

J.COURTIN

PSI — LYCÉE V.HUGO

---

# Conversions électro-magnéto-mécaniques

---

## Objectifs :

- Contacteur en translation
- Machine Synchrone (M.S)
- Machine à Courant Continu (M.C.C)

## Pré-requis :

- Circuit magnétique et ferromagnétique linéaire.
- Champ magnétique tournant
- Moteur à courant continu : force de Laplace & couple moteur

**Biblio :** *J'intègre !*

# I - Contacteur électro-magnétique en translation

On cherche ici à déterminer la force maximale produite par un électro-aimant sur un ferromagnétique, par un raisonnement sur l'énergie. Ce raisonnement sera alors généralisé à d'autres systèmes impliquant des corps ferromagnétiques. Ces raisonnements sur l'énergie permettent en effet de montrer que le choix du matériau, en particulier un ferromagnétique linéaire participe aux effets mécaniques obtenus

## 1 - Contacteur électromagnétique en translation

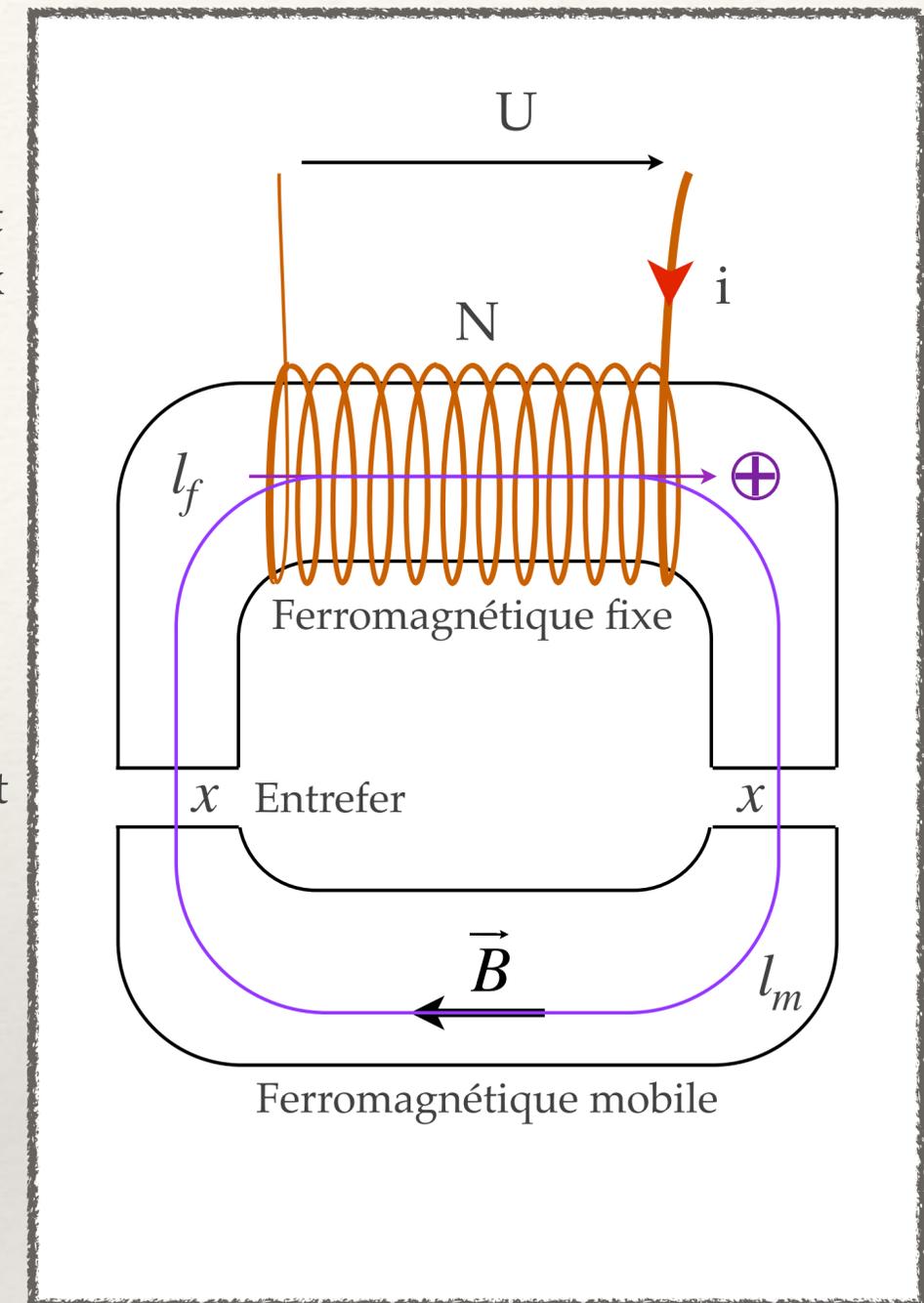
Il s'agit simplement d'un électro-aimant, c'est à dire que l'on réalise un circuit magnétique fermé en enroulant le fil parcouru par un courant  $I$  autour d'un ferromagnétique dit « **fixe** » en forme de fer à cheval , et on re-ferme ce circuit à travers un ferromagnétique dit « **mobile** » comme une carcasse de voiture. Dans notre modélisation, on notera  $x$  l'épaisseur de l'« **entrefer** » que le champ magnétique doit traverser dans l'air.

Intuitivement si le milieu est un ferromagnétique linéaire :

- Sans courant il n'y aura aucun champ magnétique donc pas d'effet et pas de force.
- Avec le courant l'aimantation apparait avec des Nord et Sud en cohérence avec le champ magnétique, de sorte que le Nord attire le Sud et réciproque. La carcasse sera bien attirée, et on peut se douter que cette force « d'origine magnétique » sera maximale lorsque  $x = 0$ .

## 2 - Énergie et force électromagnétique

On admet ici que la force « d'origine magnétique » s'exprime simplement à l'aide du contenu en énergie magnétique totale  $E_{mag}$  :  
On considère que  $x$  augmente vers le bas. Il nous faut donc trouver l'énergie totale  $E_{mag}$  en fonction de l'écartement  $x$  de l'entrefer.  
Celle-ci s'obtient par l'étude du circuit magnétique.



$$F_x = \frac{\partial E_{mag}}{\partial x}$$

## Electro-aimant de ferrailleur :

Les pièces ferromagnétiques s'agglutinent en formant entre elles des chaînes de connections Nord-Sud, pour boucler le circuit magnétique



### 3 - Circuit magnétique

L'énergie se déduit du champ magnétique, qui s'obtient en combinant :

- La circulation du champ d'excitation  $H$  avec le théorème d'Ampère
- La conservation du flux du champ  $B$

Soit une ligne de champ, on note  $l_f$  et  $l_m$  les distances parcourues dans les ferromagnétiques, et  $2x$  celle parcourue dans l'air de l'entrefer.

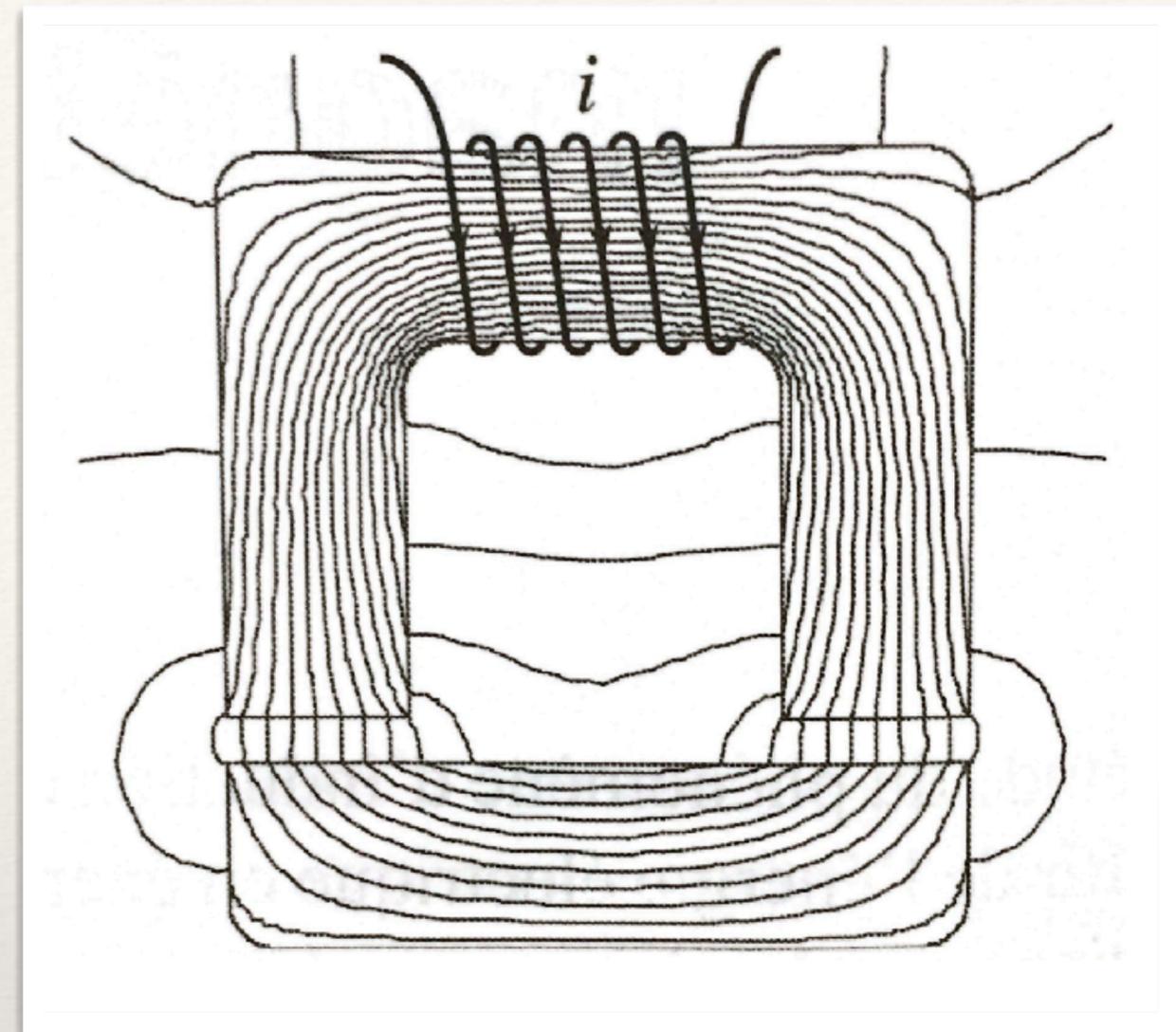
Nous particularisons ici un peu le problème :

- les deux ferromagnétiques sont les mêmes et ont donc le même  $\mu_r$
- leurs sections  $S$  sont les mêmes
- comme toujours les lignes ne sont pas ou peu divergentes ce qui permet d'avoir **le même champ  $B$  en norme le long d'une ligne** si il n'y a pas de changement de milieu, ainsi qu'un **champ magnétique uniforme sur toute section**.

