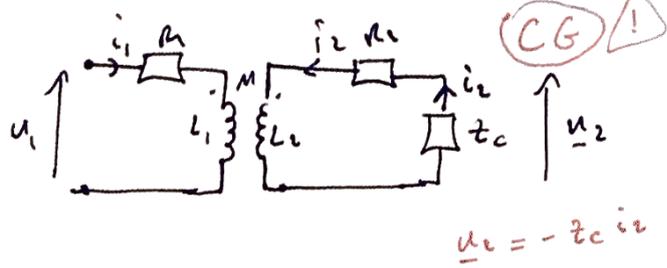
$(R_1 + j\omega L_1) i_1 + j\omega \pi \left[\frac{\underline{u}_2 - j\omega \pi i_1}{R_2 + j\omega L_2} \right] = \underline{u}_1$

Cas particulier: court circuit en secondaire: $\underline{u}_2 = 0$ ($u_2 = \cancel{u_0} \cos(\omega t)$)

$\underline{u}_1 = \left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 \pi^2}{R_2 + j\omega L_2} \right] i_1$



$\underline{u}_1 = \underline{z}_{eq} \cdot i_1$



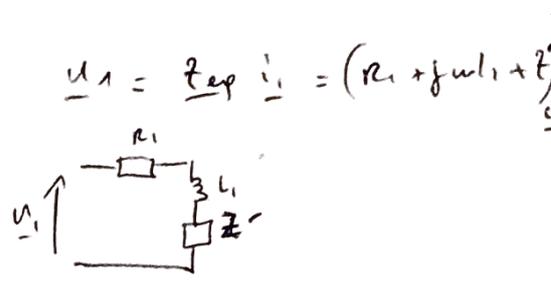
$$(R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1 + j\omega n \underline{i}_2 = \underline{u}_1$$

$$(R_2 + j\omega L_2) \underline{i}_2 + j\omega n \underline{i}_1 = \underline{u}_2 = -Z_c \underline{i}_2$$

$$(R_2 + j\omega L_2 + Z_c) \underline{i}_2 = -j\omega n \underline{i}_1$$

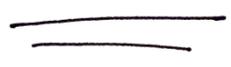
Soit $(R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1 + \frac{j\omega n (-j\omega n)}{R_2 + j\omega L_2 + Z_c} \underline{i}_1 = \underline{u}_1$

$$\underline{u}_1 = \left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 n^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_c} \right] \underline{i}_1$$



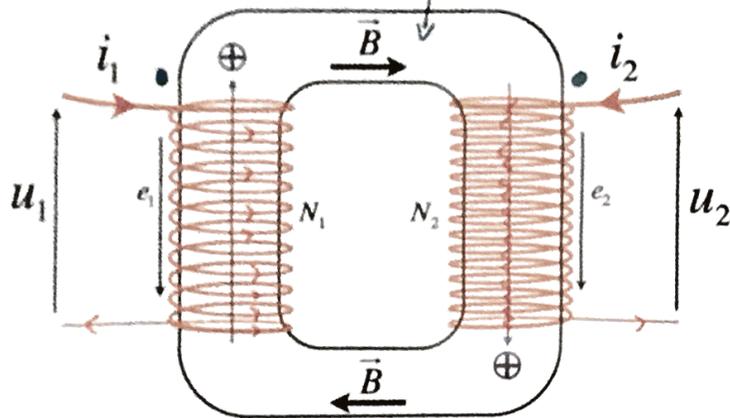
$|Z_c| \rightarrow 0$ retrouve cas précédent

$|Z_c| \rightarrow \infty$ $\underline{u}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1$ cas plus de courant \underline{i}_2
 \Leftrightarrow plus de couple.



5 - TRANSFORMATEUR

Un transformateur est un dispositif permettant le couplage magnétique entre un circuit primaire, noté 1 et formé de N_1 spires autour du «noyau ferromagnétique», qui canalise le champ magnétique à travers le circuit secondaire (noté 2) formé de N_2 spires autour du noyau.



Rq : Le sens des enroulements est choisi pour qu'un flux positif au primaire soit positif au secondaire et inversement : M positif. C'est un choix purement conventionnel.

CHAMP ET FLUX MAGNÉTIQUE

- Le ferromagnétique a pour but de canaliser les lignes de champ pour que l'intégralité du flux au primaire soit récupéré au secondaire (transformateur idéal : pas de perte cuivre)

- De plus, la valeur du champ magnétique est plus forte car les dipôles élémentaires au sein du ferromagnétique s'orientent dans le sens du champ et additionnent leur propre champ à celui des circuits.

