

Equations d'ondes

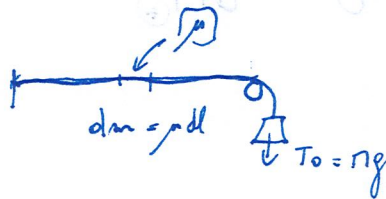
Phénomènes de propagations non dispersifs

Révision SUP:

- Propagation d'ondes
- ondes stationnaires
- polarisations

Objectifs:

- Etablir l'éq^e de d'Alembert
- Ondes dans un coaxial
- Ondes électromagnétiques
- Energie et structures des ondes
- Ondes acoustiques (méca flux)

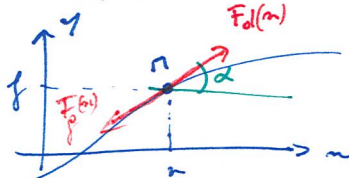


1- Cordes vibrantes: l'équation d'onde de d'Alembert.

La première équation d'onde a été établie par d'Alembert pour décrire la propagation d'une déformation sur une corde. C'est la pure traduction des lois de Newton sur un bout de ficelle mais qui introduit une équation différentielle à 2 variables, d'espace et de temps. Cette équation unidirectionnelle se généralise alors en 3D mais sa logique s'étend également à d'autres systèmes: Peaux de tambour en 2D, vibrations de structure mécanique, sismologie etc...

1- Onde transverse sur une corde vibrante

On considère une corde $f(x)$



α - PFD en un point x :

* Soit M en x un point $\Rightarrow \frac{dm}{dx} = 0$

$$\vec{F}_d(x) + \vec{F}_p(x) = \frac{dm}{dx} \vec{a}$$

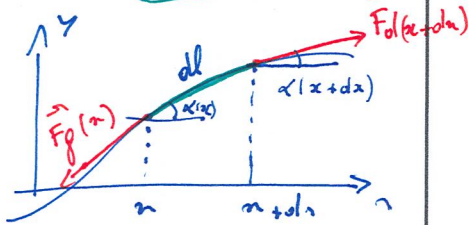
Soit $\vec{F}_d(x) = -\vec{F}_p(x)$

* Soit $\alpha(x)$ l'inclinaison en x et $T(x)$ la tension

$$\vec{F}_d(x) = T(x) \cos(\alpha) \vec{e}_x + T(x) \sin(\alpha) \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_d(x) = \begin{cases} T(x) \\ \alpha(x) T(x) \end{cases}$$

$$\alpha \ll 1 \quad \tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$$



3 - PFD sur un élément de corde

$$dm = \mu dl = \mu dx \quad \alpha(x) = 1$$

$$\text{PFD} \quad \frac{dm}{dx} \vec{a} = \vec{F}_d(x+dx) + \vec{F}_p(x)$$

$$\alpha \vec{F}_p(x) = -\vec{F}_d(x)$$

Soit $dm \vec{a} = \vec{F}_d(x+dx) - \vec{F}_d(x)$ Hyp: $\vec{a} = \ddot{y} \vec{e}_y$
 \Rightarrow pas de déplacement horizontal

2 - Projet^o \vec{e}_x :

$$\frac{dm}{dx} \vec{a} \cdot \vec{e}_x = T(x+dx) - T(x) = \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0 \quad T(x) = T_0 \quad (\text{e.b.})$$

3 - Projet^o \vec{e}_y :

$$dm \vec{a} \cdot \vec{e}_y = dm \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \alpha(x+dx) T_0 - \alpha(x) T_0 = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \quad \text{avec } dm = \mu dx = \mu \alpha dx$$

Soit l'éq^e de corde vibrante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

2 - Equation de d'Alembert

On pose $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ $\left[\frac{N}{kg/m} \right]$

$[c] = \sqrt{\frac{N L T^{-2}}{kg L^{-1}}} = L T^{-1} (\checkmark)$
 \Rightarrow célérité de l'onde sur la corde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Soit $\square(f) = 0$ avec $\square(\cdot) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

\Rightarrow opérateur d'Alembertian

op: $\square(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$

Célérité: $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \propto \sqrt{T_0} \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ exemple corde de guitare.
 $\Rightarrow \phi \neq T_0$

3- Résultat eq° de d'Alembert

$\square f = 0$

Soit $\begin{cases} \alpha = x - ct \\ \beta = x + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ t = \frac{\beta - \alpha}{2c} \end{cases}$

$f(t, x) = F(\alpha, \beta)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right]$
 $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right]$


$\square f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$

\Rightarrow A résoudre $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \alpha} = g(\alpha) \Rightarrow F(\alpha, \beta) = f(\alpha) + h(\beta)$

Retour à $f(t, x)$. $f(t, x) = g(x - ct) + h(x + ct)$
 ↗ onde progressive vers la droite ↘ onde progressive vers la gauche

Eq: g et h st. qcp.

On parle d'onde progressive harmonique dans le cas de f et sinusoïdale. Soit:

$u_f(t, x) = a \cos(\omega t - kx + \varphi)$ 

cf SUP: $\lambda = cT$

4- Résultat en D: relat° de disp.

L'eq° diff de d'Alembert étant linéaire, on cherche des sol° sous la forme d'une OPPH $f = f_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$

Soit $f = f_0 e^{j(\omega t - kx)}$ (OPP+) \rightarrow car décomposé harmonique

$\square f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

$(+jk)^2 f = \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 f \Rightarrow +k^2 c^2 = +\omega^2$

Soit $\omega = \pm kc > 0$ $\boxed{k = \pm \frac{\omega}{c}}$ 2 sol°

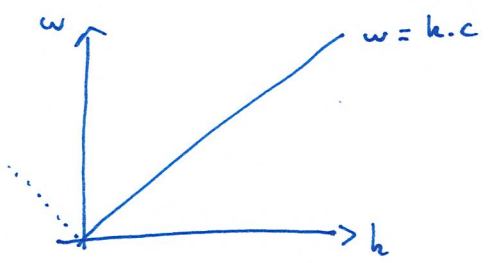
$f = f_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi_0)$ Soit la sol° générale:

$f(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + B \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$

OPP+ \rightarrow

OPP- \leftarrow

Tracé de la relat° dispersion:



Q: proportion d'un réseau est-elle possible?

