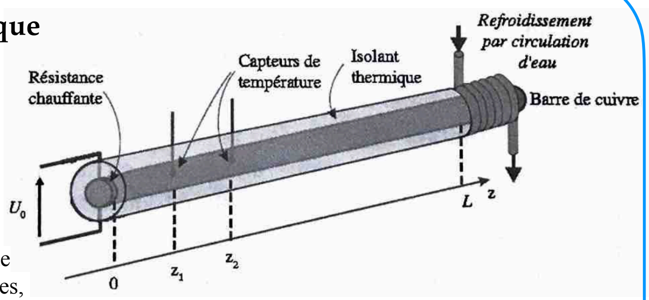
TD - DIFFUSION DE THERMIQUE

Exo 1 — Diffusion thermique dans une barre cylindrique

[Centrale - Supelec]



On cherche à étudier le phénomène de diffusion thermique dans une barre cylindrique de cuivre de diamètre d = 15 mm et de conductivité thermique λ. A cet effet on creuse une cavité à l'extrémité de la barre pour y placer une résistance chauffante $R_c = 8\ \Omega$.

Cette résistance est alimentée par un générateur délivrant une tension continue $U_0 = 6\ V$. Afin de rendre les pertes thermiques par la face latérale négligeables, le barreau de cuivre est isolé latéralement par une matière plastique de conductivité thermique suffisamment faible par rapport à celle du cuivre. La mesure de température se fait par l'intermédiaire de petits capteurs logés dans des puits creusés latéralement en divers points du cylindre conducteur. Un dispositif de refroidissement par circulation d'eau est placé à l'autre extrémité de la barre de telle sorte que la température du cuivre y soit égale à 20°C .

On se place en régime stationnaire et on suppose que la température, considérée uniforme dans une section droite de la barre, ne dépend que de la position z.

a - Quel est à priori la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{\nabla}(T)$?
Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_q$.
Préciser la signification des différents termes ainsi que leur unité respective.

b - Exprimer la puissance fournie par l'alimentation continue à la résistance chauffante.
En supposant que cette puissance est intégralement transférée à la barre située dans la partie z > 0, exprimer $\vec{j}_q(0)$ en fonction de R_c , U_0 et d.

c - Montrer que $\vec{j}_q$ est uniforme dans la barre. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température T(z).

d - Exprimer littéralement T(z) en fonction des données ci-dessus et de T(L).
Les deux capteurs de température placés en $z_1 = 8$ cm et $z_2 = 16$ cm indiquent T_{p1} = 46, 4°C et T_{p2} = 41,4°C.
Donner l'expression de la conductivité thermique du cuivre λ et calculer sa valeur numérique.

Exo 1′ — Barre cylindrique en régime variable. [suite Centrale - Supelec]

On reprend le dispositif de l'exercice avec la barre cylindrique mais maintenant le générateur délivre une tension U(t), ce qui entraîne une variation temporelle de la température en chaque point du barreau.

Néanmoins, on conserve l'hypothèse d'uniformité de la température dans une section droite de la barre, ce qui permet d'écrire la température en un point sous la forme T(z, t).

e - D'une manière générale, le phénomène de diffusion thermique ne peut faire intervenir que les caractéristiques pertinentes du matériau, à savoir la conductivité thermique λ, la capacité thermique massique à pression constante $c_p = 3801\ J\ kg^{-1}K^{-1}$ et la masse volumique $\rho = 8870\ kg\ m^{-3}$. Montrer à l'aide d'une analyse dimensionnelle, qu'il est possible de construire un coefficient de diffusion D exprimé en m^2s^{-1} à partir de ces trois grandeurs.

f - Le coefficient de diffusion D peut s'exprimer directement en fonction de la résistance thermique linéique r_{th} [résistance thermique par unité de longueur de la barre] et de la capacité thermique linéique c_{th}.
Exprimer r_{th} et c_{th} et donner l'expression de D faisant intervenir ces deux grandeurs.
Pour le cuivre, la valeur numérique du coefficient de diffusion D est D =1,19 $10^{-4}\ m^2s^{-1}$, en déduire la valeur de la conductivité du cuivre λ.

