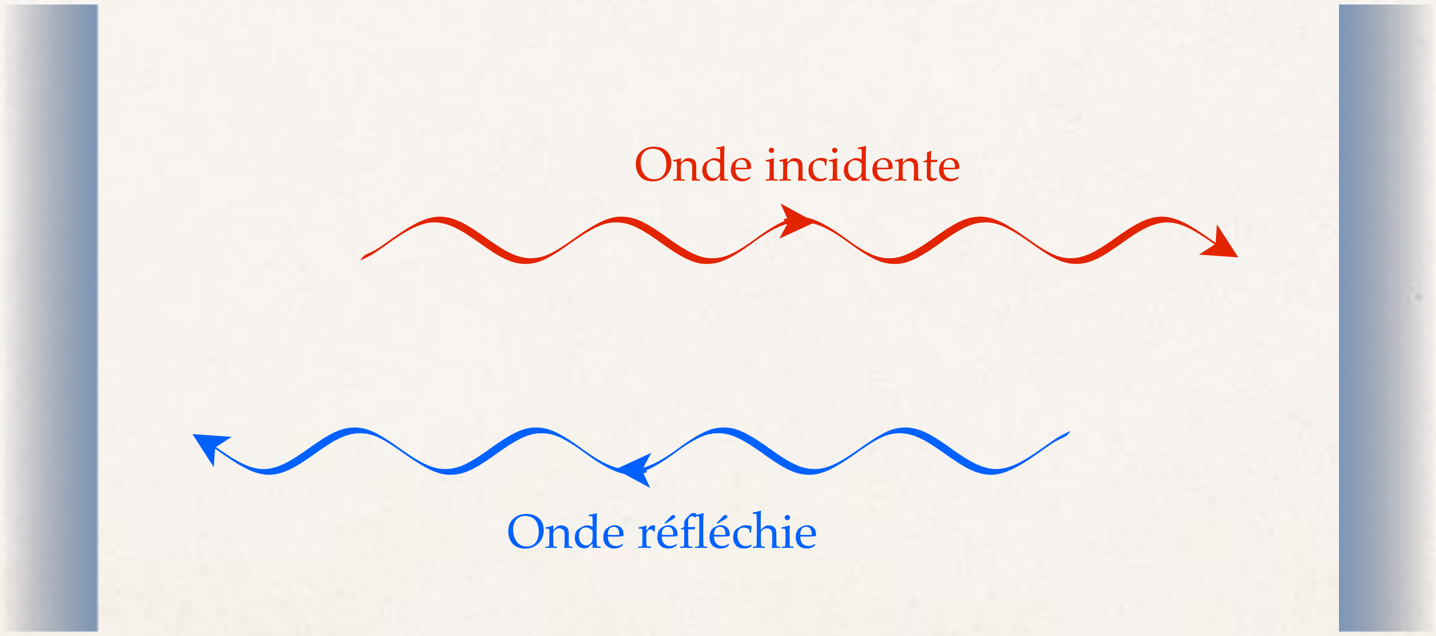
Modes propres et analyse harmonique

Il existe une distinction fondamentale entre une propagation dans un milieu illimité, et dans un milieu borné :

- Corde de guitare
- Tuyaux sonores
- Guides d'ondes

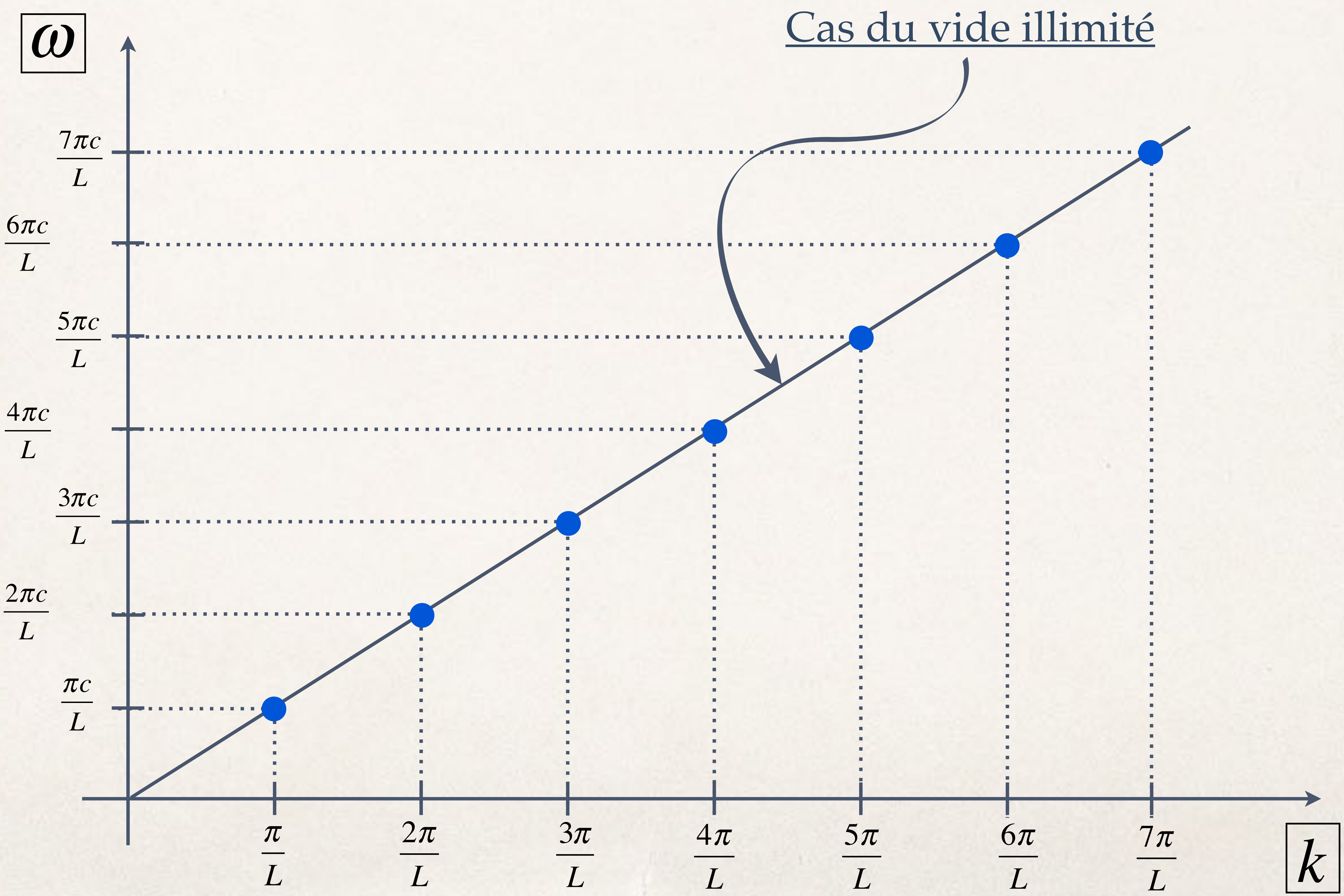


→ La première borne impose des ondes stationnaires.
La seconde impose la quantification des longueurs d'ondes.