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = c$

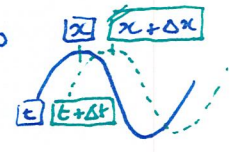
$\lambda = cT \Leftrightarrow \omega = kc$

Soit $\Delta \phi = 0 = \Delta(\omega t - kx + \varphi) = \omega \Delta t - k \Delta x = 0$

$\Rightarrow v_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$

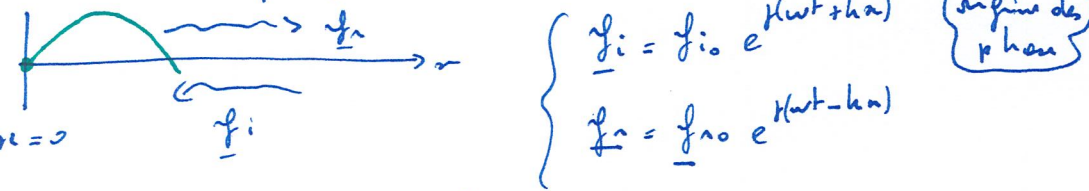
v_ϕ : vitesse de phase

\rightarrow On suit la "paquet".



S - Sol° Stationnaire de l'eq° de d'Alembert -

Dès lors qu'il y a une cause de réflexion de l'onde, l'onde réfléchie se superpose à l'onde incidente.



$$\begin{cases} \underline{f}_i = f_{i0} e^{i(\omega t + kx)} \\ \underline{f}_r = f_{r0} e^{i(\omega t - kx)} \end{cases} \quad \text{origine des phases}$$

$f(t, x=0) = 0 \quad \forall t \quad f_{i0} e^{i\omega t} + f_{r0} e^{i\omega t} = 0 \quad \forall t \quad f_{r0} = -f_{i0}$

D'où $f(t, x) = f_0 e^{i\omega t} [\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}] = \frac{2f_0}{2i} e^{i\omega t} \sin(kx)$

$f(t, x) = -2 f_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$

Sol° équivalentes.

Rp: Noeud sur f en 0 \Rightarrow "sin sin"

Prop: Une onde stationnaire est la superposit° de 2 OPP de même amplitude mais de direct° opposée

On peut superposer 2 ondes stationnaires en $\begin{cases} - \text{quad spatiale} \\ - \text{quad temporelle} \\ - \text{même amplitude} \end{cases}$ pour obtenir une OPP

$f_0 \cos(\omega t) \cos(kx) + f_0 \sin(\omega t) \sin(kx) = f_0 \cos(\omega t - kx)$

interprétation

Pour faire 2 sol° équivalentes à l'eq° de d'Alembert \hookrightarrow dépend des cond° limite.

"vide illimitée"

OPP+ ou OPP- OPP : Effet de bord \rightarrow réflexion confinement (Mq). \Rightarrow onde stationnaire + onde tee.

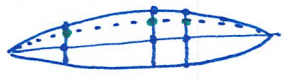
6) - Etude complète de la corde de Melde

Sol° Stationnaires (autre approche).

On cherche une sol° ss. la forme $f(t, x) = p(t) \cdot h(x)$

"Stationnaire" signifie $\forall x$ l'évolut° temporelle $p(t)$ est la même.

Soit $\frac{\partial^2 (p h)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (p h)}{\partial t^2}$



$g h'' = \frac{h}{c^2} g'' \quad \frac{g''}{g} = \frac{h''}{h} = K \quad \begin{cases} h'' - K h = 0 \\ g'' - K c^2 g = 0 \end{cases}$

Sol° spatiale:

cond° bord $h(0) = h(L) = 0 \quad \forall t$

3 types de solut°: $h(x) = Ax + b$ (K=0), $h(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ (K>0), $\Rightarrow A=B=0$ X

il faut $K < 0$ $h(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

$k = \sqrt{-K}$

$h(0) = A = 0 \quad h(L) = B \sin(kL) = 0 \quad kL = n\pi = \frac{2\pi L}{\lambda}$

$h(x) = B \sin(kx)$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

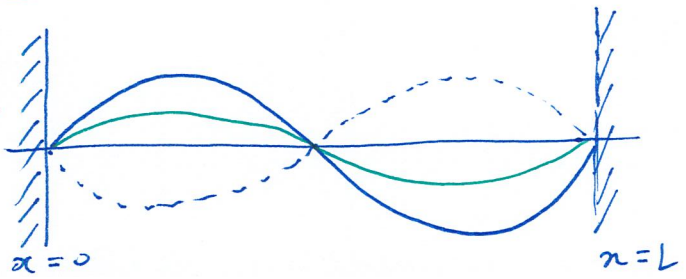
Sol° Temporelle: $\omega^2 = -K c^2 \Rightarrow \omega = kc$

$f'' + \omega^2 f = 0$

$f(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) = f_0 \sin(\omega t + \phi)$
Le choix d'origine des temps permet $\phi = 0$

Soit $f(t, x) = f_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$

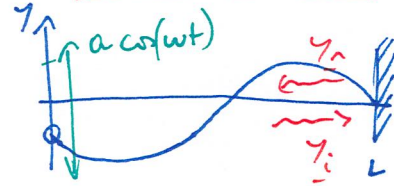
$k_n = n \frac{\pi}{L}$



$\lambda_1 = 2L$
 $\lambda_2 = L$
 $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$
etc...

7 - Régime forcé de la corde de Melde

"La vraie corde de Melde"



Soit $f(t, x) = \underline{y}_i e^{j(\omega t - kx)} + \underline{y}_r e^{j(\omega t + kx)}$

$\xrightarrow{SP_+}$ $\xleftarrow{SP_-}$

Cond° aux bords : $f(t, L) = (\underline{y}_i e^{-kL} + \underline{y}_r e^{+kL}) e^{j\omega t} = 0 \quad \forall t$

$f(t, 0) = (\underline{y}_i + \underline{y}_r) e^{j\omega t} = a e^{j\omega t} \quad \forall t$

Soit : $\left. \begin{aligned} \underline{y}_i + \underline{y}_r &= a \\ \underline{y}_i e^{-ikhL} + \underline{y}_r e^{+ikhL} &= 0 \end{aligned} \right\} \underline{y}_r = a - \underline{y}_i \quad (\text{et } \underline{y}_r = -\underline{y}_i e^{-2jkhL})$