Théorème d'Ampère :

Conservation du flux :

Conclusion sur le champ magnétique :



Lignes de champ réelles

#### 4 - Énergie magnétique et force

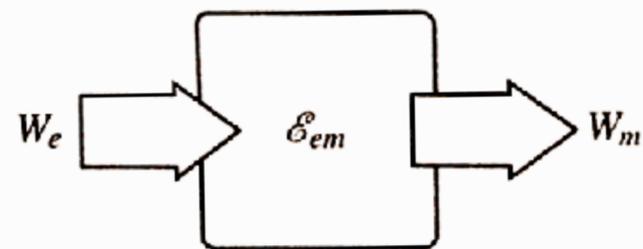
Le champ magnétique dans la matière dépend de l'entrefer  $x$ , donc la densité d'énergie également. Il sera donc ici plus aisé de calculer l'énergie totale par le biais de l'inductance, que par une intégrale de volume. On cherche donc l'inductance  $L(x)$  par le flux, puis l'énergie elle-même  $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$

#### 5 - Application numérique & ODG

## HP - Force électromagnétique

La démonstration proposée dans ce paragraphe n'est pas exigible. Il vise à établir l'expression de force  $F_{em}$  exercée par la partie fixe sur la partie mobile, et de la relier à l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine.

La partie fixe est alimentée par un générateur de tension, qui lui fournit le travail électrique  $W_e$ . L'énergie ainsi reçue a deux destinations ; en négligeant toute forme de perte, une partie de cette énergie est stockée sous forme d'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}_{em}$  dans le ferromagnétique et l'entrefer, le reste est fourni à la partie mobile sous forme de travail mécanique  $W_m$ . On a donc immédiatement le bilan  $W_e = \Delta\mathcal{E}_{em} + W_m$ .



Le terme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$  représente la variation de l'énergie emmagasinée dans le ferromagnétique et les entrefers, sous forme de champ magnétique.

Attendu que  $L$  dépend du temps *via* la position de la partie mobile,  $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dL}{dx} v$  et il vient :

$$p = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} v,$$

où le dernier terme représente la puissance mécanique  $F_{em} v$  de la force électromagnétique  $F_{em}$  qui s'exerce que la partie mobile :

$$F_{em} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial x} \right)_i.$$

La puissance instantanée fournie par le générateur, qui applique la tension  $u$  et délivre le courant  $i$ , vaut, en convention générateur,  $p = ui$ . D'après le loi de Faraday, la tension  $u$  délivrée par le générateur est liée à la f.é.m. induite  $e$  dans les spires de la bobine par :

$$u = -e = + \frac{d\phi}{dt}, \text{ donc } p = i \frac{d\phi}{dt}.$$

Soit  $L(x)$  l'inductance propre de la bobine enroulée autour du circuit magnétique constitué du ferromagnétique fixe, de celui qui est mobile, et des deux entrefers. Dans un ferromagnétique infiniment doux et non saturé, donc linéaire, l'inductance  $L$  relie  $\phi$  à  $i$ ,  $\phi = Li$ ; alors :

$$p = i \frac{d}{dt} (Li) = i \left( L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \right),$$

soit, en scindant en deux le dernier terme :

$$p = \underbrace{Li \frac{di}{dt} + \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt}}_{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)} + \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt}.$$

# II - Machine synchrone

## 1 - Structure de la machine synchrone

La **machine** est composée de deux parties :

- Le stator (partie fixe) qui produit un champ magnétique tournant.
- Le rotor (partie rotative) qui produit un champ fixe équivalent au moment magnétique et qui sera entraîné par le champ tournant.

**Rq :** En **alternateur** ce principe est inversé, le rotor entraîné mécaniquement induit un courant dans le circuit du stator.

### Champ magnétique d'une machine « bipolaire » à pôles lisses :

Nous avons vu en 1ère année qu'on peut créer un champ tournant avec deux bobines. On parle alors de phases statoriques, car pour chaque direction le courant est déphasé.

## 2 - Etude d'une phase seule :

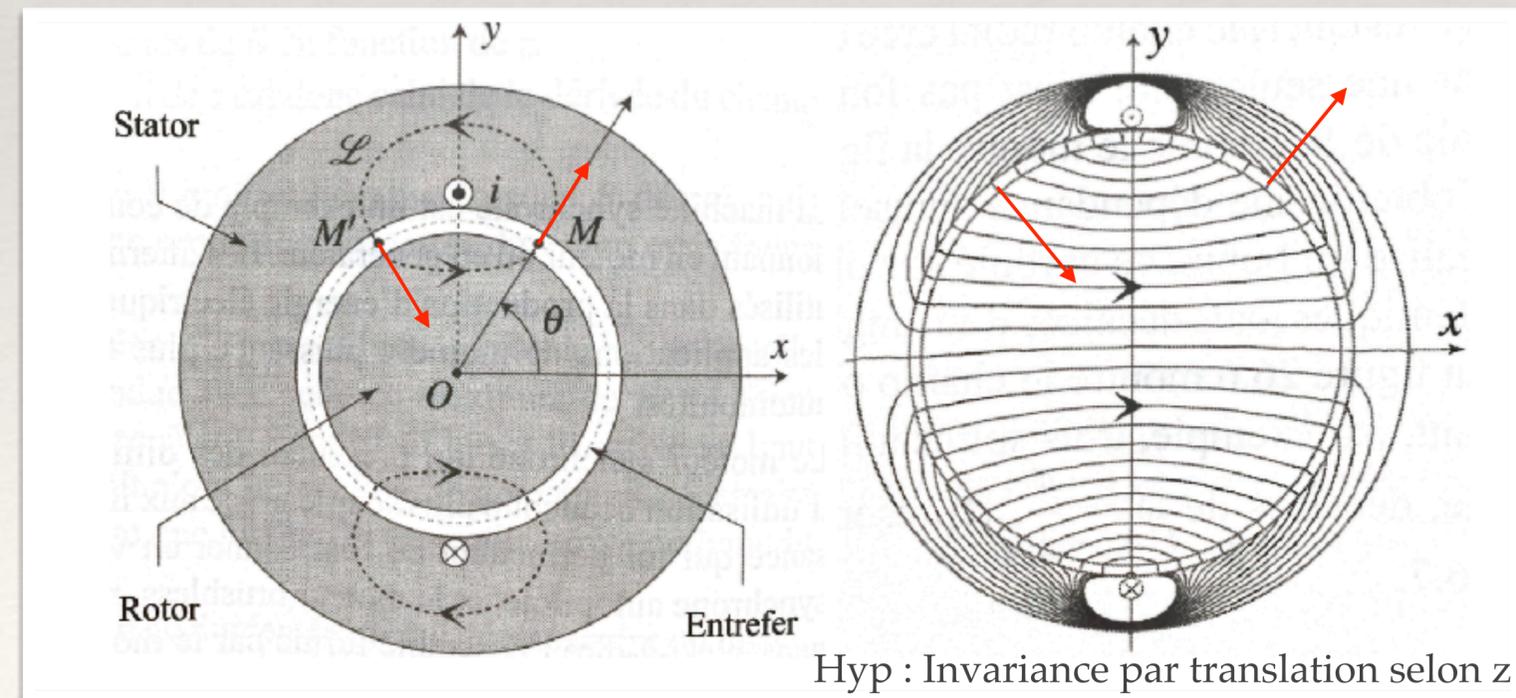
A l'aide d'un bobinage de courant  $i$  on produit ici la composante dont l'axe de référence est (Ox). On voit que l'usage de fer doux dans l'**inducteur** et l'**induit**  $\mu_r \rightarrow \infty$  permet de garantir des **lignes de champ toujours radiales dans l'entrefer**, pourvu que l'**entrefer  $e$**  soit constant : **pôles lisses**.

Le Théorème d'Ampère permet de calculer ce champ :

— Partie descriptive —

Exemple avec 3 phases :

Machine synchrone triphasée



On considère que  $\mu_r \rightarrow \infty$  donc la circulation dans le métal sera négligée devant celle dans l'air.

### 3 - Champ magnétique de phase dans l'entrefer

La combinaison d'un nombre croissant de spires permet, à l'aide du principe de superposition de se rapprocher d'un champ sinusoïdal :