Relation de dispersion dans le cas d'un milieu borné

Le confinement de l'onde impose une quantification naturelle des fréquences, spatiales **et** temporelles

On parle alors de **modes propres** (de vibration) ou **MODES**.



Mode

$n=1$

Mode

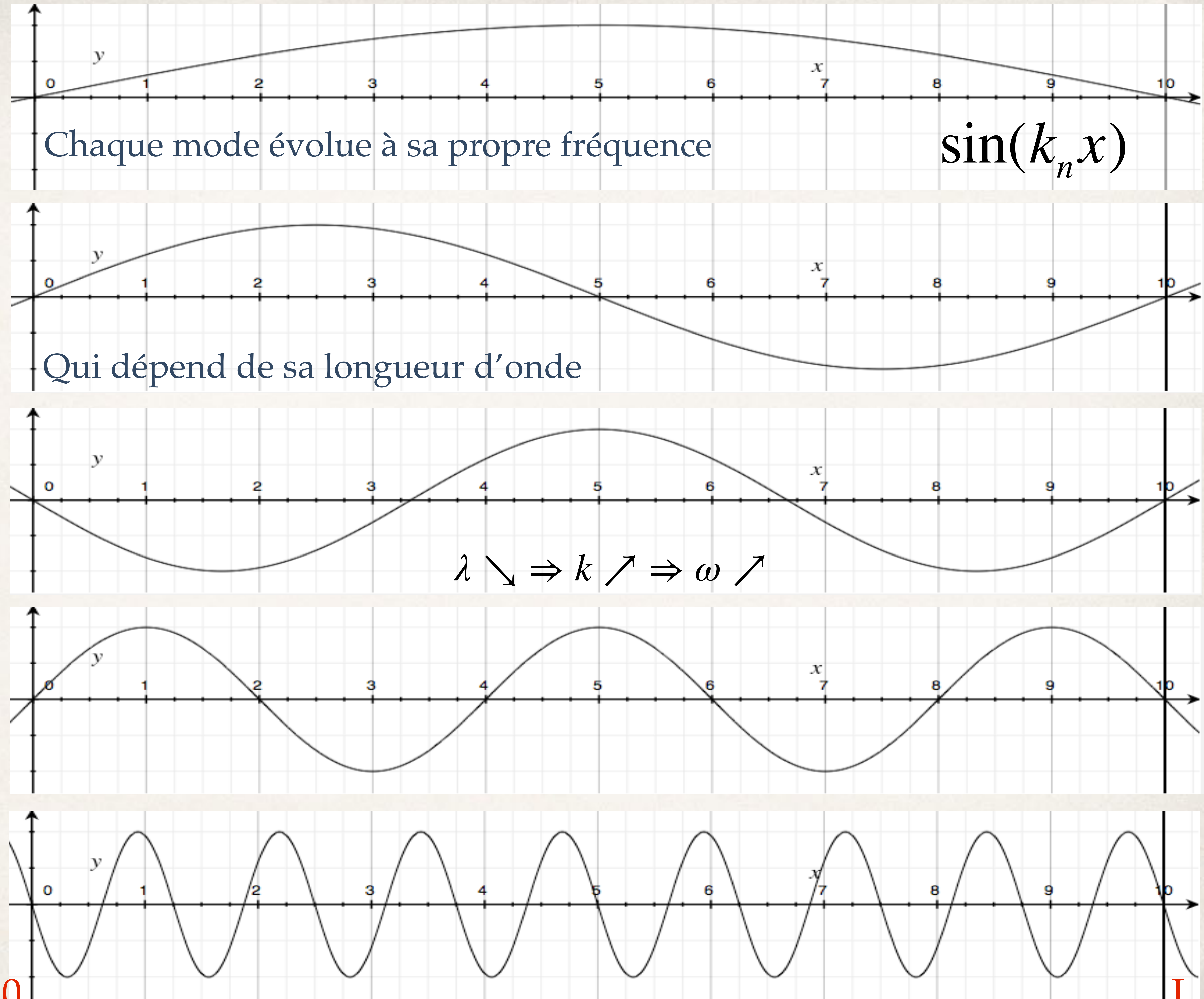
$n=2$

Etc …

$n=3$

$n=5$

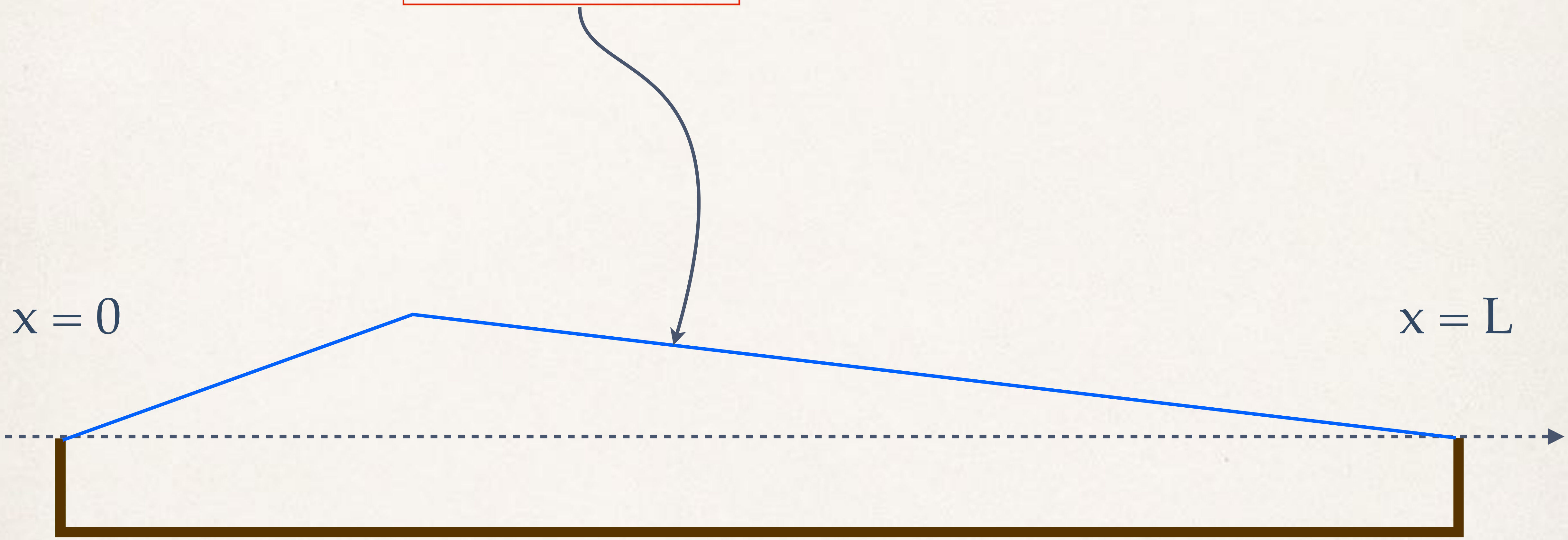
$n=16$



Décomposition Harmonique & évolution

On considère l'état initial d'une corde accrochée à ses deux extrémités

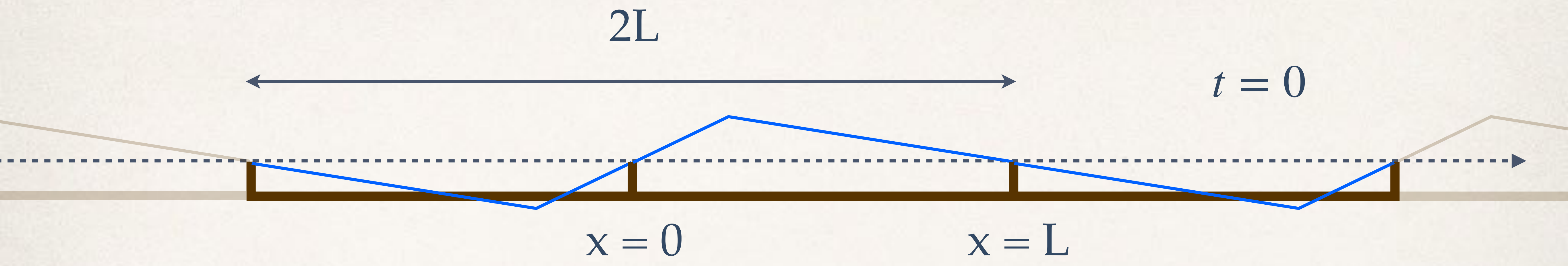
Soit à t = 0 : $\boxed{S(x,0) = f(x)}$



Ici corde pincée :
⇒ Corde de clavecin
⇒ Picking à la guitare

On lâche la corde <u>sans vitesse initiale</u>

On peut imaginer notre corde comme un signal 2L-périodique :



Or un signal périodique peut toujours être décomposé de manière unique en série de Fourier :

=> somme infinie de fonctions sinusoïdales indépendantes et de fréquences spatiales multiples du fondamental :

$$\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}}$$

$$\boxed{f(x) = a_1 \sin(k_1 x) + a_2 \sin(k_2 x) + a_3 \sin(k_3 x) + \ldots.}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_n a_n \sin(k_n x)}$$

Chaque mode est caractérisé de manière unique par :