$\underline{y}_i e^{-ikhL} - \underline{y}_i e^{+ikhL} = -a e^{+ikhL} = -\underline{y}_i \frac{e^{+ikhL} - e^{-ikhL}}{2j} \quad 2j = -2j \underline{y}_i \sin(khL)$

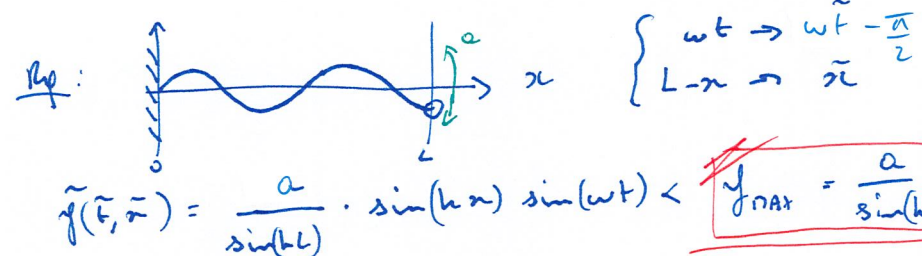
Soit : $\underline{y}_i = \frac{a}{2j} \frac{e^{+ikhL}}{\sin(khL)}$ $\underline{y}_r = -\frac{a}{2j} \frac{e^{-ikhL}}{\sin(khL)}$

$f(t, x) = \frac{a}{2j \sin(khL)} \left[e^{j(\omega t - kx)} e^{+ikhL} - e^{j(\omega t + kx)} e^{-ikhL} \right]$

$= \frac{a e^{j\omega t}}{\sin(khL)} \cdot \frac{e^{jk(L-x)} - e^{-jk(L-x)}}{2j}$

$f(t, x) = \frac{a e^{j\omega t}}{\sin(khL)} \sin(k(L-x))$

$\xrightarrow{\mathbb{R}} f(t, x) = a \cos(\omega t) \cdot \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(khL)} < \frac{a}{\sin(khL)}$



$kL = n\pi \Rightarrow \text{résonance } k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ or } k_n = \frac{\omega_n}{c} = n \frac{\pi}{L}$

Soit $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$ $\lambda_n = \frac{c \omega_n}{k_n} = \frac{c L}{n \pi}$ $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

Résonance \Rightarrow Sat du régime linéaire \Rightarrow frottements deviennent très forts.

$f \rightarrow \infty$

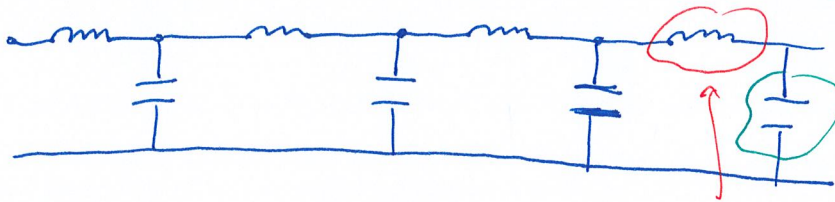
8 - Modes propres et décomposit° harmonique.

\hookrightarrow fiche révision de SUP.

II ligne électrique sans perte : câble coaxial idéal.

1) Modèle du câble coaxial idéal ⇒ aucune résistance!

⇒ aucun effet dissipatif.



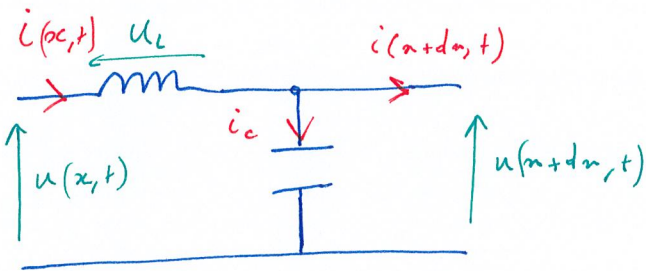
effet capacitif linéaire ⇒ lié à la tension entre les conducteurs chargés $\sigma(\rho, z)$

cf diaporama : condensateurs cylindriques.

effet inductif linéaire ⇒ lié à $i(\rho, z)$ le long du fil.

valeurs :
$$\begin{cases} \Lambda = 0,25 \mu\text{H m}^{-1} \\ T = 100 \text{ pF m}^{-1} \end{cases}$$

2) Mise en équation :



* L D N : $i(x,t) = i(x+dx,t) + i_c$

or $i_c = T dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = T dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

soit $-\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx = T dx \frac{\partial u}{\partial t}$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = T \frac{\partial u}{\partial t} \quad (i)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (ii)$$

* L D N : $u(x,t) = u(x+dx,t) + u_L$

soit $-\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$ ⇒

Équation sur i :

* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ soit

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda T \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

$\square i = 0$ avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda T}}$$

Équation sur u :

* $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

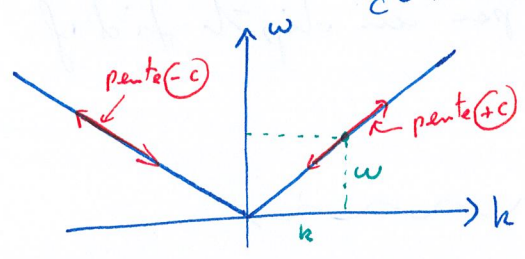
AN :
$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda T}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

onde OP \oplus $\left\{ \begin{array}{l} u^{\oplus} = + z i^{\oplus} \\ u^{\ominus} = - z i^{\ominus} \end{array} \right\}$

3) Relation de dispersion:

On injecte une onde plane ds l'equation d'onde: $u(t,x) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$

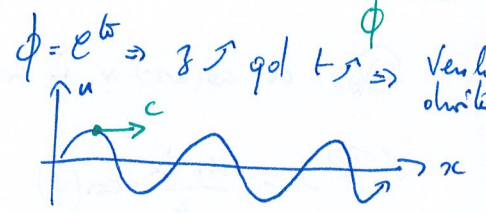
Soit $(-jk)^2 u - \frac{1}{c^2} (\omega)^2 u = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2$ Soit $\boxed{\omega = \pm kc}$



$\omega > 0$ (tps).
 $k > 0$ OP vers la droite.
 $k < 0$ OP vers la gauche

Milieu Non Dispersif.