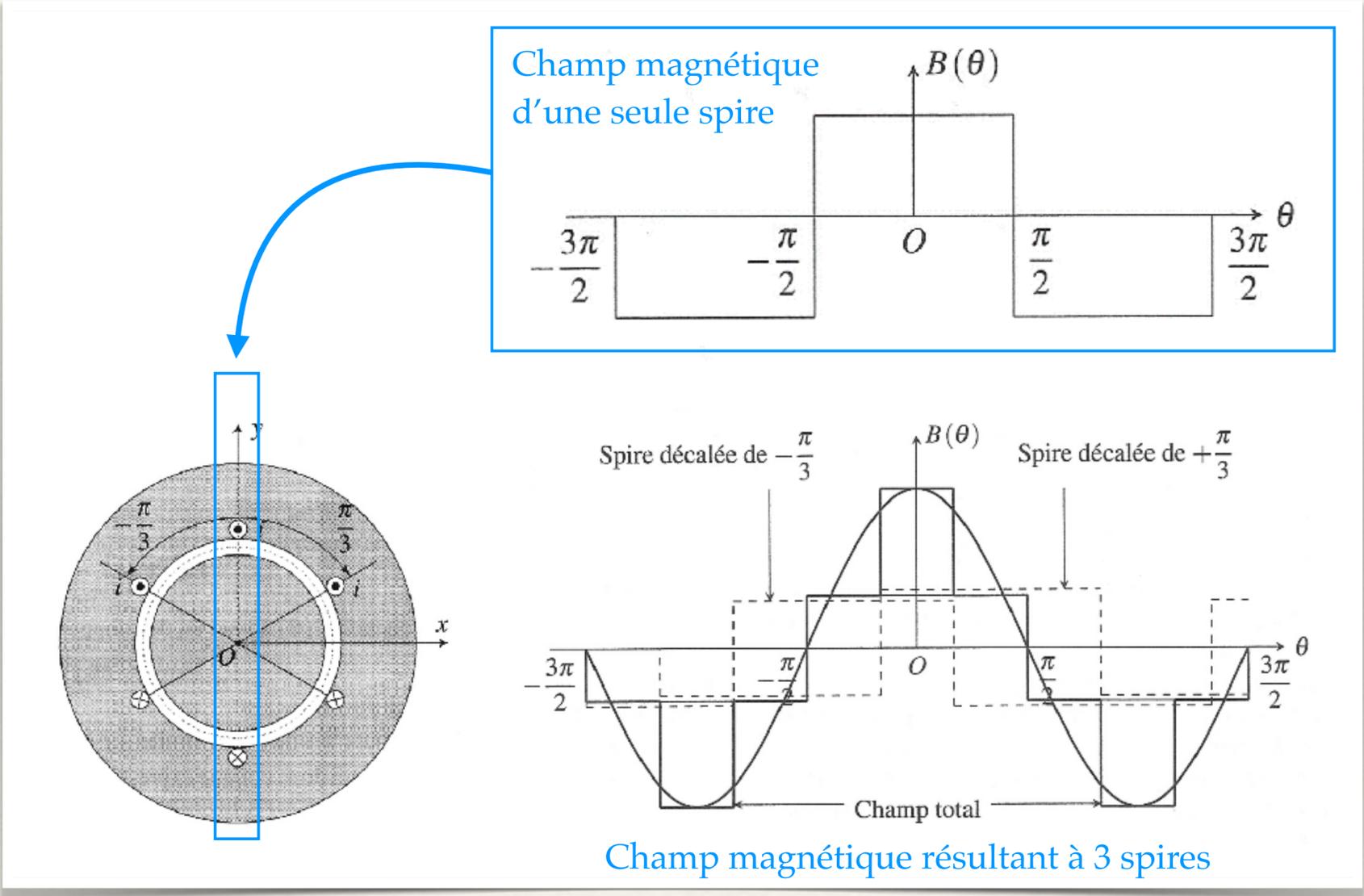
$$\vec{B} = \frac{3\mu_0 i}{2e} \cos(\theta) \vec{u}_r$$

Notez que si les fils sont décalés ils sont en **phase** [même courant]. C'est la conception du bobinage qui permet d'en contrôler la forme

**Conclusion :**

$$\vec{B}_1(\theta) = K_s i_1 \cos(\theta) \vec{u}_r$$

On admet que le **champ magnétique de la phase de référence** peut toujours s'écrire sous cette forme pour des raisons de conception du circuit [dont l'enroulement est complexe].



On montre alors que  $K_s = \frac{2\mu_0 N_s}{\pi e}$  où  $N_s$  est le nombre d'enroulements de la phase.

## 4 - Champ glissant statorique bipolaire

Soit  $i_1(t)$  le courant alternatif de la première phase d'axe de référence (Ox).

- On ajoute à présent une seconde « phase » : circuit identique de courant alternatif  $i_2(t)$  mais dont l'axe de référence est tourné de  $90^\circ$  soit selon (Oy) : **quadrature spatiale**.
- On peut adapter la phase de ce second courant pour créer un champ tournant :  
On montre que  $i_2(t)$  doit être en quadrature (retard) : **quadrature temporelle**.  
[cf 1ère année]

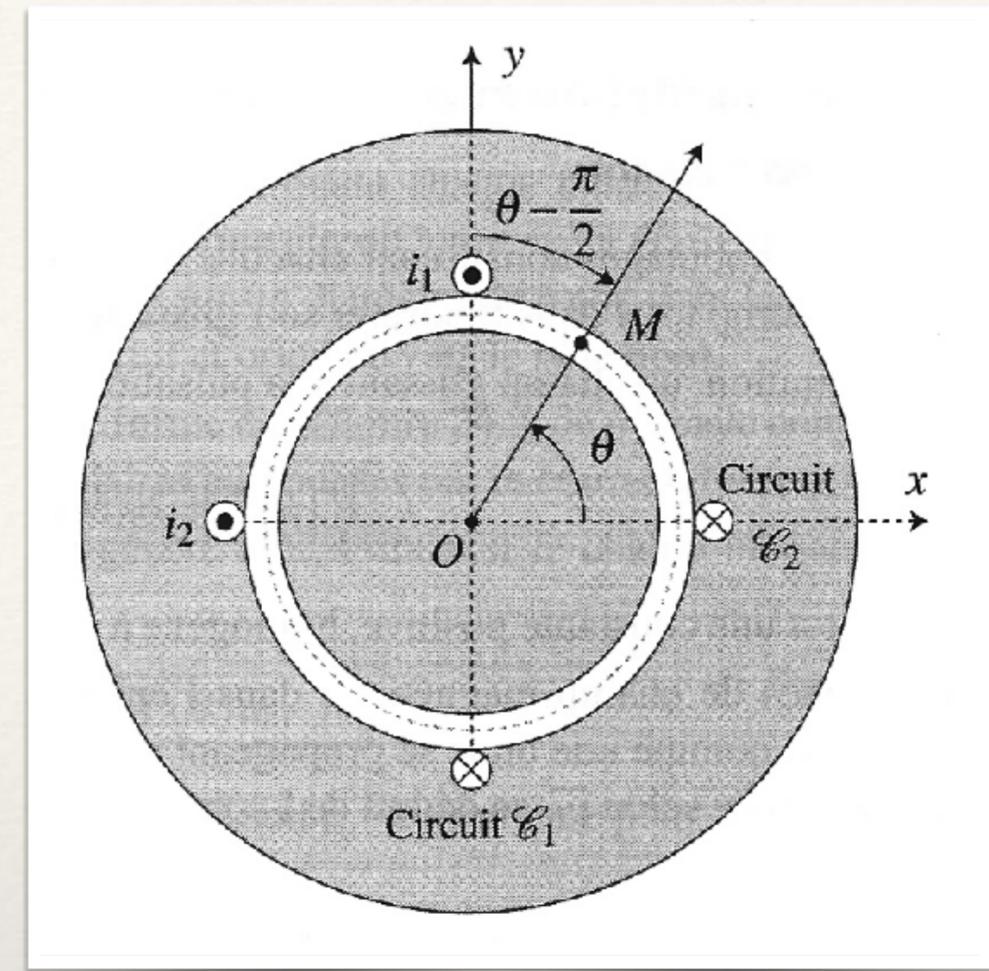


Schéma simplifié des 2 phases

$$\vec{B}_s(t, \theta) = K_s i_0 \cos(\omega t - \theta) \vec{u}_r$$

**Champ glissant statorique**

On voit que ce champ reste sinusoïdal en  $\theta$ , mais la sinusoïde tourne au cours du temps à vitesse angulaire  $\omega$ .

## 5 - Champ rotorique

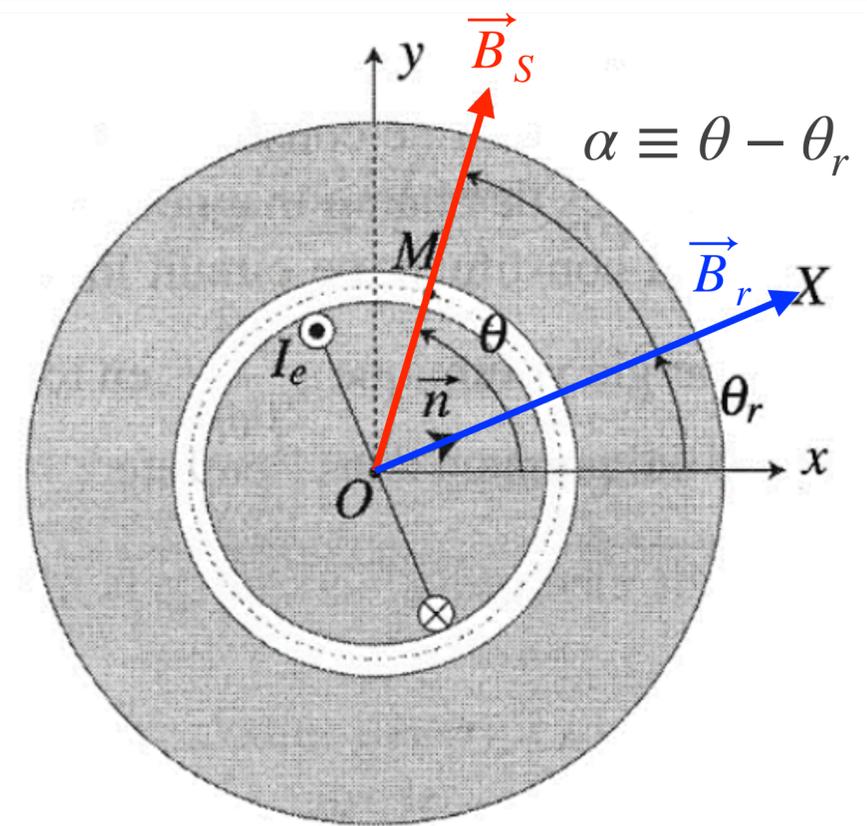
Le champ magnétique du rotor peut être compris par analogie avec celui d'une phase du stator : c'est le **même circuit mais embarqué sur le rotor** et parcouru par un **courant  $i_e$  permanent**. En pratique le champ magnétique produit par un tel courant peut être simplement celui d'un aimant permanent.