- sa fréquence spatiale k_n
- son amplitude A_n
- sa phase φ_n

Déterminées par les conditions initiales

La linéarité de l'équation différentielle de propagation garantie une évolution indépendante de chaque mode :

$$\boxed{S(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \varphi_n)}$$

Principe de superposition

$$S(x,0) = f(x) \quad \forall x$$

$$\dot{S}(x,0) = 0 \quad \forall x$$

$$S(0,t) = 0 \quad \forall t$$

$$S(L,t) = 0 \quad \forall t$$

Conditions aux limites

avec $\boxed{\omega_n = k_n c = n\dfrac{2\pi}{T}}$ relation de dispersion et $T = \dfrac{2L}{c}$

Sans vitesse initiale : on montre que $\varphi_n = 0$ $A_n = a_n$

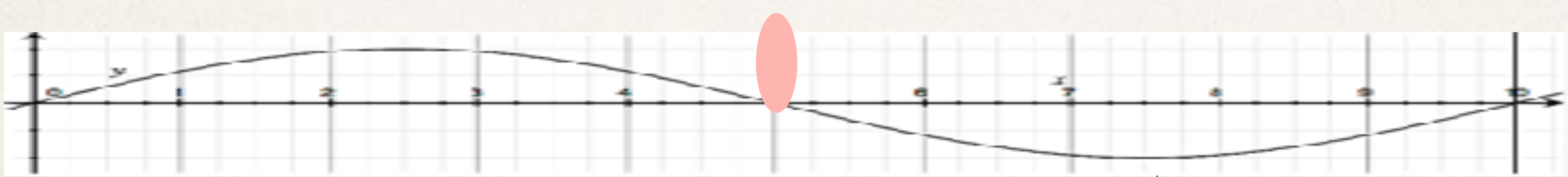
$$\boxed{S(x,t) = \sum_n a_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)}$$

Ainsi le «poids» relatif à chaque mode, d'un point de vue sonore dépend uniquement de la forme initiale de la corde, a travers les coefficients a_n

Exemples concrets :

- Une corde grattée au centre aura un son plutôt «rond» car on donne du poids au fondamental.
- une corde grattée sur son bord, aura un son très métallique car on donne du poids aux harmoniques de hautes fréquences.