Ainsi pour un solénoïde infini dans un ferromagnétique on obtiendrait :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r n I \vec{e}_z = \mu_0 \mu_r \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z \quad \mu_r > 1 \quad \text{: perméabilité magnétique relative (pas d'unité)}$$

CHAMP MAGNÉTIQUE TOTAL :

On considère que les deux circuits sont enroulés en spires jointives, tout autour d'un tore ferromagnétique de rayon R :

$$B_0 = B_1 + B_2 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi R} + \mu_0 \mu_r \frac{N_2 I_2}{2\pi R}$$

$$B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi R}$$

Flux magnétique à travers une section : $\phi_0 = B_0 S$

$$\phi_2 = N_2 \phi_0 \quad \text{et} \quad \phi_1 = N_1 \phi_0$$

Rapport de transformation en tension : $m \equiv \frac{u_2}{u_1}$

$$u_2 = -e_2 = + \frac{d\phi_2}{dt} = + N_2 \frac{d\phi_0}{dt} \quad u_1 = \dots = + N_1 \frac{d\phi_0}{dt}$$

$$\text{Soit } m = \frac{N_2 \frac{d\phi_0}{dt}}{N_1 \frac{d\phi_0}{dt}} \quad \boxed{m = + \frac{N_2}{N_1}} \quad \text{Rq: dans notre convention}$$

⚠ Le transformateur ne peut fonctionner en régime variable continu $\Rightarrow \phi_0 = e^{t\omega} \Rightarrow u_2 = 0$

MODÈLE DU TRANSFORMATEUR PARFAIT :

On imagine ici que la perméabilité magnétique est infinie (couplage parfait) : $\mu_r \rightarrow \infty$

$$\phi_0 = \mu_0 \mu_r S \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi R} \quad \phi_0 \text{ fini} \Rightarrow \boxed{N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0}$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{I_2}{I_1} = - \frac{N_1}{N_2}} = - \frac{1}{m}$$

ODG: fer 5000 - 8000

puissance donnée

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{entrée}} &= u_1 I_1 \\ P_{\text{sortie}} &= u_2 I_2 \end{aligned} \right\} \frac{P_{\text{sortie}}}{P_{\text{entrée}}} = \frac{u_2 I_2}{u_1 I_1} = + \frac{N_2}{N_1} \times \left(- \frac{N_1}{N_2}\right) = -1$$

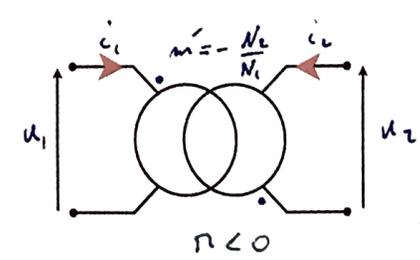
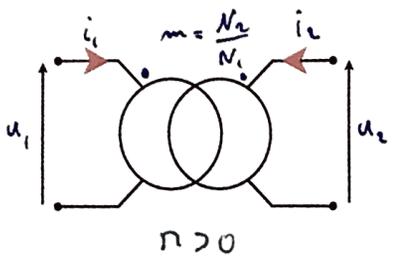
La puissance envoyée en entrée est donc reçue en sortie

CONVENTION D'ORIENTATION

⊗ $\phi_1 = N_1 \phi_0$ mais $\phi_2 = -N_2 \phi_0$ } Soit $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{N_2}{N_1} = m'$
 $\hookrightarrow u_1 = N_1 \frac{d\phi_0}{dt}$ $\hookrightarrow u_2 = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt}$

⊗ Mais $B = B_1 + B_2 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{2\pi r}$ or $\phi_0 = BS$ fini

$\Rightarrow m' u_1 \rightarrow \infty \left| \frac{I_2}{I_1} = +\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m'} \right.$ $\frac{P_{entree}}{P_{sortie}} = -1$ $m' = -m$



TRANSFORMATEUR EN RÉGIME SINUSOÏDAL ETABLI (RSE)

On reprend les équations couplées de la partie précédente mais sans les résistances, qui font parties des réseaux reliés au primaire ou au secondaire :

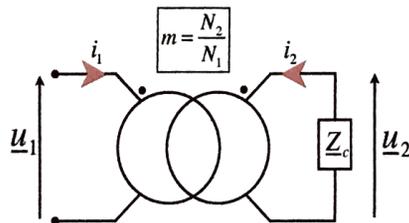
$\underline{u}_1 = j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2$ et $\underline{u}_2 = j\omega L_2 \underline{i}_2 + j\omega M \underline{i}_1$

En régime sinusoïdal, les rapports de transformation en tension et courant restent valides :

$\underline{u}_2 = m \underline{u}_1$ et $\underline{i}_2 = -\frac{1}{m} \underline{i}_1$

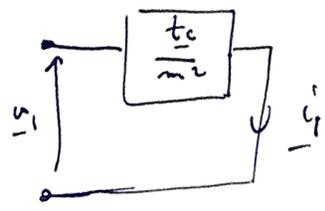
exemple:

Le secondaire est relié à une impédance de charge quelconque :



$\underline{u}_2 = m \underline{u}_1$ $\underline{i}_2 = -\frac{1}{m} \underline{i}_1$ $u_2 = -Z_c \underline{i}_2$ (CG)
 $\underline{u}_1 = \frac{u_2}{m} = -\frac{Z_c \underline{i}_2}{m} = -\frac{Z_c}{m} \left(-\frac{1}{m} \underline{i}_1\right)$ $\frac{u_1}{\underline{i}_1} = Z_r = \frac{Z_c}{m^2}$

L'impédance de charge ramenée au primaire est m^2 fois plus petite!



$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$ $n > 0$

$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 - M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 - M i_1 \end{cases}$ $n < 0$