On a simplifié ci-contre le circuit rotorique en indiquant sa **direction de référence (OX)** tournée de  $\theta_r$  par rapport à l'axe (Ox) du stator. En effet le rotor est entraîné par le champ magnétique tournant du stator et fait avec l'axe (Ox) un angle  $\theta_r = \theta - \alpha$ . On peut ainsi obtenir son champ magnétique :

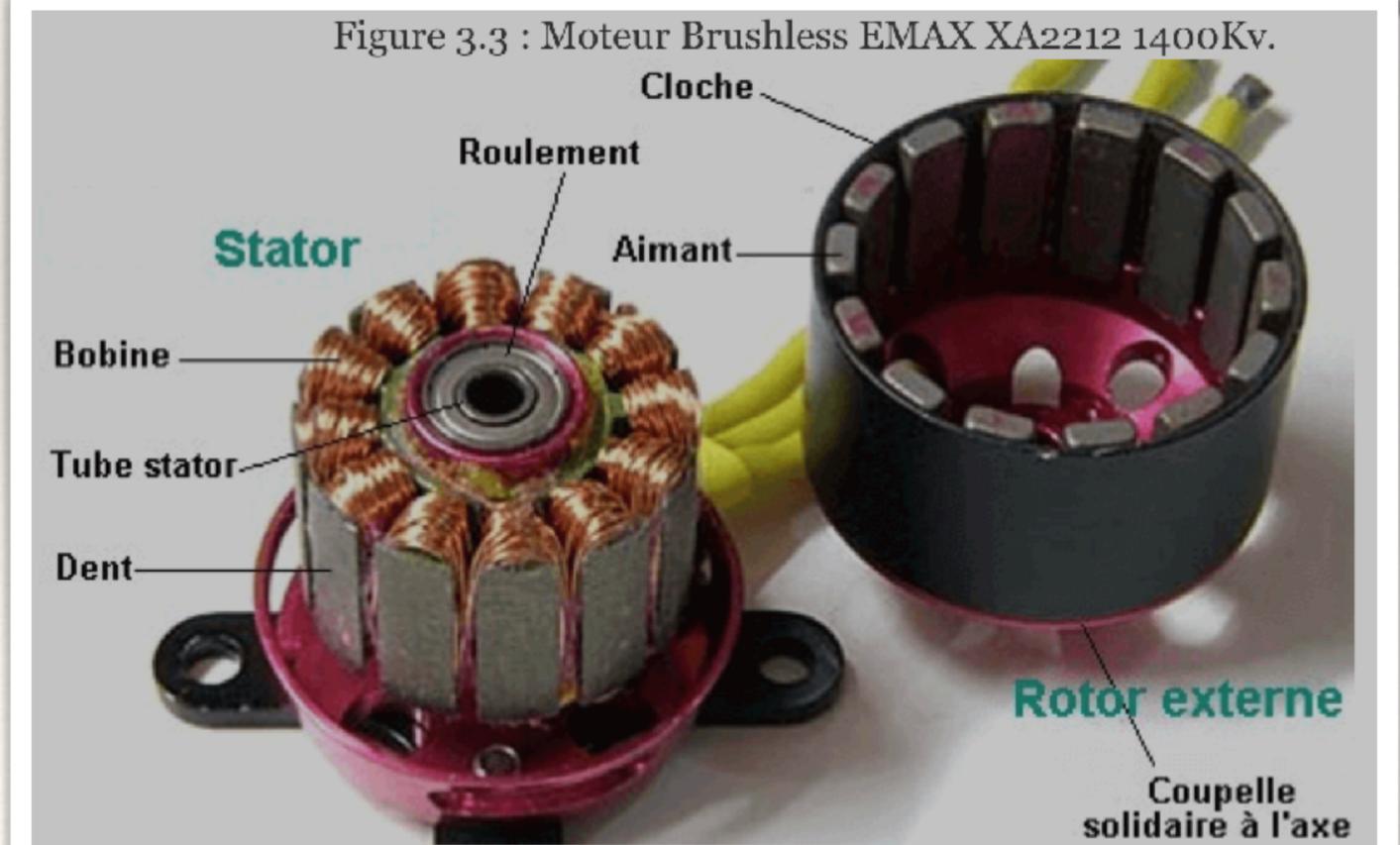
$$\vec{B}_r(t, \theta) = K_r i_e \cos(\theta - \theta_r) \vec{u}_r$$

$$\text{On a ainsi : } K_r = \frac{2\mu_0 N_r}{\pi e}$$

avec  $N_r$  enroulements sur le rotor.



## 6 - Energie magnétique et couple moteur



## 7 - Condition de synchronisme

La condition de synchronisme impose notamment que la fréquence de rotation soit égale à la fréquence des courants alimentant les phases du stator :  $\omega = \Omega$ . Or si celle-ci est celle du réseau électrique 50Hz, le rotor ne va pas se mettre en rotation instantanément et a même de bonnes chance de ne recevoir qu'un couple nul en moyenne, ou trop faible pour entrer en mouvement.

**Il peut-être nécessaire de baisser cette fréquence pour accompagner la mise en mouvement : motrice TGV.**

Cela nécessite des onduleurs de fréquences réglables. C'est également le cas des moteurs de drones ou autres engins radio-commandés : une carte d'électronique de puissance permet de faire varier la fréquence des phases du stator.

## 8 - Modèle électrique de l'induit

### Hypothèses :

- Le synchronisme est établi
- De fait pas d'induction du champ statorique dans le rotor
- pas d'inductance mutuelle aux circuits statoriques  
[bobines orthogonales]

- Le rotor tourne devant les circuits du stator :
- Le rotor induit des fem dans les circuits statoriques
- La quadrature spatiale devient temporelle sur E1 et E2.

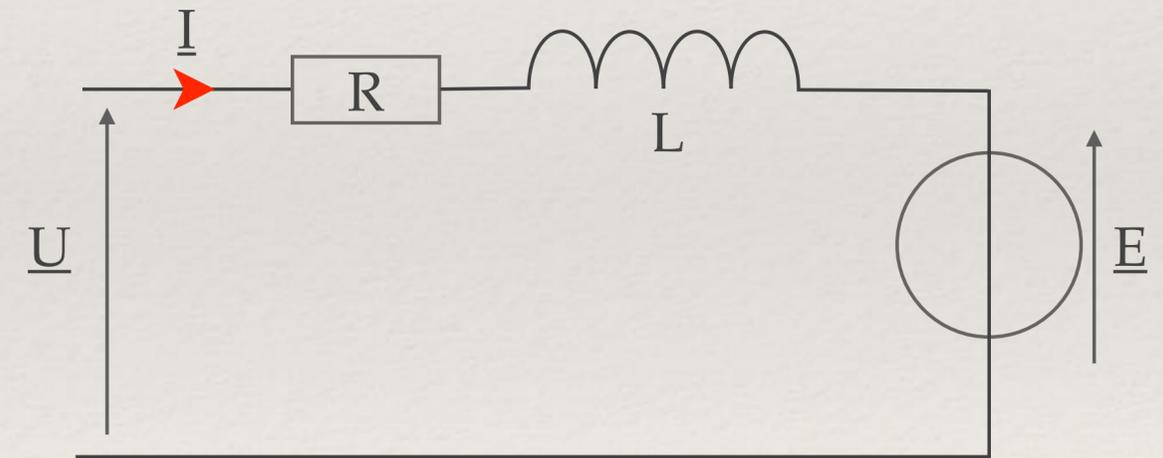
### $\alpha$ - Équation électrique

LDM :

Faraday  $\rightarrow$  f.e.m :

Flux :

Eq° électrique :



Modèle électrique d'une phase

## HP : Flux induits par le rotor dans les circuits statoriques

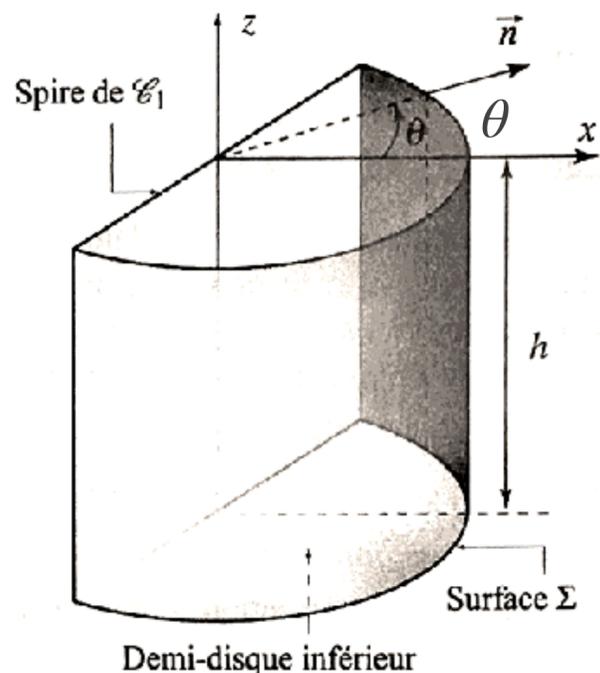
Toutes ces grandeurs sont sinusoïdales de pulsation  $\omega$ . En effet, le champ magnétique créé par le rotor, en un point  $M$  de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$ , a pour expression

$$\vec{B}_r = k'I_e \cos(\theta - \theta_r) \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \theta_r = \omega t - \alpha, \quad \text{soit} \quad \vec{B}_r = k'I_e \cos(\theta + \alpha - \omega t) \vec{u}_r.$$

Ce champ engendre dans une spire du circuit  $\mathcal{C}_1$ , de normale conjointe  $\vec{u}_x$ , le flux noté  $\phi_{e1}^1$ . Le champ magnétique étant à flux conservatif, le calcul de  $\phi_{e1}^1$  peut s'effectuer à travers une surface quelconque qui s'appuie sur le contour rectangulaire de la spire.

Puisque  $\vec{B}_r$  est connu dans l'entrefer, on choisit la surface  $\Sigma$ , représentée en figure égale au demi-cylindre situé dans l'entrefer qui s'appuie sur la spire, de rayon  $R$ , compris entre  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de hauteur  $h$  égale à celle du rotor.

L'élément de surface en un point de  $\Sigma$  de coordonnées  $(R, \theta, z)$  vaut  $d\vec{S} = R dz d\theta \vec{u}_r$ . On complète ce demi-cylindre par deux demi-disques orthogonaux à l'axe  $(Oz)$ , situés aux deux extrémités du rotor, à travers lesquels le flux du champ magnétique est nul. Pour plus de clarté, seul le demi-disque inférieur est représenté sur la figure. Il vient ainsi :



Calcul de  $\phi_{e1}^1$ .