- En plaçant son doigts au centre de la corde le guitariste étouffe le fondamental. Il sufit allors de gratter au 3/4 pour favoriser le 1er harmonique de la corde



mode favorisé : n = 2

Au milieu de la corde

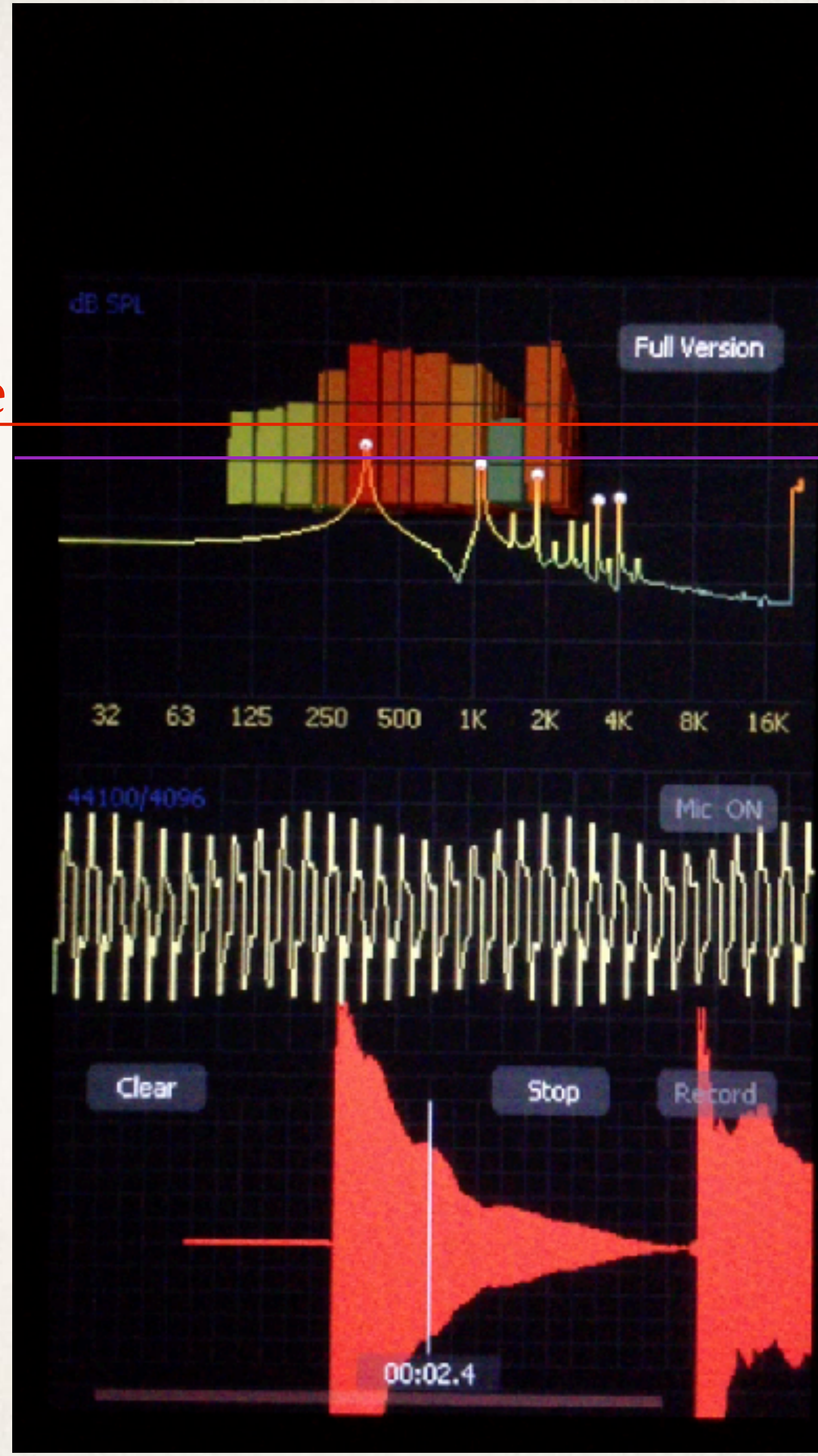
Point milieu

Au bord de la corde

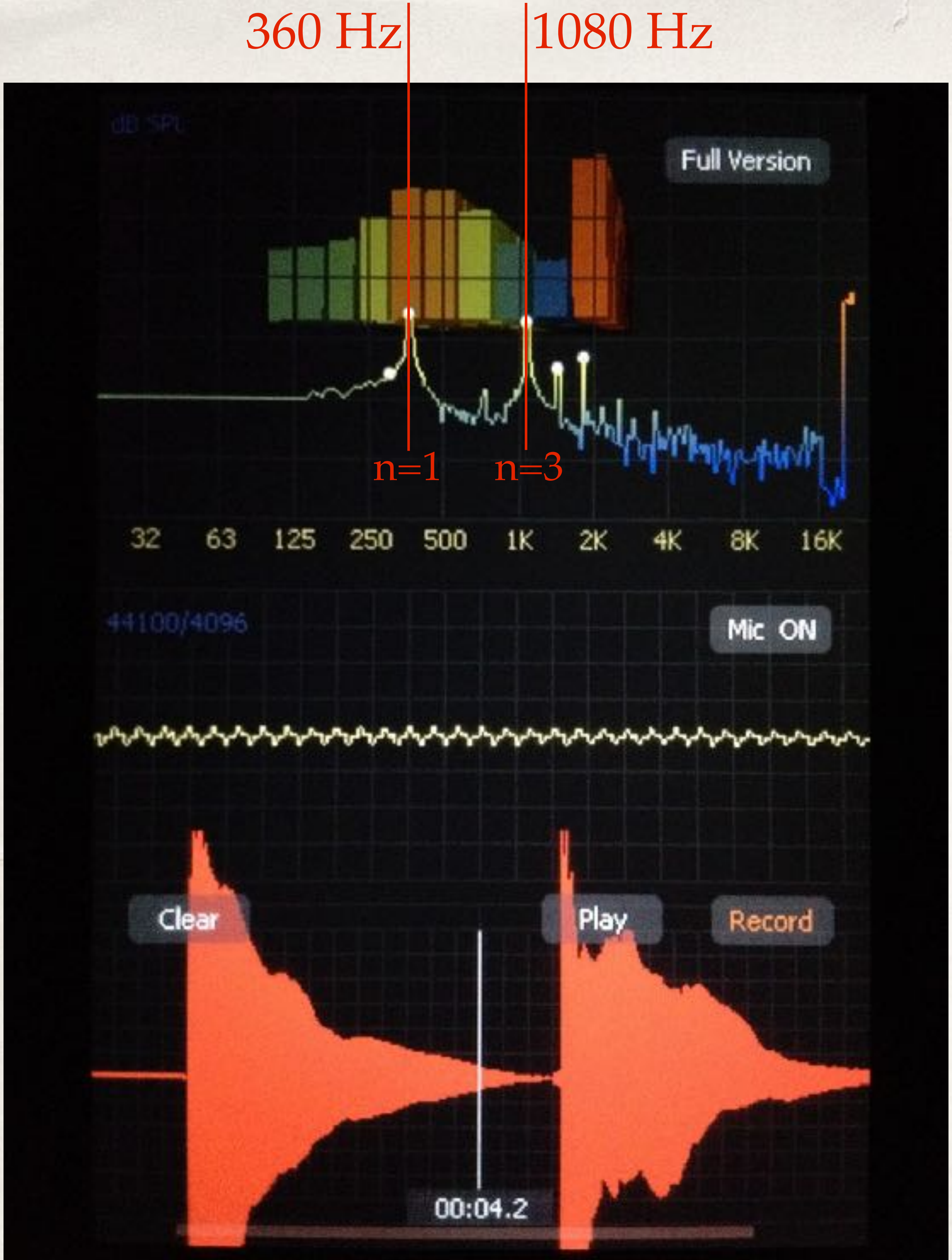
Bord de la corde
«Chevalet»