Exo 2 — Résistance thermique d'un assemblage

On considère un système constitué par deux cylindres pleins, de mêmes dimensions, posés l'un sur l'autre sur une de leur face plane. On note respectivement D le diamètre et e la hauteur de chacun des cylindres.

On isole thermiquement les parois latérales des cylindres et l'on suppose que la température n'est fonction que de la seule dimension d'espace perpendiculaire aux faces non isolées [le problème thermique que l'on doit traiter est donc unidirectionnel] .

On suppose qu'il n'y a pas de résistance thermique de contact entre les deux cylindres :
Le cylindre supérieur a une conductivité thermique que l'on note λ_s et le cylindre inférieur une conductivité thermique que l'on note λ_i.
Donner l'expression de la résistance thermique R_{Th} de cet empilement.

Exo 3 — Isolation thermique d'un paroi (mines-pont)

La température intérieure de surface d'une paroi homogène est égale à 15 °C et sa température extérieure de surface à 13 °C.
Son épaisseur est de 10 cm.

a - Calculer le flux thermique qui traverse perpendiculairement un mètre carré de cette paroi en régime permanent :
- si elle est en béton (conductivité thermique du béton $\lambda_b = 1{,}75\ Wm^{-1}K^{-1}$),
- si elle est en plâtre (conductivité thermique du plâtre $\lambda_p = 0{,}50\ Wm^{-1}K^{-1}$),
- si elle est en laine de verre (λ de la laine de verre : $\lambda_l = 0{,}04\ Wm^{-1}K^{-1}$).

b - On réalise une paroi multicouche constituée de 10 cm d'épaisseur de béton, 10 cm de laine de verre et 2 cm de plâtre.
Calculer le flux thermique qui traverse perpendiculairement un mètre carré de cette paroi en régime permanent si la température intérieure est de 20 °C et celle de l'extérieure de 5 °C.

Exo 4 — Résistance thermique d'une sphère. [Oral Mines-Pont]

Un matériau homogène est compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons a et b (a < b), de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ.
La sphère de rayon a est maintenue à la température T_1 et celle de rayon b à la température T_2 , avec $T_1 > T_2$.

a - Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température T.

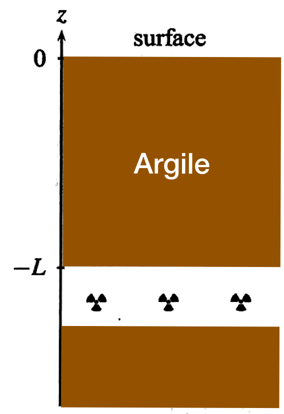
b - Dans le cas du régime stationnaire, déterminer la température en tout point du matériau, le flux thermique transféré entre les deux sphères ainsi que la résistance thermique de ce système.

Exo 5 — Stockage des déchets radioactifs (d'après Centrale)

On étudie de manière extrêmement simplifiée le stockage géologique des déchets radioactifs français, sous une couche argileuse d'épaisseur $L = 50$ m.

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont exothemiques. Ils sont vitrifiés dans des colis qui dégagent une puissance initiale $p_0 = 1$ kW, décroissante dans le temps. N colis sont entreposés à 50 m sous la surface. Ils sont uniformément répartis sur une surface S.

La température dans l'argile est notée $T(z)$. L'argile a une masse volumique ρ, une conductivité thermique $\lambda = 1,5$ SI, une capacité calorifique massique c et une diffusivité thermique D, toutes uniformes.
La température en surface $(z = 0)$ sera prise à $T_0 = 15$ °C.



1. Établir « l'équation de la chaleur » vérifiée par $T(z,t)$. La simplifier dans le cas stationnaire.