Attention :  $\int j'$

Les notations ne sont pas tout à fait celles du cours

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\begin{aligned} \phi_{e1}^1(t) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k'I_e \cos(\theta - (\omega t - \alpha)) R h d\theta \\ &= k'I_e R h \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \omega t\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha - \omega t\right) \right), \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \phi_{e1}^1 = 2k'I_e R h \cos(\omega t - \alpha).$$

Le flux traversant une spire du circuit  $\mathcal{C}_2$  s'obtient de la même manière en choisissant un demi-cylindre semblable compris entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{e2}^1(t) &= \int_0^{\pi} k'I_e \cos(\theta - (\omega t - \alpha)) R h d\theta \\ &= k'I_e R h (\sin(\pi - (\omega t - \alpha)) + \sin(\omega t - \alpha)) \\ &= 2k'I_e R h \sin(\omega t - \alpha), \end{aligned}$$

$$\text{soit} : \quad \phi_{e2}^1 = 2k'I_e R h \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Chacun des circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  comportent  $N_s$  spires, donc le flux total traversant chaque circuit a pour expression :

$$\phi_{e1} = N_s \phi_{e1}^1 \quad \text{et} \quad \phi_{e2} = N_s \phi_{e2}^1.$$

$\beta$  - Représentation de Fresnel

$$\underline{u}_1 = R_1 \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1 + \underline{E}_1$$

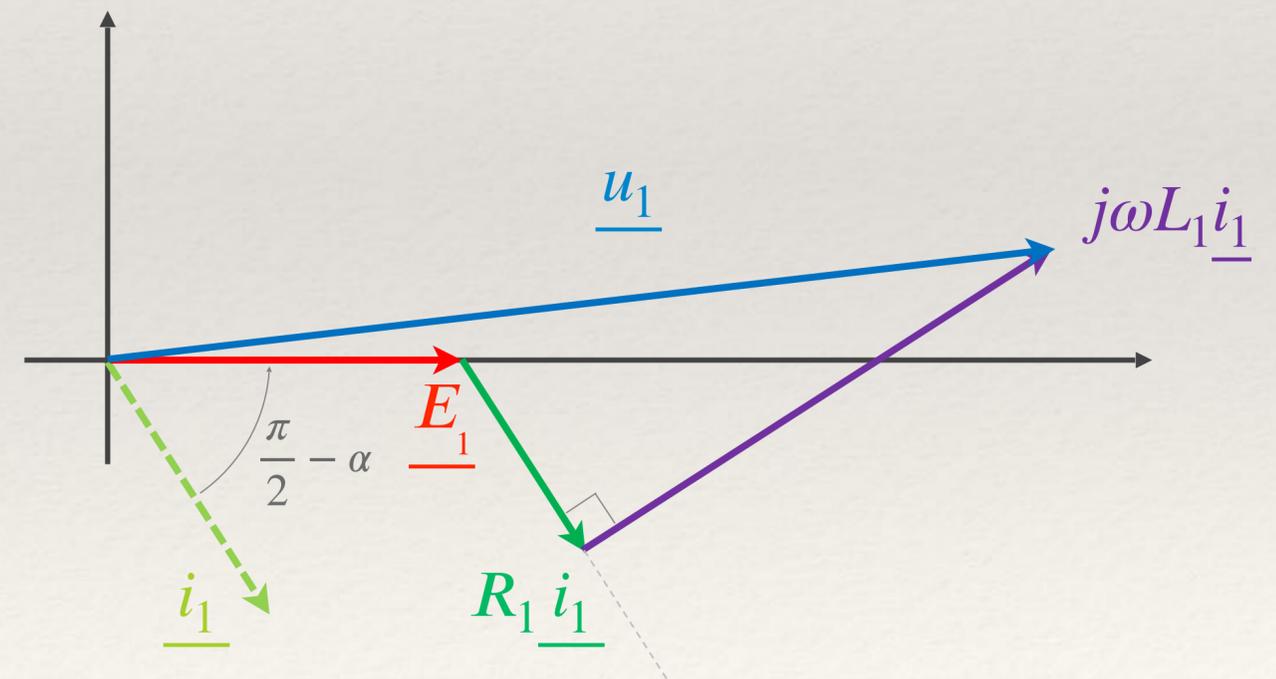
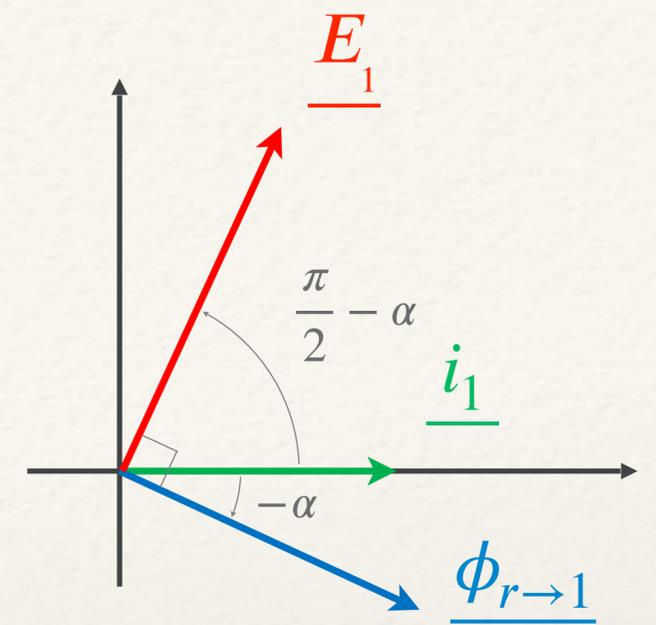


Diagramme de Behn-Eschenburg

## 8 - Fonctionnement réversible

# III - Machine à Courant continu

## 1 - Structure de la machine à courant continu

La **machine** est composée de deux parties :

- Le **stator** (inducteur fixe) qui produit un champ magnétique bipolaire fixe : du nord vers le sud.
- Le **rotor** (induit rotatif) qui produit un champ magnétique bipolaire fixe, mais qui sera en permanence orthogonal à celui du stator pour maximiser le couple.

Le rotor est alimenté malgré sa rotation par le biais de **collecteurs-balais** de courant.

**Rq :** En **alternateur** ce principe est inversé, le rotor entraîné mécaniquement induit un courant dans le circuit du stator. C'est le principe de la dynamo de vélo.

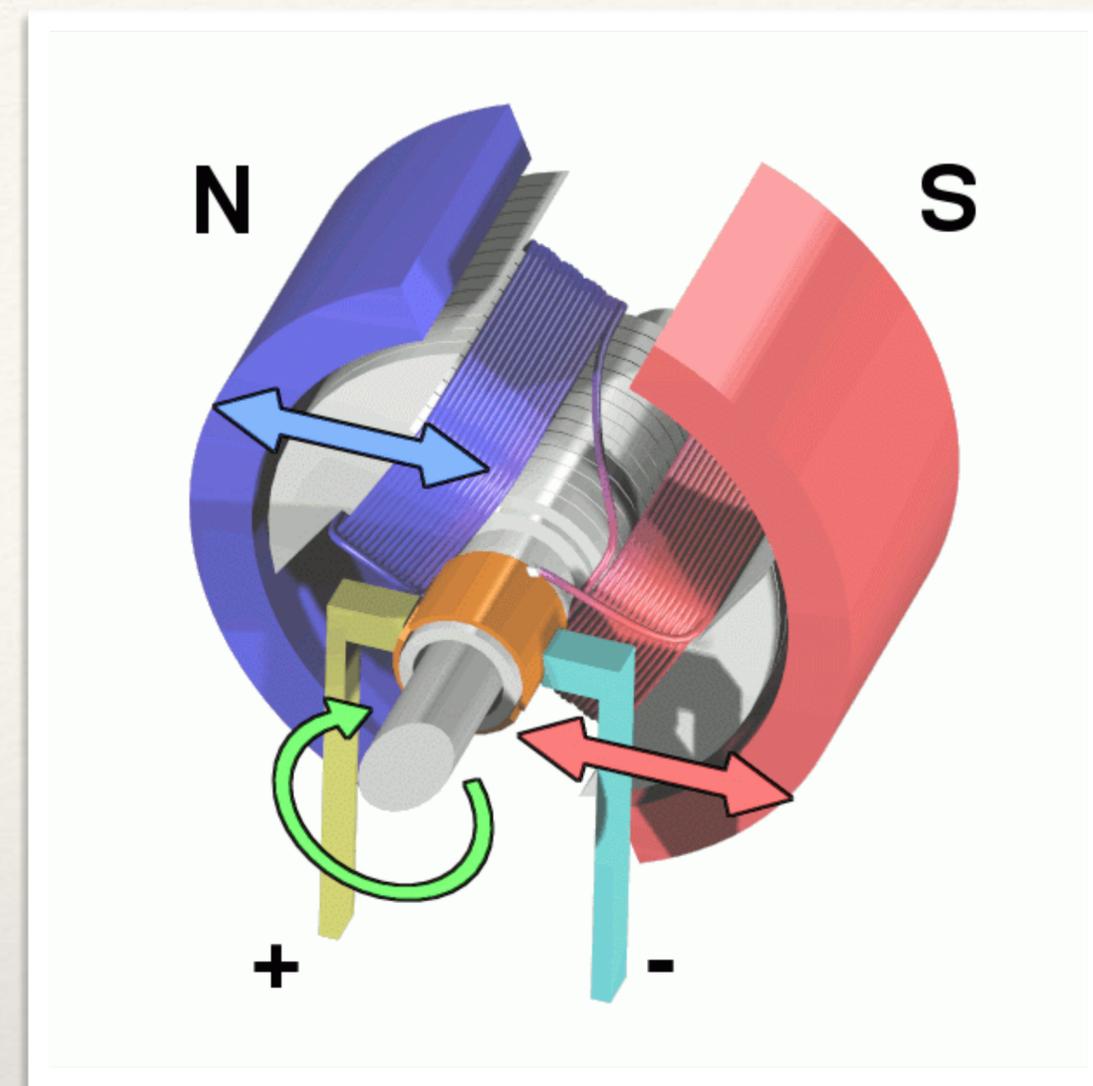
Tous les matériaux sont supposés être des ferromagnétiques linéaire tels que  $\mu_r \longrightarrow \infty$ .  
La machine est à pôles lisses c-à-d avec un entrefer d'épaisseur constante  $e$ .

Le moteur à courant continu présente bien des avantages :

- il suffit de changer le sens du courant pour tourner à l'envers

Il n'est toutefois pas dépourvu d'inconvénients :

- En générale sa fabrication est assez couteuse
- Il y a de l'usure  $\longrightarrow$  collecteurs-balais qu'il faut changer



## 2 - Circuits statoriques

Le courant permanent dans le stator et la perméabilité infinie permettent d'obtenir dans l'entrefer un champ magnétique radial mais d'axe polaire horizontal (Ox)

Le circuit est constitué de 2 bobinages série produisant un champ magnétique :

- du nord vers le sud pour le rotor : avec un champ radial dans l'entrefer.
- du sud vers le nord dans le corps du stator ce qui referme le circuit magnétique

On parle alors de **machine bipolaire**

On note le rôle fondamental du ferromagnétique dans la réalisation de ces lignes de champ, en particulier du champ radial de l'entrefer.