Au milieu de la corde

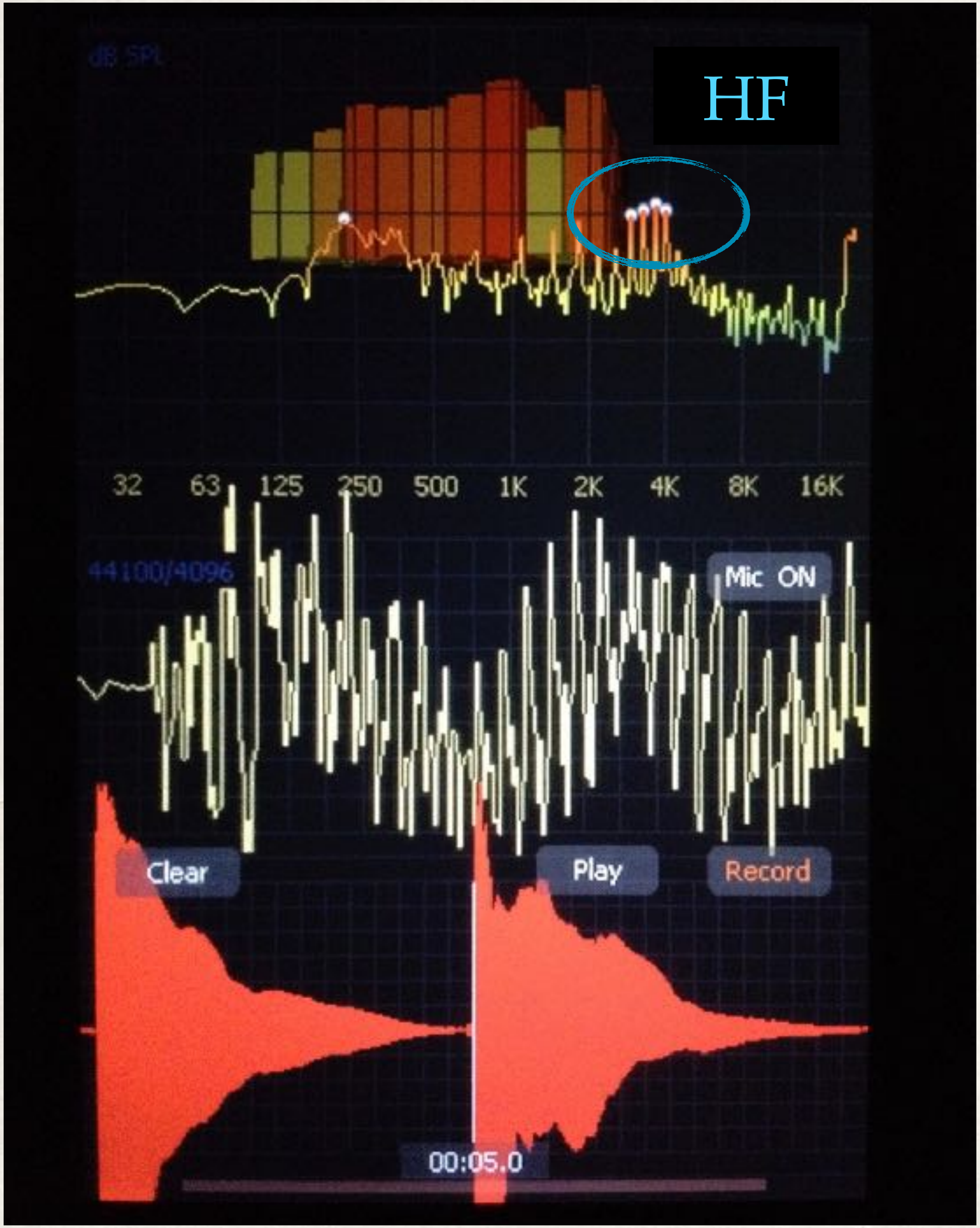
Au bord de la corde



iAnalyzerLite

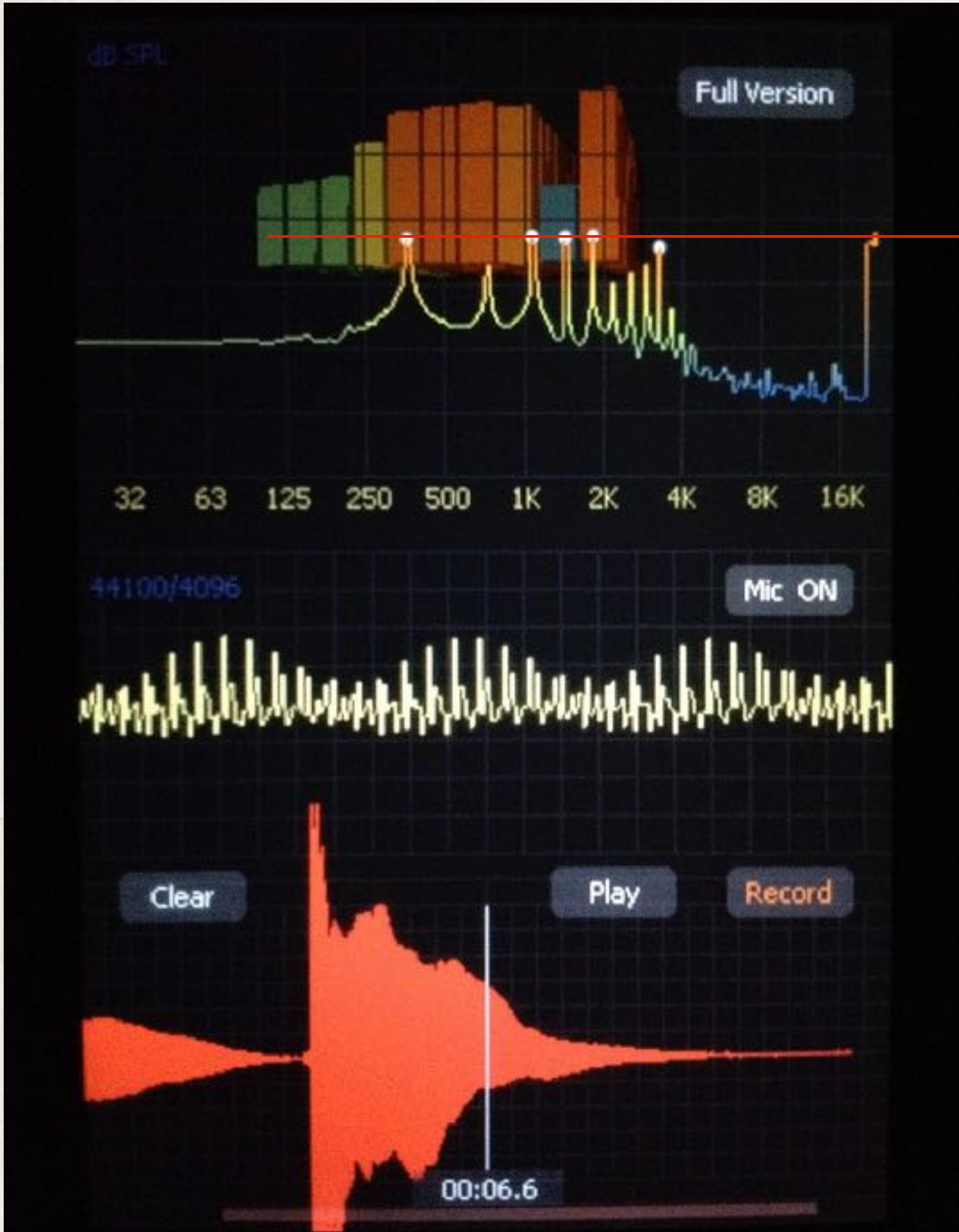


iAnalyzerLite



L’énergie apportée initialement est concentrée sur des modes de hautes fréquences.