2. Quelles sont les unités de ρ, λ, c et D ?

3. Calculer $T(z)$ (attention : l'argile est présente au-dessus, mais aussi en-dessous des déchets). Que vaut $T(-L)$?

4. La température dans l'argile ne doit pas dépasser T_{max} afin que ses propriétés de confinement ne soient pas dégradées. Le stock total de déchets français représente $N = 36000$ colis. Estimer la surface S nécessaire à leur enfouissage, si $T_{max} = 100$ °C.

5. Modéliser électrocinétiquement la situation avec un générateur de courant I_0 et une résistance R. Préciser les valeurs de I_0 et de R et retrouver $T(-L)$.

6. On envisage d'attendre 60 ans avant d'enfouir les déchets, pendant lesquels ils sont entreposés en surface. Pourquoi ?

Exo 6 — Gel d'un lac (d'après École polytechnique)

Données

conductivité thermique de la glace	$\lambda_g = 2,2$ W.K^{-1}.m^{-1}
masse volumique de la glace	$\rho_g = 915$ kg.m^{-3}
capacité thermique massique de la glace	$c_g = 2,1.10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1}
enthalpie massique de fusion de la glace	$L = 3,3.10^5$ J.kg^{-1}
température de l'eau	$T_f = 0$ °C
température de l'air	$T_0 = -30$ °C

On étudie la formation d'une couche de glace en surface d'un lac dont l'eau est à la température $T_f = 0$ °C. L'air atmosphérique est à la température $T_0 < T_f$. Une couche de glace apparaît et se développe progressivement au sein du fluide. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace ; la glace occupe l'espace $z \in [0, \xi(t)]$. Soit $T_g(z,t)$ le champ de température dans la glace. La température est continue à l'interface air-glace : $T_g(z = 0, t) = T_0$.

1. Exprimer la loi de Fourier dans la glace.

2. Établir l'équation de la diffusion thermique, dite « de la chaleur ».

3. Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température dans la glace ? Permettent-elles de déterminer $T_g(z,t)$?

4. Pourquoi l'eau est-elle mise en mouvement par l'avancée de l'interface ? Dans toute la suite, on négligera toutefois la variation d'énergie cinétique de l'eau qui gèle.

5. On désigne par $v_g = \dfrac{d\xi}{dt}$ la vitesse de l'interface glace-eau.
En raisonnant sur un cylindre vertical de section S, exprimer à l'aide de v_g la masse d'eau dm qui s'est transformée en glace entre les instants t et $t + dt$.

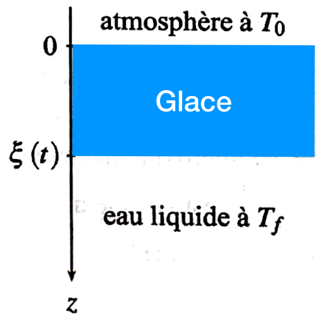
6. Que vaut la variation d'enthalpie de cette masse d'eau entre t et $t + dt$? Effectuer un bilan enthalpique de cette masse d'eau entre ces deux instants pour établir :

$$\lambda_g \left.\frac{\partial T_g}{\partial z}\right)_{\xi(t)} = \rho_g L \frac{d\xi}{dt}.$$

7. v_g est suffisamment faible pour que la distribution de température dans la glace soit à tout instant celle de l'état stationnaire (approximation quasi stationnaire).
Que devient l'équation de la diffusion thermique dans l'approximation quasi stationnaire ? En déduire le profil $T_g(z,t)$ puis le gradient de température au sein de la glace en fonction de $\xi(t)$, T_0 et T_f.

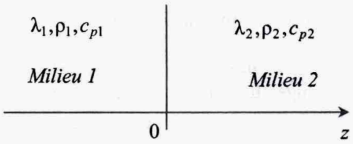
8. Déduire alors de la question **6** une équation différentielle sur $\xi(t)$. Montrer qu'alors $\xi(t) = \sqrt{Dt}$, où D est une constante que l'on explicitera en fonction de λ_g, ρ_g, L, T_f et T_0.