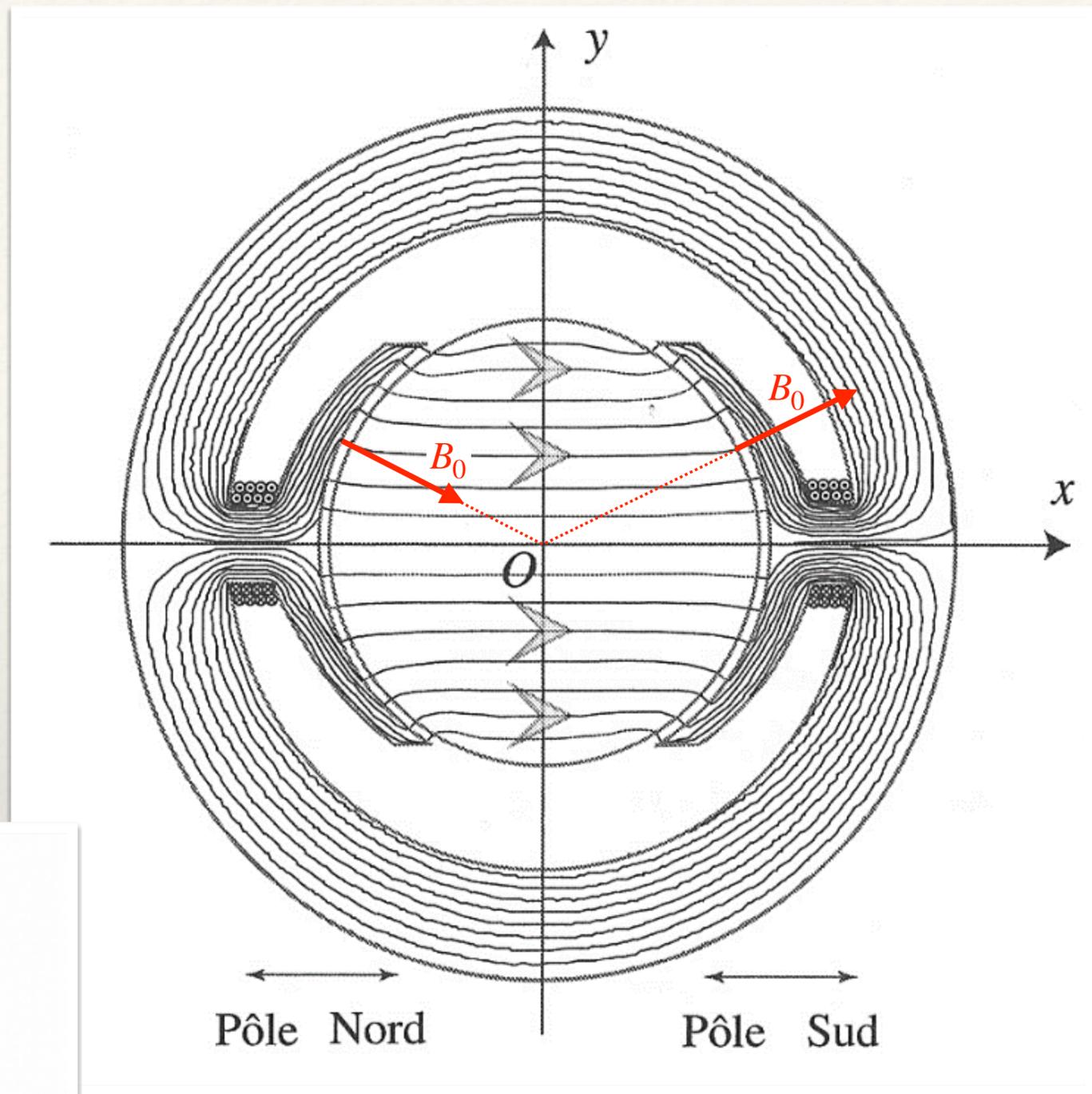
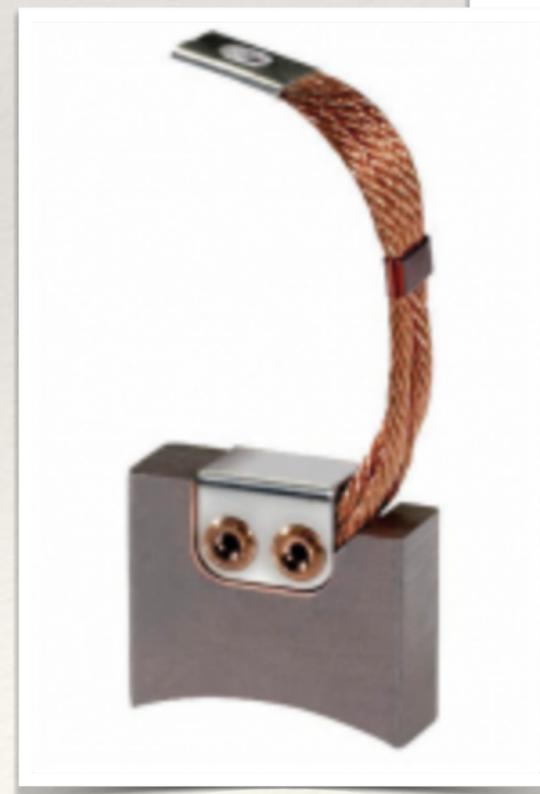
On peut ainsi modéliser le champ de l'entrefer par :

$$\vec{B}(M) = \pm B_0 \vec{e}_r$$

## 3 - Circuits rotoriques

Le circuit rotorique ci-après est embarqué sur une cylindre en rotation. Pour y amener le courant sans enrôler les fils, celui-ci est transmis par des collecteur-balais ou « charbon » → car ce sont des contacteurs en **graphite**, à la fois conducteur électrique et lubrificateur mécanique.

Il y en a au moins 2 : entrée & sortie du courant et sont sujet à l'usure car un ressort vient le pousser contre le rotor en rotation. On doit donc les remplacer régulièrement.

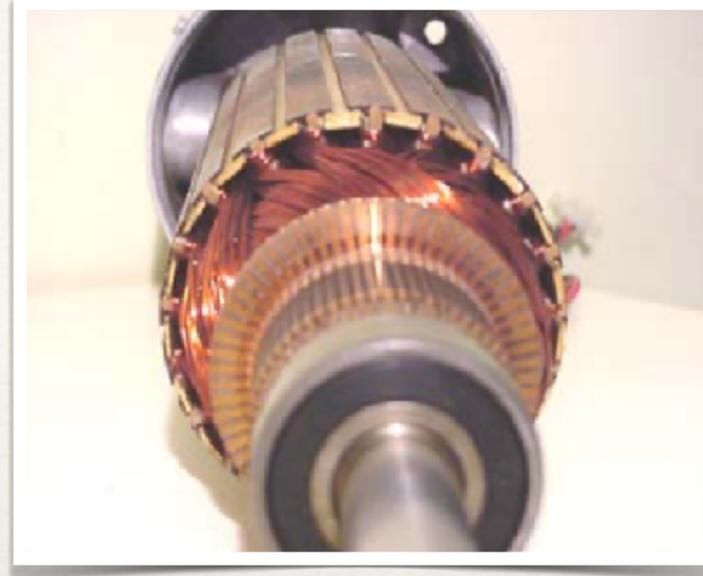


Simulation numérique du circuit statorique

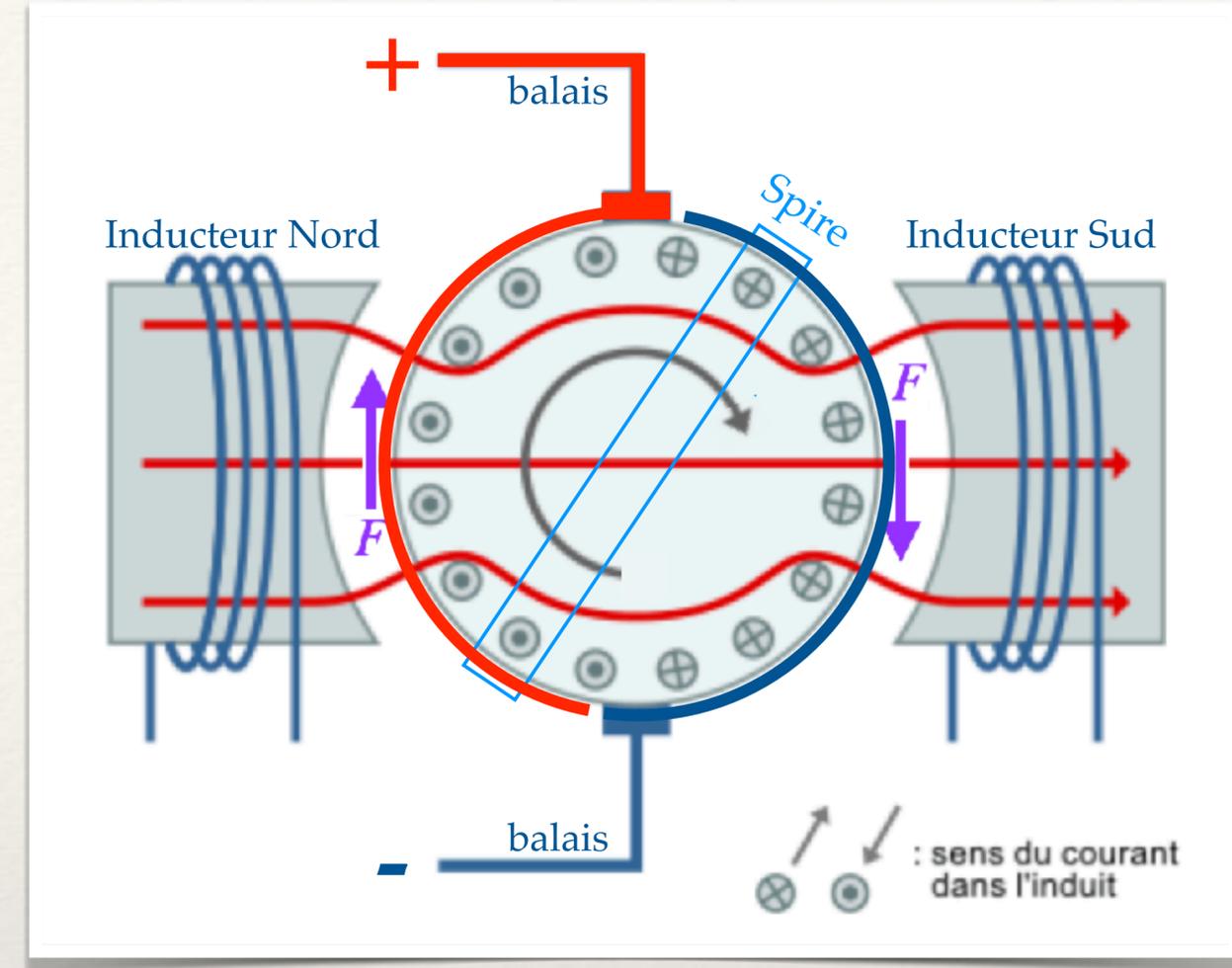
La structure réelle du rotor est complexe et utilise ses propriétés de ferromagnétique pour produire l'équivalent du champ bipolaire du stator mais orthogonale à ce dernier.



