# TD - DIFFUSION DE PARTICULES

### Exo 1 — Riders in the storm

Une voiture roule sous la pluie battante à vitesse $\overrightarrow{U}_0$ horizontale de 100 $km/h$ et la pluie tombe verticalement par rapport à la route avec une vitesse $\overrightarrow{V}_p$ de 15 $m/s$. Soit $R = 2\ mm$ le rayon des gouttes. Le pare-brise est orienté par son vecteur normal $\vec{n}$ unitaire faisant un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale et il a pour dimension $L = 1{,}80\ m$ et $H = 90\ cm$.

On souhaite trouver le débit volumique $\mathscr{D}_V$ a évacuer par le pare-brise.

1 - Calculer le volume $V_g$ d'une goutte et la densité particulaire $n_p$ en considérant une distribution cubique des gouttes avec $d_{pp} = 10\ cm$ la distance inter-particulaire entre les gouttes.

2 - On se place dans le référentiel de la voiture. Trouver l'expression vectorielle de la vitesse des gouttes tombant sur le pare-brise.

3 - Construire le vecteur surface $\vec{S}_{pb}$ du pare-brise et le vecteur densité de courant de particules $\vec{j}_p$ .
En déduire le débit de particules $\mathscr{D}_p$ **reçu** sur le pare-brise.

4 - Proposer 3 tests pour vérifier la validité du modèle, c-à-d de la formule obtenue, en envisageant différentes situations (angle, vitesse, etc …)

5 - Exprimer le débit volumique $\mathscr{D}_V$ et faire l'application numérique. Commenter.

6 - Trouver l'angle $\alpha_{max}$ qui rend ce débit maximum. Le déterminer.

## Exo 2 — Diffusion dans un milieu infini

On considère de nombreuses particules, rassemblées dans un cylindre de section S autour de x = 0 à un instant initial.
Elles diffusent aux instants ultérieurs mais uniquement suivant les x croissants et décroissants. [Invariance selon y et z].

1 - Montrer que la densité particulaire suivante est solution de l'équation de la diffusion : $n(x,t) = \dfrac{N_0}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}$

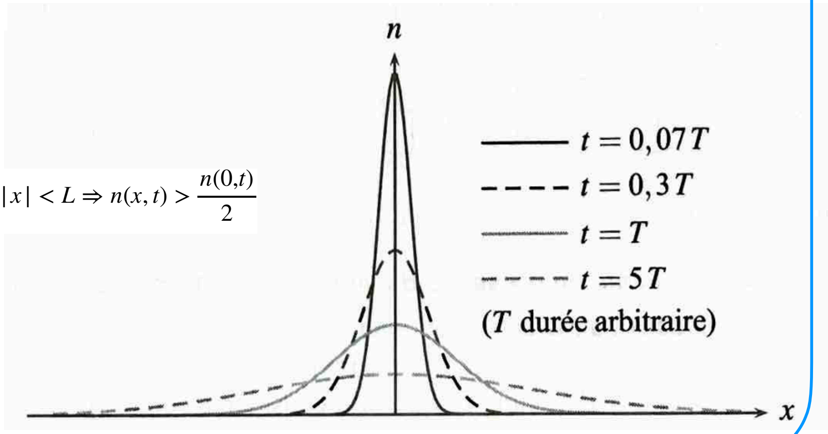
2 - Commenter l'allure de n(x, t) représentée pour les 4 instants suivants :

3 - Calculer $N = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t) S dx$ et interpréter le résultat.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

4 - La largeur à mi-hauteur est l'abscisse L telle que : $\forall |x| < L \Rightarrow n(x,t) > \dfrac{n(0,t)}{2}$

Etablir l'expression de L en fonction de t.




## Exo 3 — Perturbation sinusoïdale de concentration [ENSAM]

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté $D$ ; il est supposé indépendant de la concentration. Une solution sucrée possède, à l'instant $t = 0$, une concentration en sucre dépendant de l'abscisse $x$ selon une loi de la forme :

$$c(x, t=0) = c_0 + c_1 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right),$$

où $c_0$, $c_1$ ($c_1 \ll c_0$) et $\lambda$ sont des constantes.

L'évolution ultérieure, pour $t > 0$, de la concentration est cherchée sous la forme :

$$c(x,t) = c_0 + f(t) \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

**1.** Rappeler sans démonstration l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x,t)$ (équation de la diffusion).

**2.** Déterminer, en fonction de $D$ et $\lambda$, l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction $f(t)$. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. Exprimer $f(t)$ en fonction de $c_1$, $t$ et d'un temps caractéristique $\tau$ à écrire en fonction de $D$ et $\lambda$. Vérifier l'unité de $\tau$. Quel sens concret donnez-vous au paramètre $\tau$ ?