iAnalyzerLite



Après un certain temps, l’énergie se re-distribuent entre les différents modes

- couplage interne à la corde => Non Linéarités

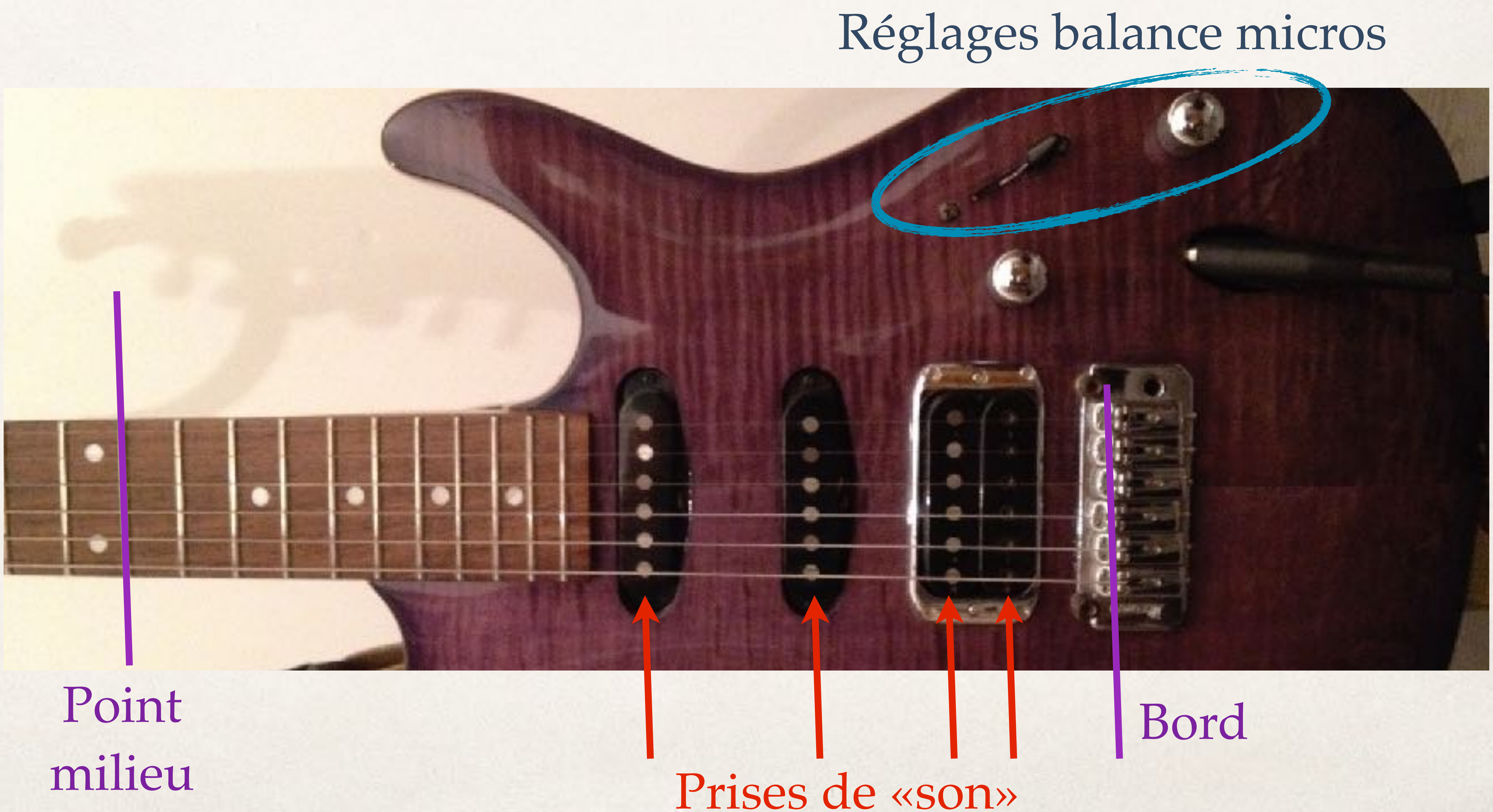
- couplages acoustiques entre les cordes