9. Application numérique : calculer D pour $T_0 = -30$ °C puis l'épaisseur de glace formée après un jour, une semaine, un mois, six mois.



Exo 7 — Réflexion et transmission d'une onde thermique

À l'interface de deux matériaux présentant des paramètres thermiques différents, des phénomènes de réflexion et de transmission d'ondes thermiques peuvent se produire. Nous nous limiterons à une analyse monodimensionnelle. Dans ce contexte, nous considérerons trois ondes $\theta_i(z,t)$, $\theta_r(z,t)$ et $\theta_t(z,t)$ respectivement incidente, réfléchie et transmise. En l'absence d'ondes thermiques, la température sera supposée uniforme.



1. Quelle relation lie les fonctions $\theta_i(z=0,t)$, $\theta_r(z=0,t)$ et $\theta_t(z=0,t)$?

2. Traduire la conservation de l'énergie au niveau de l'interface. En déduire une relation entre les trois dérivées spatiales prises en $z=0$.

3. On suppose maintenant que l'onde thermique incidente est de la forme :

$\theta_i(z,t) = A_i \exp\left(-\dfrac{z}{\delta_1}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{z}{\delta_1} + \varphi_i\right)$, avec $A_i > 0$. On admet que les expressions des ondes réfléchies et transmises correspondantes s'écrivent :

$$\theta_r(z,t) = A_r \exp\left(+\frac{z}{\delta_1}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta_1} + \varphi_r\right) \text{ avec } A_r > 0 \text{ et}$$

$$\theta_t(z,t) = A_t \exp\left(-\frac{z}{\delta_2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta_2} + \varphi_t\right) \text{ avec } A_t > 0.$$

Justifier la forme des expressions données ci-dessus.

4. Pourquoi peut-on utiliser la représentation complexe des fonctions sinusoïdales dans le cas du phénomène étudié ici ? Dans ce cas, on notera :

$\underline{\theta}_i(z,t) = A_i \exp\left(j(\omega t - \underline{k}_1 z + \varphi_i)\right) = \underline{A}_i \exp(-j\underline{k}_1 z)\exp(j\omega t)$;

$\underline{\theta}_r(z,t) = \underline{A}_r \exp(+j\underline{k}_1 z)\exp(j\omega t)$ et $\underline{\theta}_t(z,t) = \underline{A}_t \exp(-j\underline{k}_2 z)\exp(j\omega t)$.

5. Écrire deux relations liant les amplitudes complexes $\underline{A}_i$, $\underline{A}_r$ et $\underline{A}_t$ en utilisant les paramètres λ_1, δ_1, λ_2 et δ_2.

6. On introduit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $\underline{r} = \dfrac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i}$ et $\underline{t} = \dfrac{\underline{A}_t}{\underline{A}_i}$.

Déterminer les expressions littérales de ces coefficients en fonction de λ_1, δ_1, λ_2 et δ_2 puis des effusivités $e_1 = \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_{p1}}$, $e_2 = \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_{p2}}$, sachant que $\delta_1 = \sqrt{\dfrac{2\lambda_1}{\rho_1 c_{p1}\omega}}$ et $\delta_2 = \sqrt{\dfrac{2\lambda_2}{\rho_2 c_{p2}\omega}}$.

Exo 8 — Température terrestre (d'après ENS, École de l'Air, Agrégation de Chimie, École polytechnique)

La température $T(r)$, à l'intérieur de la Terre, décroît avec le rayon r. La surface de la Terre se situe au rayon $r = R$. La Terre a une conductivité thermique λ, une masse volumique ρ et une capacité calorifique massique c, toutes trois uniformes dans ce problème. Elle contient des sources radioactives qui dégagent une puissance thermique par unité de masse $H(r)$ (en $\mathrm{W.kg^{-1}}$) qui peut varier avec le rayon.