**3.** Représenter graphiquement, pour $t > 0$ donné, l'évolution de la concentration $c(x,t)$ en fonction de $x$ à deux instants différents. Tracer également la distribution limite $c(x, t \to \infty)$.

## Exo 4 — Diffusion de neutrons avec symétrie sphérique

Des neutrons sont créés dans un milieu délimité par une sphère de rayon R à raison de $\sigma$ particules par unité de temps et par unité de volume. On peut imaginer le cas d'une source radiative de forme sphérique. Ils diffusent dans tout l'espace isotrope (symétrie sphérique) avec un coefficient de diffusion D. On s'intéresse au cas stationnaire.

**Déterminer le nombre de neutrons par unité de volume $n^*(r)$ en tout point de l'espace.**

On donne, en coordonnées sphériques : $\vec{\nabla}(n^*) = \dfrac{\partial n^*}{\partial r}\vec{e}_r$ ainsi que $div(\vec{j}) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 j)}{\partial r}$ avec $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$

## Exo 5 — Longueur de diffusion

Des particules diffusent selon l'axe (Ox) avec un coefficient de diffusion uniforme D, n*(x, t) représente la concentration (ou nombre d'entités par unité de volume).

1 - Rappeler la loi de Fick et utiliser la conservation du nombre de particules pour montrer que : $\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$

Que devient cette relation si D est fonction de x ?

La diffusion a lieu, maintenant, dans un milieu absorbant caractérisé par : $\sigma(x, t) = An^*(x, t)$
qui représente le nombre de particules absorbées par unité de temps et unité de volume, A est une constante positive.

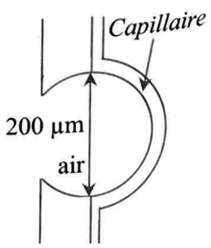
2 - Préciser l'unité de A.

3 - Écrire l'équation de diffusion des particules dans ce milieu (où D est uniforme). On se place maintenant en régime stationnaire.

4 - Déterminer n*(x), on posera n*(x = 0) = n0.

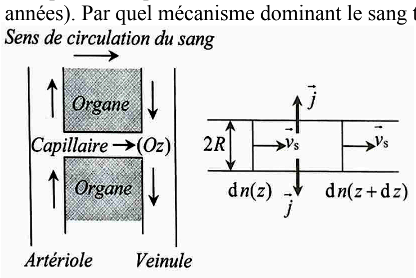
5 - On appelle longueur de diffusion la distance d que doivent parcourir les particules dans ce milieu pour que leur concentration soit divisée par $e$ $(e^1 = 2.71828...)$. Exprimer cette longueur de diffusion.

## Exo 6 — Diffusion de l'oxygène dans le sang 🩸 [mines-Ponts]




Le sang joue un rôle moteur dans le transport de l'oxygène et des nutriments vers les organes du corps et le transport des déchets produits par ces organes vers des organes spécialisés dans le traitement des déchets. Le cœur joue le rôle d'une pompe faisant circuler le sang vers ces organes. Le sang arrive en contact avec les organes en passant par des artères, puis des artérioles et finalement des capillaires. Il revient au cœur en partant des capillaires, transitant par les veinules pour aboutir aux veines.

1 - Les organes ont un besoin régulier en oxygène. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans un milieu aqueux est $D_{eau} = 10^{-9} m^2 s^{-1}$ Montrer, par une estimation numérique qualitative, que le transport de l'oxygène vers un organe ne saurait se faire par le seul phénomène de diffusion à travers la peau (on trouvera que la durée de diffusion se mesure, dans ce cas, en années). Par quel mécanisme dominant le sang transporte-t-il l'oxygène?




2 - Le sang se charge en oxygène par diffusion de l'oxygène contenu dans les alvéoles du poumon vers le capillaire périphérique de l'alvéole.
Les alvéoles sont supposées sphériques (figure page précédente), de rayon $R_{alv} = 10^{-4} m$. Le sang circule dans le capillaire à la vitesse moyenne $v \simeq 10^{-3} m s^{-1}$. Calculer le temps de contact $\delta t_s$, du sang avec l'alvéole. Le rayon du capillaire est $R_{cap} = 10^{-5} m$. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'air est $D_{air} = 1.8\ 10^{-5} m^2 s^{-1}$. Estimer le temps de diffusion d'une molécule d'oxygène par ce mécanisme, en convenant que c'est la somme du temps de diffusion dans l'air (alvéole) et du temps de diffusion en milieu aqueux (capillaire). Montrer que l'échange d'air entre l'alvéole et le sang a maintenant le temps de s'établir.