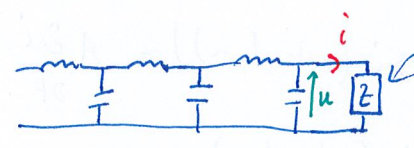
Eq: $u = u_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$



$$\left. \begin{aligned} \nu_f &\equiv \frac{\omega}{k} = \pm c \\ \nu_g &\equiv \frac{d\omega}{dk} = \pm c \end{aligned} \right\} \nu_f \cdot \nu_g = +c^2$$

4) Impédance caractéristique du milieu

On peut couper le câble par la pensée en tt. pt. et imaginer que ce dernier alimente un dipôle \equiv [qui n'est autre que la suite du câble]:



Ce "dipôle" a donc une impédance $\boxed{Z \equiv \frac{u}{i}}$ (Ω).
 caractéristique de la propagation de l'onde sur le câble c'est son milieu de propagation. Analogie:

- indice optique
- impédance acoustique

Tant que l'impédance ne change pas (milieu homogène)
 \Rightarrow l'onde se propage sans effet de réflexion et sans attén.

- ODG: TP coax à 50Ω [labo, wiki]
Télé antenne réseaux } 75Ω
 parabole

Calcul de Z : Soit $\left. \begin{aligned} u &= u_0 e^{j(\omega t - kx)} \\ i &= i_0 e^{j(\omega t - kx)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (i) + \cancel{jki} &= T \cancel{j\omega u} = T \cancel{kc} u & Z &= \frac{1}{Tc} = \sqrt{\frac{\Lambda}{T}} \in \mathbb{R} \\ (ii) + \cancel{jku} &= \Lambda \cancel{j\omega i} = \Lambda \cancel{kc} i & Z &= \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{T}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$

Soit $\boxed{Z = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{T}}}$

Eq: $e^{j(\omega t + kx)} \rightarrow -jk u = \Lambda j \omega i = \Lambda kc i$
 Avec $\omega = kc$

$Z^{(-)} = -\sqrt{\frac{\Lambda}{T}}$
 $Z^{(+)} = +\sqrt{\frac{\Lambda}{T}}$

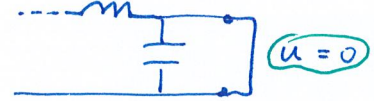
Adk: $\boxed{Z = \pm 50 \Omega}$

* Puissance en dB $\uparrow \uparrow$

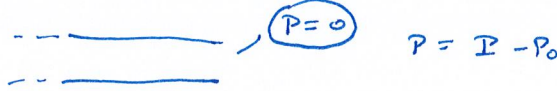
ATTENTION au sens de $v = \pm c$

5) Effet de reflexion en bout de câble :

On peut imaginer que le câble soit coupe ou réalisé un court circuit
 l'effet sera dans les 2 cas une reflexion totale



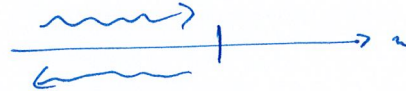
Ces situations sont semblables en x=ln aux sources :



1) Court-circuit → volt S intégrée.

2) Coupe circuit

$\forall t \quad i(t, x=0) = 0$



Prp: Principe de Curie.
 $\Rightarrow \omega_i = \omega_r$
 $k_i = k_r$
T-périodique

$i(t, x)$

$$\left. \begin{aligned} i_{(x)} &= i_0 e^{j(\omega t - kx)} \\ i_{(x)} &= i_1 e^{j(\omega t + kx)} \end{aligned} \right\} i = i_0 + i_1 = e^{j\omega t} [i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}]$$

Soit $i(t, x) = -i_0 e^{j\omega t} \left[\frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \right] \cdot z_j$

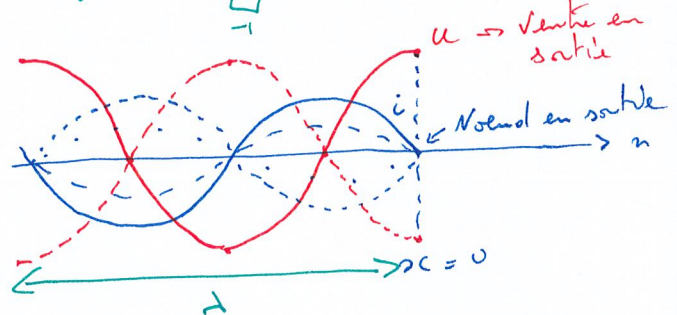
$i_1 = -i_0$

$i_1 = i_0 \quad \phi_r = \pm \pi$

$i(t, x) = -2j i_0 e^{j\omega t} \sin(kx)$

$j e^{j\omega t} = j \cos(\omega t) + \frac{j^2}{-1} \sin(\omega t)$

Soit $i(t, x) = +2 i_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$



u(t, x) se déduit des équations de complex.

on de l'impédance

→ plus systématique

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &= +z_0 \underline{i}_i = z_0 i_0 e^{j\omega t - jkx} \\ \underline{u}_r &= -z_0 \underline{i}_r = +z_0 i_0 e^{j\omega t + jkx} \end{aligned}$$

↑ sans prop inverse

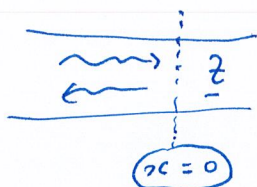
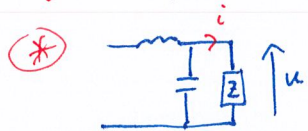
u et i :
 - fonction spatiale
 - fonction temporelle

Soit $\underline{u} = z_0 i_0 e^{j\omega t} \cos(kx)$

et donc

$u(t, x) = 2z_0 i_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$

Effet d'une impédance terminale → Application: Bordure anti-reflexion



Soit $\underline{u} = \underline{u}_i + \underline{u}_r = u_0 e^{j(\omega t - kz)} + \underline{\Gamma} u_0 e^{j(\omega t + kz)}$
 et $\underline{i} = \underline{i}_i + \underline{i}_r = \frac{u_0}{Z_0} e^{j(\omega t - kz)} - \frac{\underline{\Gamma} u_0}{Z_0} e^{j(\omega t + kz)}$

⚠ def $\underline{\Gamma}$: $\underline{u}_r = \underline{\Gamma} \underline{u}_i$