Moteur de jouet ... à 3 «encoches»

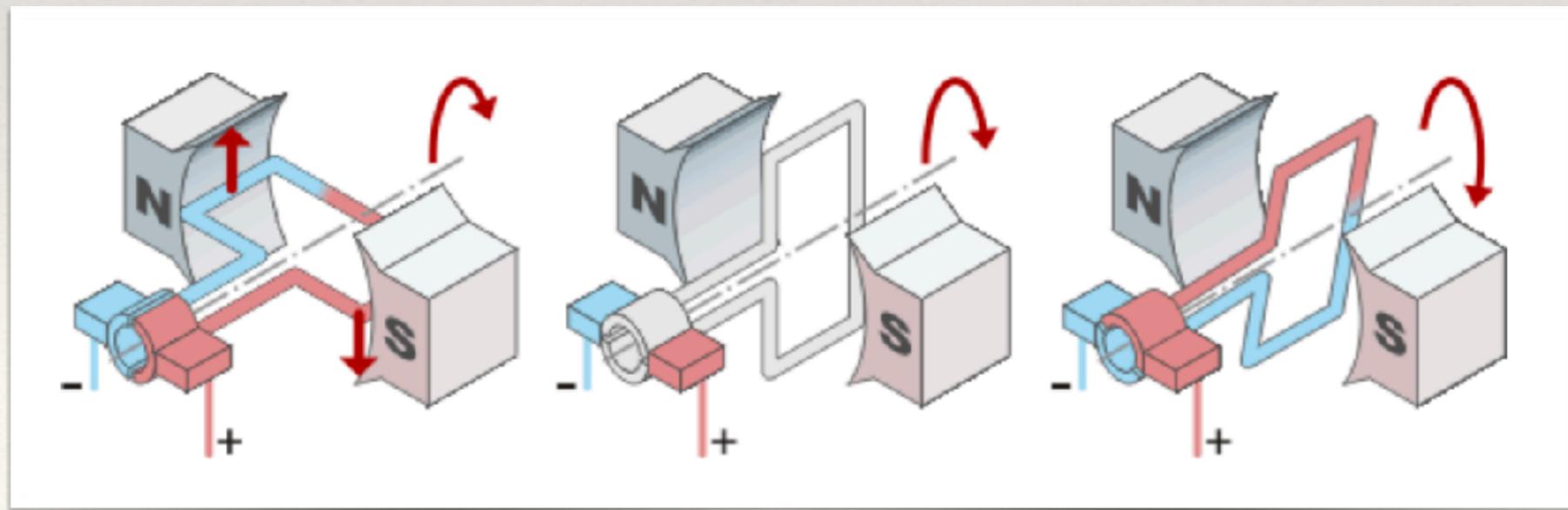


Moteur industriel ... 24 encoches



Notre modèle «équivalent» du rotor sera composé d'une multitude de spires rectangulaires enroulées autour du rotor dans les plans diamétraux contenant l'axe (Oz) de rotation.  
[cf - 1ère année] Le sens du courant dans ces fils dépend du contact avec les collecteur-balais.

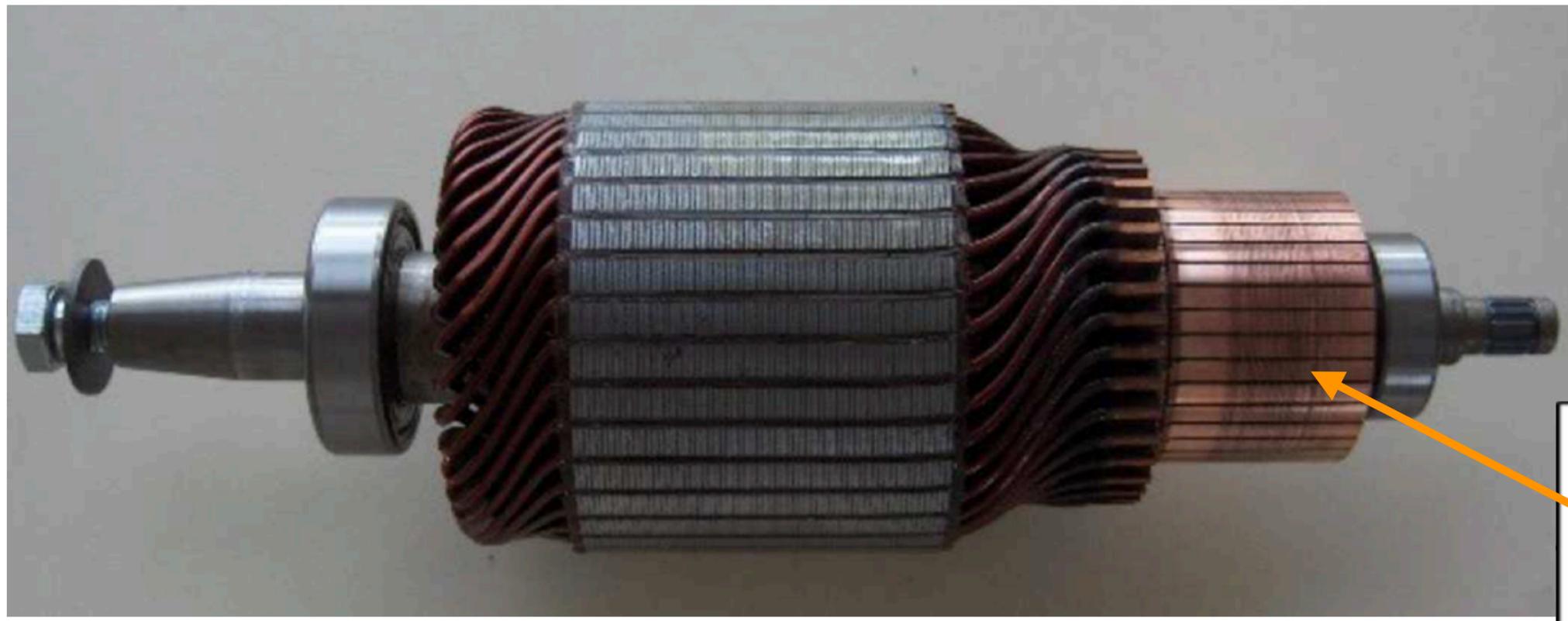
Soit pour une seule spire :



Pour l'ensemble des spires, les balais au « plus » entrent en contact avec la moitié gauche des spires où entre le courant. Alors que le balais au « moins » fait ressortir le courant sur le côté droit.

Le courant d'alimentation du rotor  $I_r$  est constant.  
La répartition des courants ne change pas avec la rotation du moteur.

Un vrai travail d'orfèvre ...



Le collecteur est constitué de lames de cuivre isolées entre elles. L'isolant est de la mica. L'ensemble balais d'alimentation + collecteur assure la liaison entre les conducteurs tournants et la partie fixe.



Encoche du rotor qui accueille les sections de l'enroulement d'induit.

Tête de bobine qui est en dehors du champ inducteur actif. Sur les moteurs de forte puissance les têtes de bobine sont fretées à cause de la force centrifuge.

**Fig.6 : Encoches du rotor d'une machine à courant continu**

On peut rapidement se convaincre que le champ résultant de l'ensemble des spires , c-à-d la superposition des champs magnétiques produits par les N spires :