3 - L'alimentation d'un organe en un nutriment transporté par le sang s'effectue par échange entre le sang et l'organe, à travers les parois des capillaires. Ces capillaires sont des tubes cylindriques de rayon R et de longueur L, joignant une artériole à une veinule. On note $C_c(z)$ la concentration molaire (mol·m-3) d'un nutriment dans le capillaire et $C_{org}(z)$ celle du nutriment dans l'organe à proximité de la surface du capillaire. Le capillaire cède à l'organe le nutriment avec une densité de courant molaire (flux surfacique) $J = \gamma[C_c(z) - C_{org}(z)]$ où $\gamma$ est un paramètre constant. Déterminer la dimension de $\gamma$ . On considère le régime stationnaire ; effectuer le bilan de matière en nutriment, exprimant l'équilibre dynamique des flux entrant et sortant entre les tranches de cotes z et z + dz et en déduire l'équation vérifiée par $C_c(z)$, en supposant que le sang a une vitesse d'écoulement constante $v_s$. Cette équation fait intervenir la fonction $C_{org}(z)$.

4 - On admet ici que $C_{org}(z) = K$, une constante; déterminer alors $C_c(z)$ en fonction de K, $C_c(0)$ et de la longueur caractéristique $L_0 = \dfrac{R v_S}{2\gamma}$. On considère que l'organe est correctement alimenté si : $\left|\dfrac{C_c(L) - K}{C_c(0) - K}\right| \geq 30\,\%$ sachant que $v_S = 2.8\ 10^{-3} m s^{-1}$, $R = 10^{-5} m$ et L = 1 mm, déterminer la valeur maximale du coefficient $\gamma$ pour que la relation précédente soit satisfaite.

## Exo 7 — Diffusion de neutrons avec absorption

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau cylindrique, de longueur L et de section S, en supposant qu'il n'y a pas d'évasion par la surface latérale et en notant n(x, t) la densité volumique des neutrons à l'abscisse x et à l'instant t et $j_n(x, t)$ la densité de courant de neutrons diffusés (de valeur égale au nombre algébrique de neutrons traversant par unité de surface et de temps la section du barreau d'abscisse x, à la date t, dans le sens des x croissants). La diffusion des neutrons dans le barreau obéit à la loi de Fick : $j_n = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$ , où D est appelé coefficient de diffusion, et garde une valeur constante positive.

**1.** On note $n_0$ et $n_L$ la concentration en neutrons mobiles respectivement en $x=0$ et à l'abscisse $x=L$. Quelle serait, en régime permanent et en négligeant tout phénomène d'absorption, la valeur de $j_n$ (densité du courant de neutrons) en fonction de $n_0$, $n_L$, $L$ et $D$ ?

**2.** Dans cette question, on suppose qu'une pastille irradiée, placée dans le prolongement du barreau, envoie dans celui-ci un flux homogène et constant de neutrons. On note $J_0$ (valeur constante positive) le nombre de neutrons traversant par unité de surface et de temps la section du barreau d'abscisse $x=0$ et $n_0$ la concentration en neutrons mobiles à cet endroit. On tient compte de l'absorption des neutrons par le matériau en notant $K$ le nombre de neutrons par unité de volume et de temps absorbés par le matériau. $K$ est une constante positive.

**a)** En faisant le bilan des neutrons absorbés ou produits dans une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ à l'abscisse $x$, montrer que $n(x,t)$ vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} - K$.

**b)** Déterminer, en régime permanent, la loi de variation $j_n = f(x)$ en fonction de $J_0$, $K$ et $x$.

**c)** En déduire pour quelle valeur $x = L'$ de l'abscisse le courant de neutrons s'annule. Montrer que ce dernier résultat pouvait être obtenu plus simplement.

**d)** Expliquer en quoi l'hypothèse considérant $K$ comme une constante est irréaliste et suggérer une hypothèse de remplacement.

**3.** On étudie la diffusion unidimensionnelle des neutrons dans un barreau de matière fissile. Deux phénomènes se produisent dans la matière fissile : la réaction de fission absorbe des neutrons mais en produit plus qu'elle n'en absorbe. La concentration en neutrons mobiles vérifie alors l'équation différentielle : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + kn$, le coefficient constant $k$ étant positif. La concentration en neutrons mobiles est nulle aux deux extrémités du barreau : ($n=0$ en $x=0$ et en $x=L$). En posant $n(x,t) = f(x)\,g(t)$, montrer que $n(x,t)$ diverge au cours du temps si la longueur $L$ du barreau est supérieure à une valeur limite $L_0$ que l'on exprimera en fonction de $D$ et $k$. Que se passe-t-il si $L$ est supérieure à $L_0$ ?