Soit en $x=0$: $\underline{u} = (1 + \underline{\Gamma}) u_0 e^{j\omega t}$
 $\underline{i} = (1 - \underline{\Gamma}) \frac{u_0}{Z_0} e^{j\omega t}$ } $\underline{Z} \equiv \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = Z_0 \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}}$

$Z - \underline{\Gamma} Z = Z_0 + \underline{\Gamma} Z_0 \Rightarrow Z - Z_0 = \underline{\Gamma} (Z + Z_0) \Rightarrow \underline{\Gamma} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$

Coeff de réflexion sur \underline{u}

Rep: ⚠ à la def des coeff de réflexion

Soit $\underline{r}(\pm) = \frac{i_{\pm}}{i_{\pm 0}}$ ou $\left. \begin{array}{l} u_{\pm 0} = Z_0 i_{\pm 0} \\ u_{\pm 0} = -Z_0 i_{\pm 0} \end{array} \right\} \underline{r}_u = \underline{r} = -r_i$

⊗ On veut éviter la réflexion $\Rightarrow \underline{\Gamma} = 0$ Soit $\underline{\Gamma} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = 0$

$\Rightarrow Z = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Tout se passe comme si le câble continuait; en réalité tout est dissipé dans la résistance: on parle d'adaptat^o d'impédance

$P_{\text{ohm}} = R i^2 = \frac{u^2}{R}$

⊗ Calcul de $u(t, x=0)$ $\underline{u} = \underline{u}_i + \underline{u}_r = u_0 e^{j(\omega t - kz)} +$

Propagation des ondes électromagnétiques

lumière visible - onde radio \rightarrow Tt₀ le O.E.N

1) Éq^o de Maxwell et propagation ds le vide illimité.

\rightarrow eq^o d'onde (locale) de Maxwell.

$$\text{Div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{Div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 0$$

↑
vide de charge

↑
vide de courant

2) Champ \vec{E} : $\text{Rot}(\text{Rot}(\vec{E})) = \text{Rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\text{Rot Rot}(\cdot) = \vec{\nabla}(\text{Div}(\cdot)) - \Delta(\cdot) \quad ||^*$

$\vec{\nabla}(\text{Div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$

Soit

$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$\square E = 0$

3) Champ \vec{B} : $\text{Rot}(\text{Rot}(\vec{B})) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{Rot}(\vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$\vec{\nabla}(\text{Div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$

$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

$\square B = 0$

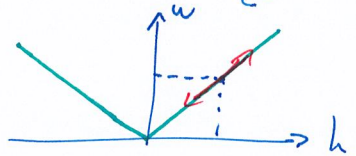
4) Célérité: $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial n^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

AN: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

5) relat^o de dispersion: Soit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k z)} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E}_0(-jk) e^{j(\omega t - k z)} \vec{e}_r - \frac{\vec{E}_0(j\omega)^2}{c^2} e^{j(\omega t - k z)} \vec{e}_r = 0$

Soit $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 \Rightarrow \omega = \pm k c$

rel^o disp^o ds. le vide illimité.



* Démonstration: $\text{Rot Rot}(\vec{B}) \Big|_{(i)} = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l B_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l B_m$

$\forall k \left. \begin{array}{l} \text{Soit } i=l \text{ et } j=m \\ \text{Soit } i=m \text{ et } j=l \end{array} \right\}$

$$= \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{kij}}_{+1} \partial_j \partial_i B_j + \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{kji}}_{-1} \partial_j \partial_i B_i$$

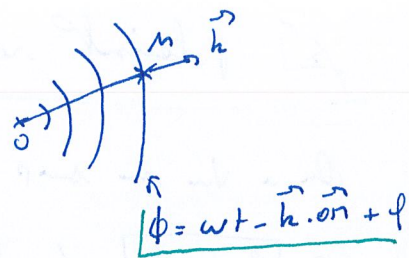
$$= \partial_i \partial_j B_j - \partial_j \partial_i B_i \quad \forall i$$

On a bien $\text{Rot}(\text{Rot}(\vec{B})) = \vec{\nabla}(\text{Div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$

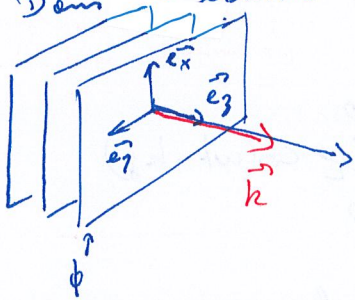
2) Structure de l'onde dans le vide illimité.

↳ Surface d'onde: Soit un pt 0 émetteur:

Tous les points M à une distance $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ sont en phase: on parle alors de Surface d'onde pour une onde sphérique dirigée par \vec{k} et \vec{e}



Dans la limite où on est gale on parle d'onde plane:



Soit $\vec{E}(t, r)$ et $\vec{B}(t, r)$ les champs associés:

On raisonne sur des ondes Harmoniques à ω fixée ou OPPH onde plane progressive Harmonique.

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k z)}$ $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - k z)}$ et $\vec{k} = k \vec{e}_z$ le vecteur d'onde.

↳ Opérateurs en onde plane

Soit $\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \vec{e}_i$ $i = x, y, z$ alors: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j \omega \vec{E}$

* $\text{Div}(\vec{E}) = \partial_z E_z = E_{0z} (-j k_z) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z = (-j k_z) E_z$

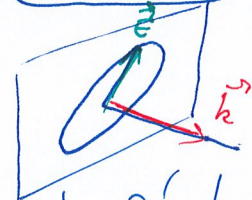
Soit $\text{Div}(\vec{E}) = -j \vec{k} \cdot \vec{E}$

* $\text{Rot}(\vec{E}) \Big|_z = \epsilon_{lmn} \partial_m E_n = \epsilon_{lmn} (-j k_m) E_n = -j \epsilon_{lmn} k_m E_n$

Soit $\text{Rot}(\vec{E}) = -j \vec{k} \wedge \vec{E}$

On a les eq^s de Maxwell dans le formalisme OPPH \Leftrightarrow

Relat^o de Structure.



↳ Relat^o de Structure d'une OPPH:

ici dans le vide

* $\text{Div}(\vec{E}) = 0 \quad -j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$
 * $\text{Div}(\vec{B}) = 0 \quad -j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{k} \perp \vec{E}$ et $\vec{k} \perp \vec{B}$

\vec{E} et \vec{B} sont plongés ds la surface d'onde.