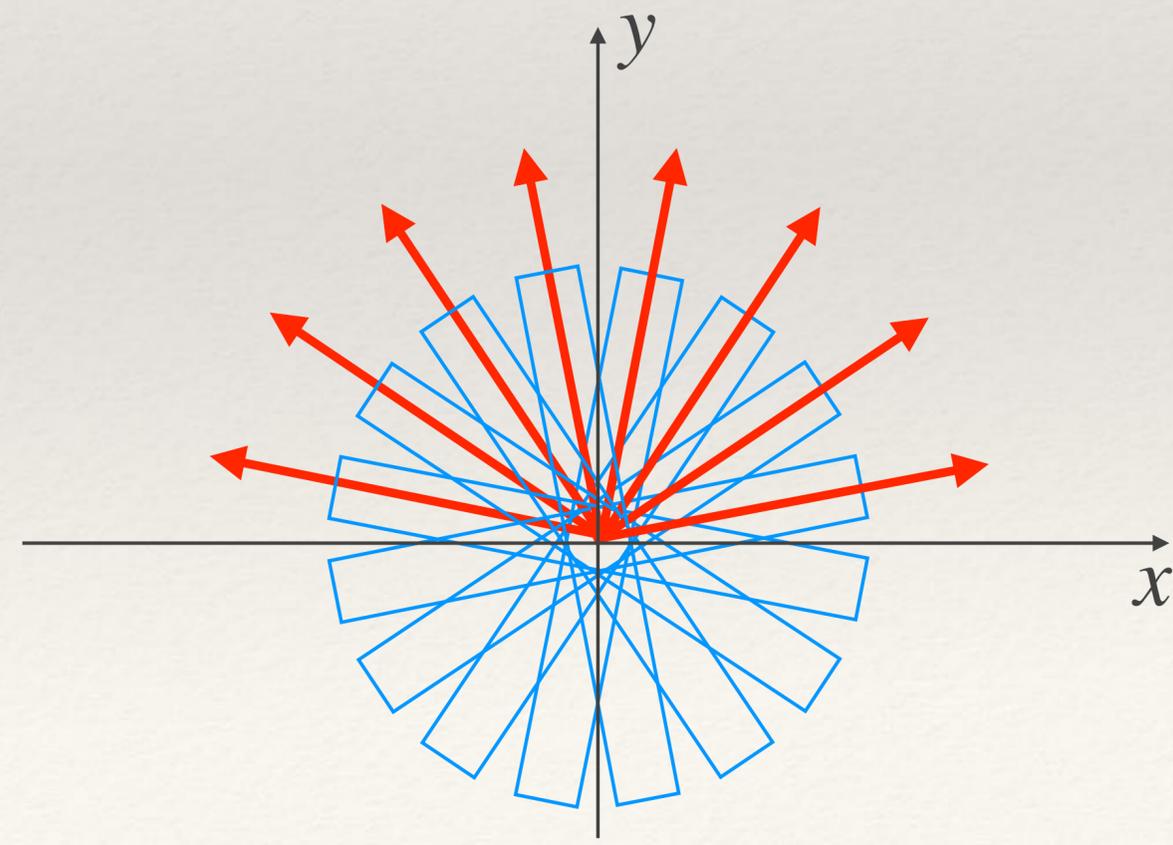
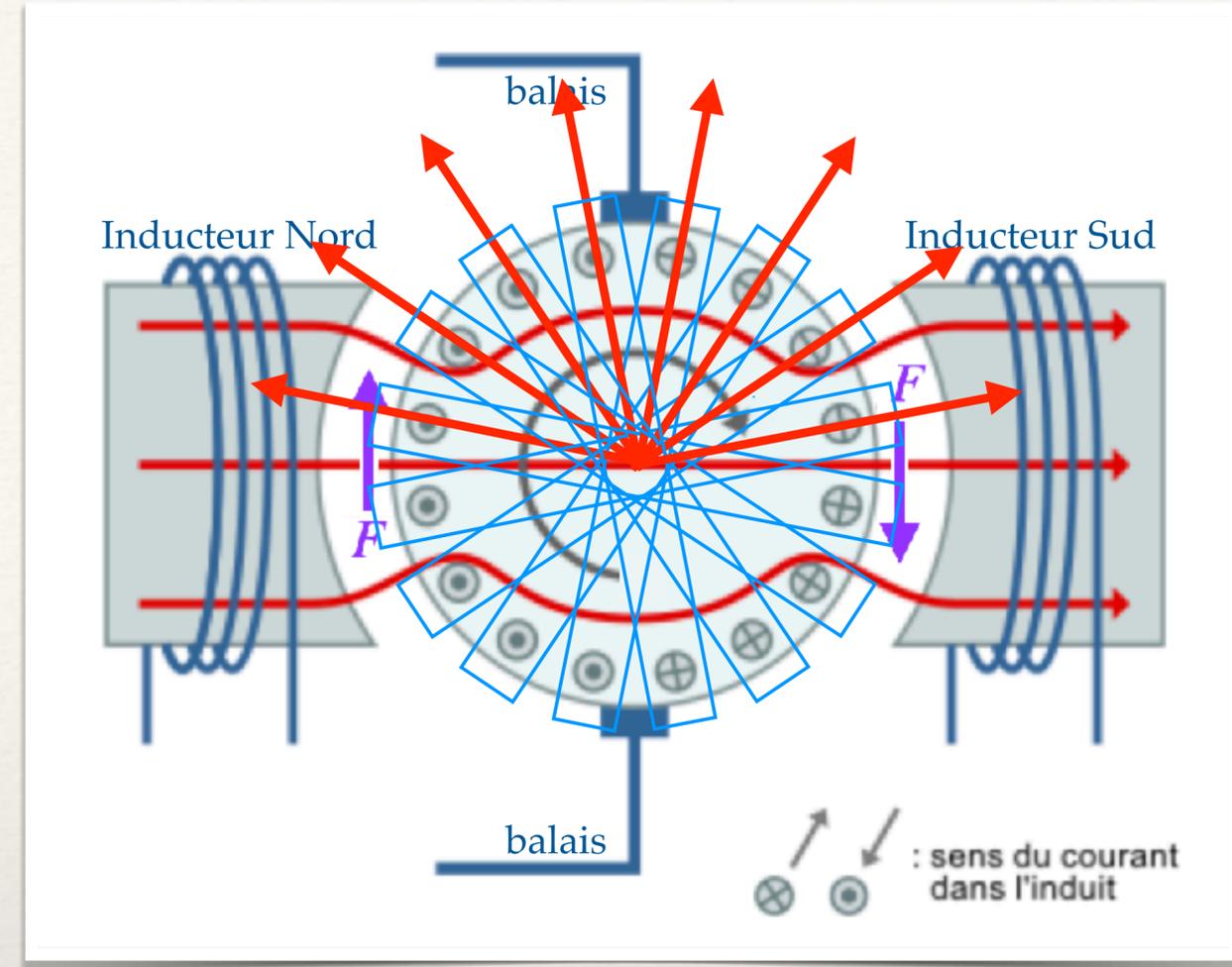
- Est dirigé selon + (Oy) lorsque le courant est positif.
- Quelle que soit la position du rotor (grâce aux collecteurs-balais).
- Son sens s'inverse quand on inverse le courant, ce qui inverse la rotation du moteur.
- Cette bipolarité sera d'autant plus précise que le nombre de spires est grand.

Rq : Le calcul exact du champ résultant dans l'entrefer [HP] est complexe et dépend de la forme exacte des bobinages. De plus les spires étant en rotation dans le champ fixe du stator, elles sont soumises à des effets d'inductions qui ajoute une fem au circuit rotorique. Nous admettons ici que les enroulements sont conçus pour que la fem induite et finalement le champ magnétique résultant soient indépendants du temps.

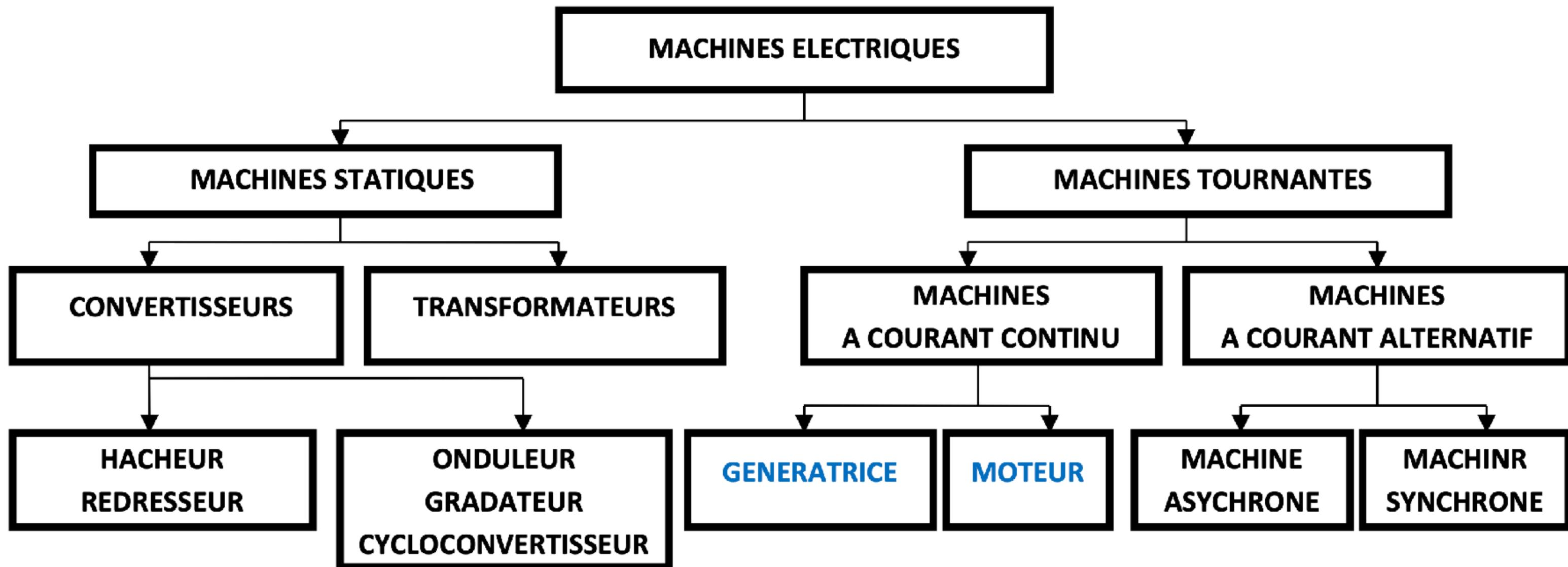
Le plan (yOz) est donc plan d'anti-symétrie des courants et le plan (xOz) plan de symétrie  
⇒ l'axe (Oy) sera donc l'axe polaire du champ rotorique permanent.

Cette situation est donc très semblable à celle de la machine synchrone avec l'avantage qu'ici l'angle entre l'axe statorique et l'axe rotorique vaut toujours  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  ce qui maximise le couple et permet de choisir le sens de rotation avec le sens du courant.

Rq : Noter qu'ici, on ne connaît pas exactement l'expression du champ rotorique de l'entrefer En fonction de l'angle  $\theta$ . Mais le résultat sera le même que pour la machine synchrone à une constante près dite « constante géométrique » qui dépende de la géométrie des enroulements.



	MOTEUR SYNCHRONE	MOTEUR À COURANT CONTINU
ALIMENTATION ÉLECTRIQUE	AC (pulsation $\omega$ )	DC
INDUCTEUR	Rotor	Stator
INDUIT	Stator	Rotor
COUPLE	$\Gamma = \phi_0 I_r \sin\alpha$	$\Gamma = \phi_0 I_r$
VITESSE DE ROTATION DU ROTOR	$\Omega = \omega$	$E_c = \phi_0 \Omega$
DÉMARRAGE	Aide mécanique extérieure pour arriver au synchronisme	Spontané ( $\Gamma \neq 0$ à $\Omega = 0$ )
STABILITÉ EN FONCTIONNEMENT	Décochage dès que $\Omega \neq \omega$	$\Omega$ reste bornée à charge mécanique nulle
ECART ENTRE $\vec{B}_s$ ET $\vec{B}_r$	$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
COMMANDE DE VITESSE ÉLECTRONIQUE	Onduleur (+ asservissement en pulsation)	Hacheur
FONCTIONNEMENT RÉVERSIBLE	Alternateur	Génératrice



**Fig.1 : Classification des machines électriques**

Figure 3.3 : Moteur Brushless EMAX XA2212 1400Kv.