- couplage par le biais de la guitare elle même (bois)

La différence de son est assez faible :

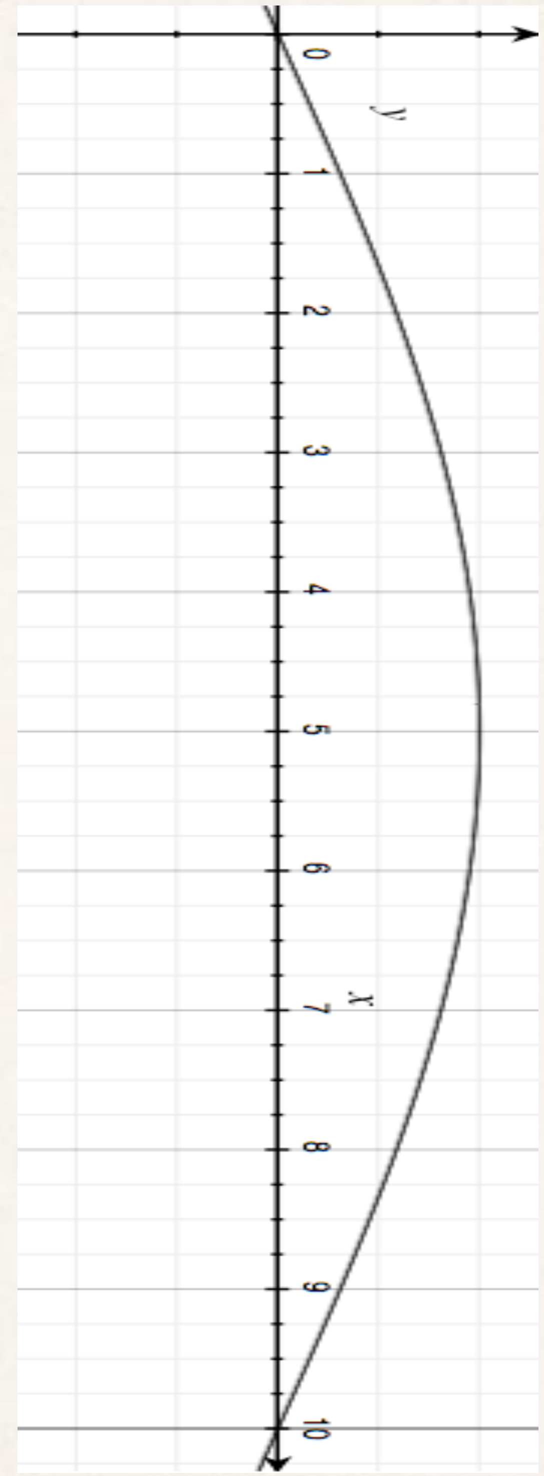
- Les microphones sont placés à différentes positions sous la corde pour capter préférentiellement les BF ou HF.

- L'électronique prend la suite pour amplifier ou filtrer certaines fréquences.

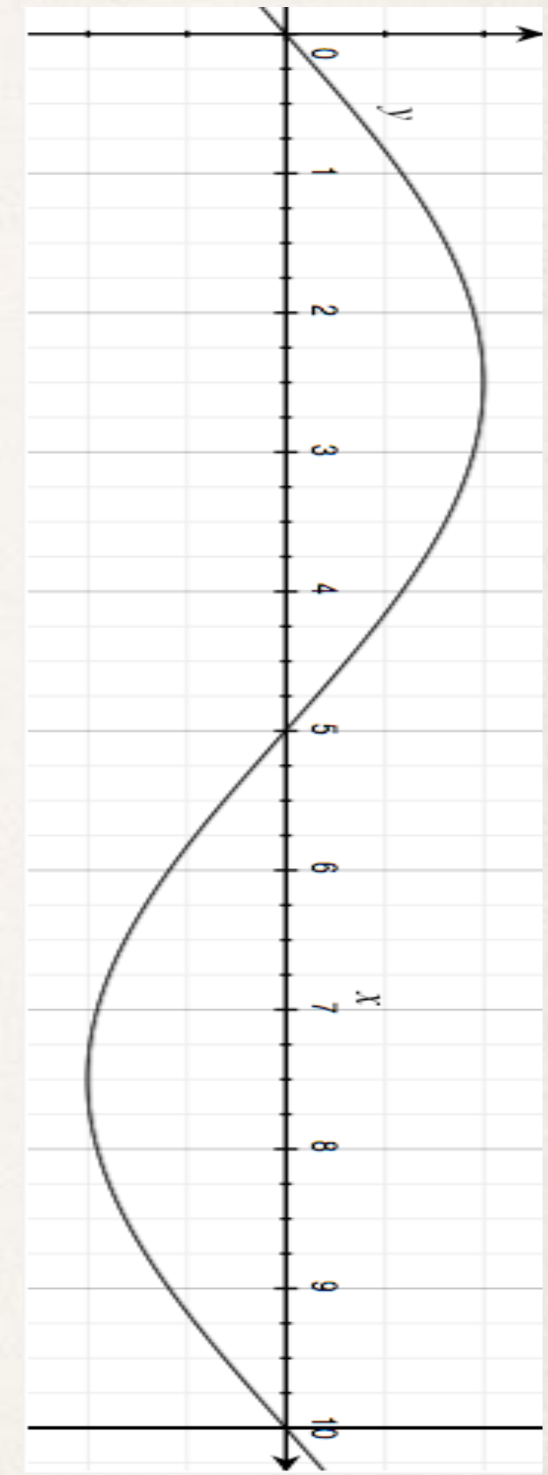


(corde de mi-grave)