* $\text{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j \omega \vec{B}$

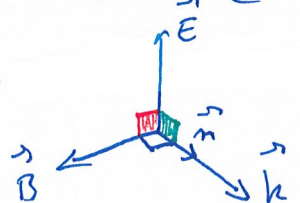
$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \xrightarrow{\omega = kc} \vec{B} = \vec{n} \wedge \frac{\vec{E}}{c}$

* $\text{Rot}(\vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -j \vec{k} \wedge \vec{B} = +j \frac{\omega \vec{E}}{c^2}$

Ap: B homogène à $\frac{E}{c}$

$\vec{E} = -c \vec{n} \wedge \vec{B}$

avec \vec{n} le vecteur unitaire ds. le sens de Propagat^o de l'onde.



$(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ type trièdre

3) Transfert d'ERS électromagnétique.

1) Conservat° locale de l'ERS

→ Nous avons construit la densité d'ERS en: $w \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

→ Nous savons aussi que la puissance volumique dissipée dans un conducteur ohmique s'écrit $P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

→ On envisage dès lors par analogie avec les autres transferts étudiés - long
- diff part
- diff théor qu'il existe un courant volumique pour le transfert d'ERS en

\vec{j}_q en $W m^{-2}$ → $\vec{\Pi}$ en $W m^{-2}$ + q

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{Div}(\vec{\Pi}) = -P_{\text{vol}}$$

↑
flux
sortant
ERS en

↑
perte par
effet Joule

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Div}(\vec{j}_q) = P_a - P_d$$

* On peut s'attendre à ce que $\vec{\Pi}$ soit porté par \vec{k} , mais $\vec{\Pi} \propto \vec{E} \wedge \vec{B}$.

Calculons $\text{Div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \text{Rot}(\vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \text{Rot}(\vec{B}) = -\text{Rot}(\vec{E})$

* On nous veut $\text{Div}(\vec{\Pi}) = -P_{\text{vol}} - \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{Rot}(\vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ soit $\text{Div}(\vec{\Pi}) = -\frac{\vec{E} \cdot \text{Rot}(\vec{B})}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \text{Rot}(\vec{E}) \cdot \vec{B}$

On voit ainsi que $\text{Div}(\vec{\Pi}) = \frac{1}{\mu_0} \text{Div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$ donc $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est solut°.

On pose ainsi $\vec{\Pi} \equiv \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Analyse Dim: $[\Pi] = \frac{[E][B]}{\mu_0} = \frac{[E][E/c]}{\mu_0} = \left[\frac{E^2 \cdot c}{\mu_0 c^2} \right] \text{ ou } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Soit $[\Pi] = \frac{[\epsilon_0 E^2]}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} \cdot c = \frac{[ERS] \cdot L}{L^3} \cdot \frac{L}{T} = \frac{[W \cdot H]}{L^2}$ puissance surfacique.

Formule: $\text{Div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} E_j B_k) = \epsilon_{ijk} (\partial_i E_j) B_k + \epsilon_{ijk} E_j \partial_i B_k$
 $= (\epsilon_{kij} \partial_i E_j) B_k - E_j (\epsilon_{jik} \partial_i B_k) = \text{Rot}(\vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \text{Rot}(\vec{B})$

Soit (S) une surface $\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = P_{\text{transf}} = \Phi_{\text{radiat}}$

$\vec{\Pi}$ est la puissance surfacique portée par l'onde plane.

B) Vecteur de Poynting d'une OEPH :

↳ très précis

Soit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ alors $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$.

* \triangle Le vecteur de Poynting étant un produit \Rightarrow interdit en \mathbb{Q}
(opéré NL)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 E_0 E_0 c}{\epsilon_0 c^2} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{\Pi} = \epsilon_0 E_0^2 c \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

flux moyen transporté: $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = \epsilon_0 E_0^2 c \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$

$$\text{Soit } \langle \vec{\Pi} \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$$

* On a $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\epsilon_0 c^2} \right) \cos^2(\omega t - kz) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$

Donc en moyenne $\langle w \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

* On voit qu'en moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = \langle w \rangle_T \cdot c$

Le flux d'NRS $\langle \vec{\Pi} \rangle_T$ moyen correspond à la densité d'NRS moyenne $\langle w \rangle_T$ qui avance selon \vec{e}_z à la célérité de la lumière.

Ex O D G : * flux solaire $\phi = 1000 \text{ W/m}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$

Soit $E_0 = \sqrt{\frac{2\phi}{\epsilon_0 c}} \Rightarrow E_0 = 868 \text{ Vm}^{-1}$ ($B_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$)

* Laser de labo $P = 1 \text{ mW}$ sur $\phi = 97 \text{ mm} \Rightarrow \phi = 2263 \text{ W/m}^2 \Rightarrow E_0 = 1,3 \text{ kVm}^{-1}$
($B_0 \approx 4,3 \mu\text{T}$)

§ Application :

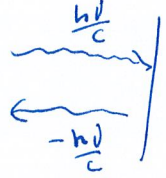
Pression de Radiation

Approche quantique :

Pour 1 \vec{q} qui rebondit

$$\Delta P = 2 \frac{h\nu}{c}$$

soit $E = h\nu$ l'NES d'1 \vec{q} et $P = \frac{h\nu}{c}$ sa pth hrvt.



de il q α : $dN = \frac{d\vec{E} \cdot \vec{e}}{h\nu} = \frac{\langle \|\vec{T}\| \rangle \times S \cdot dt}{h\nu} = \frac{\langle w \rangle c S dt}{h\nu} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2 c \times S dt}{h\nu}$
 \vec{q} qui frappe pth dt.

$$\text{Soit } P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta P}{S dt} = \frac{2 h\nu}{c} \times \frac{dN}{S dt} = \frac{2 h\nu}{c} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S \frac{dt}{h\nu} \right) \frac{1}{S dt} = \epsilon_0 E_0^2$$

Pression de Radiation :

$$P = \epsilon_0 E_0^2$$

$$\frac{1}{h\nu \epsilon_0} = 3 \cdot 10^9 \text{ SI} \quad \epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$$

$$\text{Soit } E_0 = 1 \text{ kV m}^{-1} \Rightarrow P = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \\ (15 \text{ N/km}^2)$$