1. On note q la densité de flux thermique radial (en $\mathrm{W.m^{-2}}$) à la profondeur r et l'instant t. Démontrer une équation différentielle reliant q, T et H.

2. En déduire l'expression de l'équation de la diffusion thermique. Donner les unités de toutes les quantités apparaissant dans cette équation en unités de base c'est à dire en kg, K, s et m.

On se place en régime permanent. les sources radiocatives sont concentrées dans la croute : il n'y a pas de sources radioactives de $r = 0$ à $r = r_m$ et H est uniforme entre les rayons r_m et R. La température en surface est $T = T_0$.

3. De combien de conditions aux limites a-t-on besoin pour calculer le champ de température dans la Terre ? Quelles sont-elles ?

4. Si la Terre était en régime conductif permanent, avec tous ses éléments radioactifs contenus dans la croûte ($r_m \leqslant r \leqslant R$), la valeur du gradient de température $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$ en $\mathrm{K.km^{-1}}$ près de la surface de la Terre serait :

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)_R = -\frac{\rho H}{3\lambda}R + \frac{\rho H}{3\lambda}\frac{r_m^3}{R^2},$$

et la tempétaure au centre de la Terre :

$$T_{mathitcentre} = T_0 - \frac{\rho H}{2\lambda}r_m^2 + \frac{\rho H}{6\lambda}R^2 + \frac{\rho H}{3\lambda}\frac{r_m^3}{R}.$$

Mener les deux applications numériques et conclure :

$$R = 6370\ \mathrm{km} \quad \lambda = 4\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}} \quad \rho = 2800\ \mathrm{kg.m^{-3}}$$
$$r_m = 6340\ \mathrm{km} \quad H = 5.10^{-10}\ \mathrm{W.kg^{-1}} \quad T_0 = 290\ \mathrm{K}$$

5. Exprimer le flux thermique total en surface de la planète en fonction de la quantité tota de puissance radioactive dissipée. Généraliser ce résultat à partir du résultat de la question pour une puissance radioactive constante dans le temps mais qui varierait en fonction de l profondeur.

On néglige maintenant la sphéricité et les sources radioactives des questions **1** à **6**, mais o ne se place pas en régime permanent. Compte tenu de la faible courbure locale de la Terre, o adopte un modèle cartésien unidimensionnel : la température ne dépend que de la profondeu z comptée positivement. La température vérifie donc l'équation de la diffusion thermique san terme de création.

6. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la densité de flux thermique.

Au milieu du XIX[e], lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément, sa surface a été soumise à une température $T_S < T_0$. Depuis ce temps là, la planète se refroidit. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

7. La densité de flux thermique est donc une fonction de la profondeur et du temps, $q(z,t)$.

Vérifier la solution proposée par lord Kelvin, $q(z,t) = \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{4Dt}\right)$, où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre.

Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique, en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

8. Les paramètres du problème sont $T_0 - T_S$, λ, ρ et c_p. A est donc de la forme :

$$A = a(T_0 - T_S)^{\alpha}\lambda^{\beta}\rho^{\gamma}c_p^{\delta},$$

où a, α, β, γ et δ sont des constantes sans dimensions.

Calculer α, β, γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de lord Kelvin.

9. On cherche à calculer a. Connaissant $q(z,t)$, un calcul d'intégration (non demandé) mène à :

$$T(z,t) = -\frac{2A}{\lambda}\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s + B \quad \text{où} \quad \xi = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$$

Examiner les limites en $t = 0$ et $t \to \infty$ pour déterminer A et B. En déduire a sachant :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

10. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 K à 2000 K et que la diffusivité thermique D était proche de $10^{-6}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$, l'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique de $30\ \mathrm{K.km^{-1}}$. Quel âge de la Terre lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

11. La Terre a environ 4,5 milliards d'années. Quel est le ou les ingrédients physiques que lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il ou les a-t-il négligés ?