$n = 1$



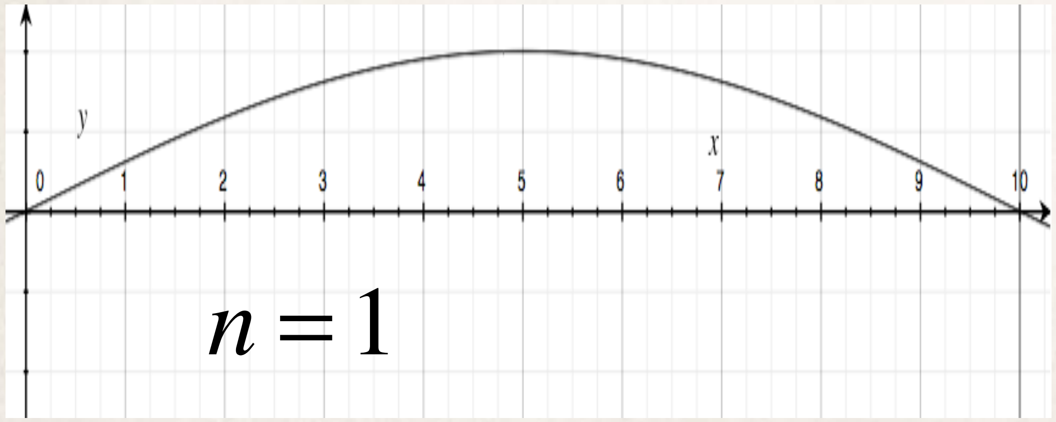
$n = 2$

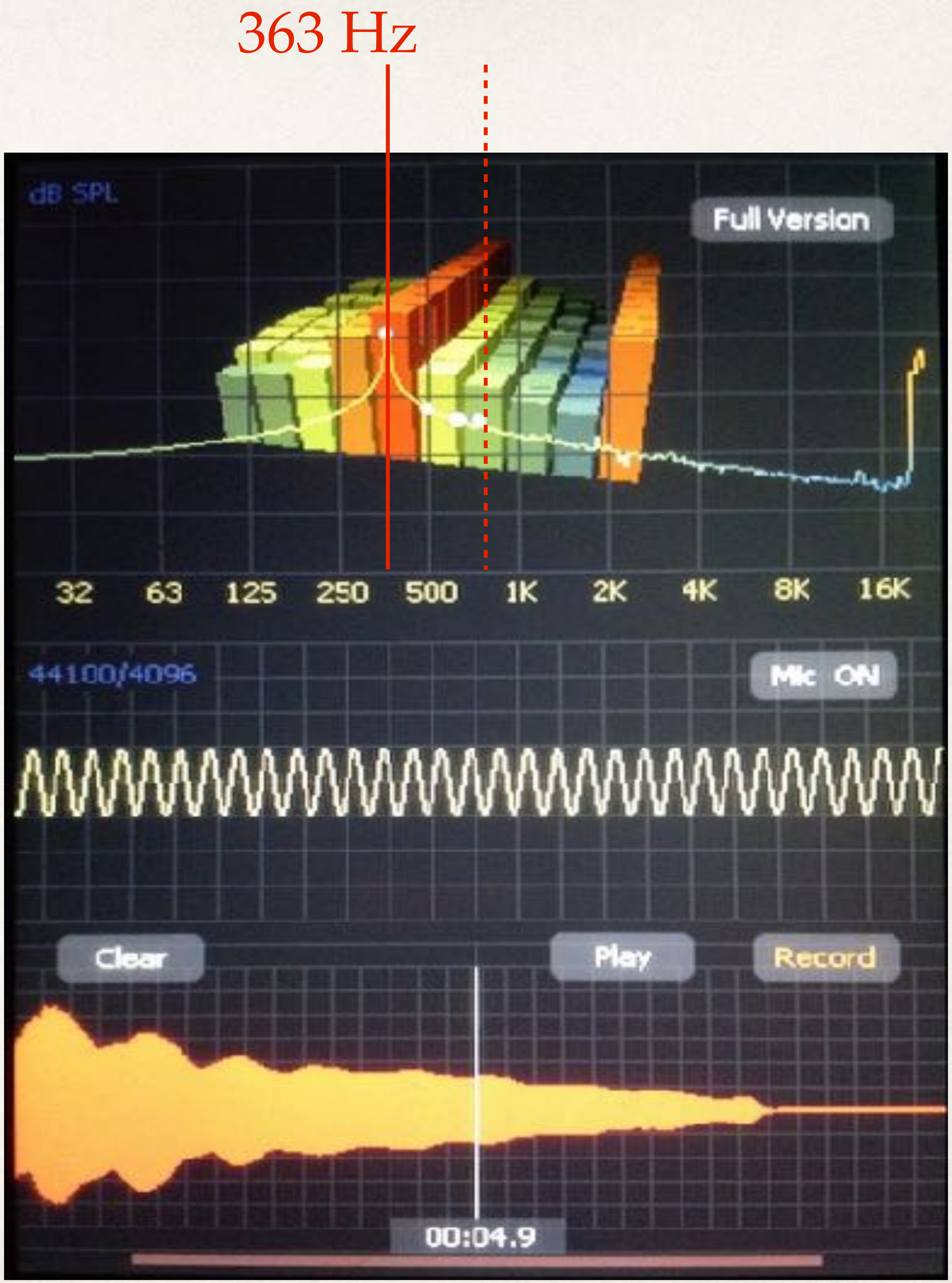


$$\sin(k_n x)$$

Mode fondamental : n = 1

(corde de mi-aigüe)





Premier harmonique :

n = 2

(corde de mi-aigüe)