Valeur Soles

$$\phi \approx \phi_{\text{sol}} \Rightarrow$$

$$E_0 \sim 1 \text{ kV m}^{-1} \\ P \sim 8,8 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

on veut $\alpha \approx 0,1 \text{ g}$ et $m = 1 \text{ T}$

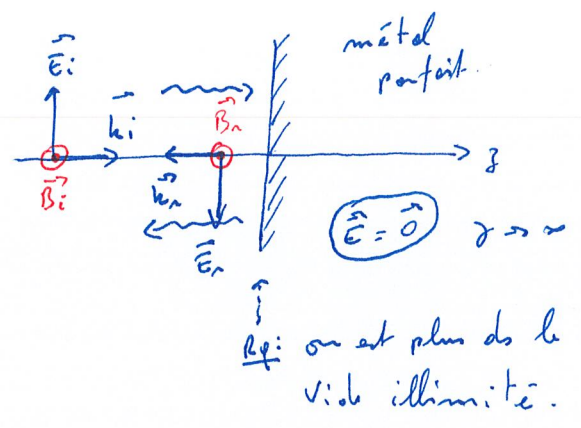
$$F = P S = 100 \text{ N}$$

$$\text{il faut } S = \frac{F}{P}$$

$$S_{\text{vaih}} = 11 \text{ km}^2$$

4) Reflection d'une onde EN plane

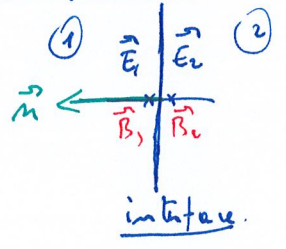
Def de l'onde $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ (SP+) \vec{e}_x
 et $\vec{E}_r = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + kz)}$ (SP-) \vec{e}_x
 Coefficient de reflect° $\underline{r} = r e^{i\phi}$



1) relat° de passage [Dém° HP]

On suppose qu'à l'interface avec le métal peut exister une distribut° surfacique $\sigma(n, t)$ de charge ainsi qu'un courant surfacique $\vec{j}_s(n, t)$.

Les relat° dites "de passage" de l'onde sont admises:



$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

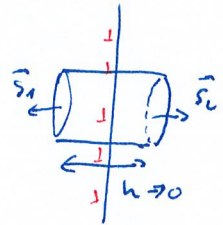
$\Rightarrow E_{||}^{\text{I}} = E_{||}^{\text{II}}$ continuité de la composante tangentielle de \vec{E}

$\Rightarrow E_{\perp}^{\text{I}} - E_{\perp}^{\text{II}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ discontinuité de la composante normale.

Dém° 1

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$
 $E_{||}^{\text{I}} H - E_{||}^{\text{II}} H + \dots$
 $= \lim_{e \rightarrow 0} -eH \times \frac{\partial B_{||}}{\partial t} \rightarrow 0$

(ii) N.G.



$\vec{E}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{s}_2 + 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
 $= s_1$
 $(E_{\perp}^{\text{I}} - E_{\perp}^{\text{II}}) \delta = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

$\Rightarrow B_{\perp}^{\text{I}} = B_{\perp}^{\text{II}}$ Continuité comp normale
 $\Rightarrow B_{||}^{\text{I}} - B_{||}^{\text{II}} = \mu_0 j_s$ Discontinuité comp. Tangentielle de \vec{B} .

Dém° 2

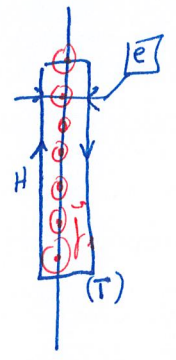
$\text{Div}(\vec{B}) = 0$
 $\vec{B}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{s}_2 = 0$
 $B_{||}^{\text{I}} \delta - B_{||}^{\text{II}} \delta = 0$
 $B_{||}^{\text{I}} = B_{||}^{\text{II}}$

$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\vec{j} = \frac{\vec{j}_s}{e}$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot e \vec{H} + \epsilon_0 \mu_0 e H \frac{\partial E_{||}}{\partial t}$

$B_{||}^{\text{I}} H - B_{||}^{\text{II}} H = \mu_0 \frac{j_s}{e} \times e H + \lim_{e \rightarrow 0} e H \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_{||}}{\partial t}$

$B_{||}^{\text{I}} - B_{||}^{\text{II}} = \mu_0 j_s$



Y1 Reflète° sur conducteur parfait:

Dans l'hypothèse du conducteur parfait $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Div} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E \rightarrow \infty$
 soit ici $\vec{E}_r = 0 \quad \forall r, \forall t.$ $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ dans le métal.

Relat° de passage : $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_n = 0 \Rightarrow \vec{E}(t, x=0) = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 0 \quad \forall t \text{ au } x=0$

$\vec{E}_2 = 0$

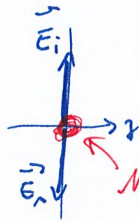
fréq et il de \vec{B} ? $B_{\parallel} - B_n = \mu_0 j_s \neq 0$ à priori

ρ_f : en réalité $\exists \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \rightarrow 0$

\Rightarrow un courant peut exister mais uniquement sur la surface.

On a ainsi: $\vec{E}_o e^{j\omega t} + \underline{\underline{\lambda}} \vec{E}_o e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda}} = -1$
 (en $z=0$)

$\underline{\underline{\lambda}} = -1$



noeud de champ électrique

Soit $\vec{E} = E_o e^{j\omega t} [e^{-jkz} - e^{+jkz}] \vec{e}_x = \underline{\underline{E_o}} e^{j\omega t} (-2j) \sin(kz) \vec{e}_x$

noeud $\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$

Soit $\vec{E}(t, z) = +2 E_o \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$ onde stationnaire nulle sur le métal parfait.

Pour trouver \vec{B} on ne peut utiliser directement les relat° de Structure car ce n'est plus une OPP \Rightarrow revient à \vec{B}_i et \vec{B}_r : $\vec{E} \perp \vec{B}$ \vec{B}_r se propage selon $-\vec{e}_z$

$\vec{B}_i = \vec{m} \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \vec{e}_z \wedge \frac{E_o}{c} \vec{e}_x = \frac{E_o}{c} \vec{e}_y$

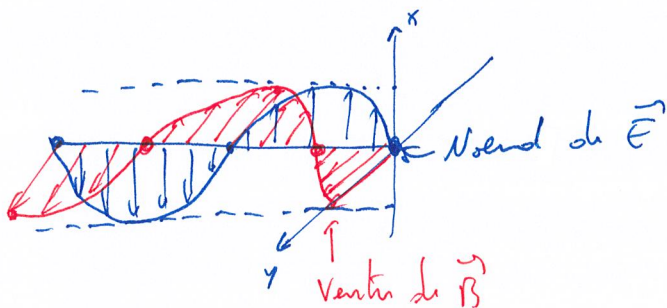
$\vec{B}_r = (-\vec{m}) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = -\vec{e}_z \wedge \left(\frac{E_o}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x \right) = \frac{E_o}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y$

$\left. \begin{aligned} \vec{B}_i &= + \frac{E_o}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r &= + \frac{E_o}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{aligned} \right\}$

vente de champ Magnétique

$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_o}{c} e^{j\omega t} [e^{+jkz} + e^{-jkz}] \vec{e}_y = 2 \frac{E_o}{c} e^{j\omega t} \cos(kz) \vec{e}_y$
 $\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$

Soit $\vec{B}(t, z) = +2 \frac{E_o}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y$



Ex) Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Rq: inutile de revenir aux opp
mais Δ jamais en \mathbb{E}
car NL

$$\vec{\Pi} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_z$$

ou $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ soit

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{c} \sin(2\omega t) \sin(2kz) \vec{e}_y$$

$\frac{T}{2}$ -périodique
 $\frac{\lambda}{2}$ -périodique.

$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle_T = \frac{E_0^2}{c} \langle \sin(2\omega t) \rangle_T \sin(2kz) = 0$ L'NR5 fait du sur-place
 \Rightarrow donc stationnaire.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Représentation?

Coefficient de réflexion en puissance R. On définit

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle}$$

Δ ||. ||
car chgt
sens.

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c$$

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0}$$

Δ IR

$$= -\frac{E_0}{\mu_0} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_z = -\frac{\epsilon_0 E_0^2}{\epsilon_0 c \mu_0} \cos^2(\omega t + kz) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi}_r = -\epsilon_0 E_0^2 c \cos^2(\omega t + kz) \vec{e}_y$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c$$

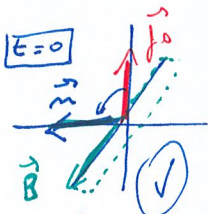
Soit $R = 1$ il y a réflexion totale.

Ex) Courant de surface \vec{j}_s :

On déduit de $\vec{B}(t, 0)$ le courant surfacique $\vec{B}(t, 0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{m}$

ou $\vec{B} \propto \vec{e}_y$ } $\vec{B} \cdot \vec{e}_x = 0 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{m}) \cdot \vec{e}_x = \mu_0 \vec{j}_s \cdot (\vec{m} \wedge \vec{e}_x) = -\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{e}_y = 0$
 $\vec{m} = -\vec{e}_y$

Soit $\vec{j}_s \perp \vec{e}_y$ } \vec{j}_s porté par \vec{e}_x Soit $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$



$$\mu_0 j_s \vec{e}_x \wedge -\vec{e}_y = +\mu_0 j_s \vec{e}_z = +\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(0)$$

$$\vec{j}_s = +\frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

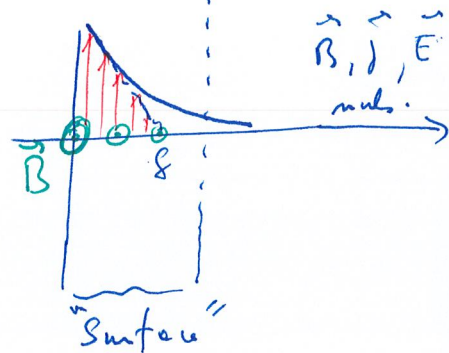
Sj retour sur la pression de radiation

Le courant de surface plongé de la charge \vec{B} donne

lieu à une force de Lorentz: $d\vec{F}_{\text{Lor}} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Soit $d\vec{F}_{\text{Lor}} = j_0 dS \wedge \vec{B}_n$ avec $dS = dS \vec{e}_x$

Soit $\vec{B}_n = B_n \cos(\omega t) \vec{e}_z$ si $z=0$
 \vec{B}_n le champ \vec{B} dans le métal. $\propto \vec{e}_z$.



$$d\vec{F}_{\text{Lor}} = j_0 dS \vec{e}_x \wedge B_n \cos(\omega t) \vec{e}_z = j_0 B_n dS \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad \text{or } \vec{j}_s = \frac{2\epsilon_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

$$= \frac{2\epsilon_0 B_n}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) dS \vec{e}_z \quad \text{si } \delta \rightarrow 0.$$

$$P_{\text{rad}} = \left\langle \frac{dF_{\text{Lor}}}{dS} \right\rangle \quad \overline{P_{\text{rad}}} = \left\langle \frac{2\epsilon_0 B_n}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0 B_n c}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0 B_n c.$$

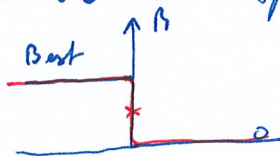
A l'extérieur du métal $B_{\text{ext}} = \frac{2\epsilon_0}{c}$ et dans le métal il est nul.

Soit $B_n = \alpha B_{\text{ext}}$ avec $\alpha < 1$. $\overline{P_{\text{rad}}} = 2\alpha \epsilon_0 E_0^2$

On ne peut conclure sans une modélisation plus fine de l'interface

Mais le bilan énergétique a donné $\overline{P_{\text{rad}}} = \epsilon_0 E_0^2$ et cette expression peut être validée expérimentalement Xupouh à Vial

Soit $\alpha = \frac{1}{2}$



Tout se passe comme si le champ \vec{B} prenait sa valeur est de moitié SUR l'interface. [→ réalité épaisse de peau]

$$R_p: \frac{dI}{dz} \propto e^{-\frac{z}{\delta}} \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\delta}} dz = -\frac{\delta}{1} \left[e^{-\frac{z}{\delta}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1}$$

$$I = j_0 \times A = \int_0^{\infty} j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} dz = j_0 (-\delta) \left[e^{-\frac{z}{\delta}} \right]_0^{\infty} \Rightarrow \boxed{j_0 = \frac{1}{\delta} \times I}$$