

Fonctions de transfert et filtrage

EC 4

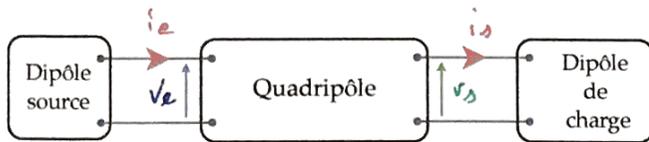
I Fonction de transfert d'un quadripôle

1 - Définitions

α - Quadripôle

Définition :

On appelle quadripôle un réseau électrique ayant quatre bornes.



i_e
 V_e } entrée

i_s
 V_s } sortie

Ceux-ci sont a priori dépendants de l'ensemble de la chaîne d'électronique notamment de la source et de la charge.

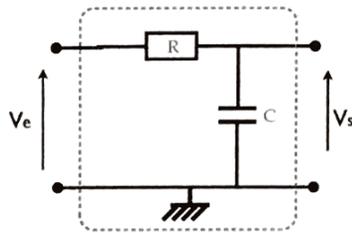
Définition :

On qualifie d'actif un quadripôle alimenté par des sources extérieures. C'est à dire s'il reçoit de l'énergie de l'extérieur.

Dans le cas contraire on a un quadripôle passif

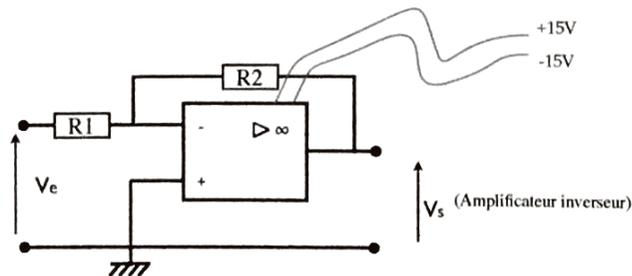
Exemples :

Quadripôle passif



Quadripôle actif

(TP)



* Quadripôle linéaire :

Propriété de linéarité : $V_{e1} \xrightarrow{Q} V_{s1}$ et $V_{e2} \xrightarrow{Q} V_{s2}$

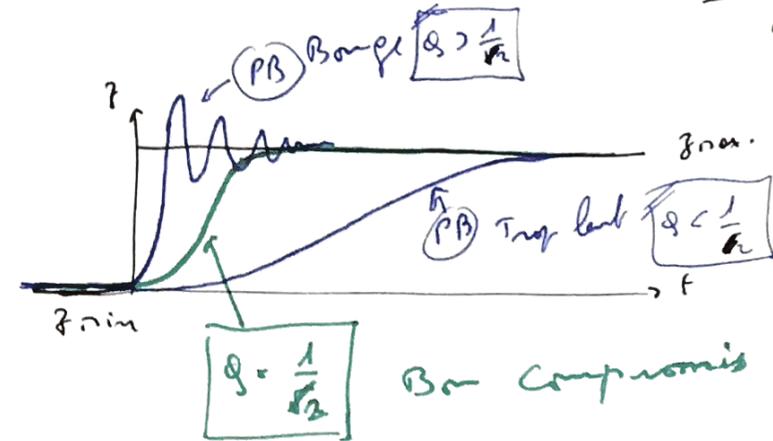
$$\text{Alors } (\alpha V_{e1} + \beta V_{e2}) \xrightarrow{Q} \alpha V_{s1} + \beta V_{s2}$$

Un quadripôle linéaire quelconque obéit à la relation générale suivante :

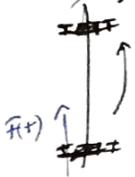
$$a_0 V_e + a_1 \frac{dV_e}{dt} + a_2 \frac{d^2 V_e}{dt^2} + \dots = b_0 V_s + b_1 \frac{dV_s}{dt} + b_2 \frac{d^2 V_s}{dt^2} + \dots$$

C'est la relation de linéarité la plus générale entre ses tensions d'entrée et sortie

R_p : Transitoire Mvt D'ordre :



exemple réel
d'un
comportement
passe-bas



Bon Compromis

β - Fonction de transfert

On se donne \underline{V}_e et \underline{V}_s des signaux complexes en entrée et sortie :

$$\begin{cases} \underline{V}_e = V_{e_0} e^{j\omega t} \\ \underline{V}_s = V_{s_0} e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

Définition :

Elle a pour but de relier le signal sinusoïdal de sortie au signal sinusoïdal d'entrée :

- en module
- en phase

$$\underline{H}(j\omega) \equiv \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\text{signal de sortie}}{\text{signal d'entrée}}$$

Le complexe $\underline{H}(j\omega)$ est appelée fonction de transfert

(Définie tant que $V_e \neq 0$)

Elle se déduit de la relation de linéarité :

Propriétés :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{v_{s_0}}{v_{e_0}} = G(\omega)$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$$

On notera :

$$\underline{H}(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

gain

déphasage

pour \mathbb{C} $[a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2 + \dots] \underline{V}_e = [b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + \dots] \underline{V}_s$

Soit $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2 + \dots}{b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + \dots} \in \mathbb{C}$

\underline{H} peut s'écrire $\underline{H} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

* Représentation logarithmique de H :

On préfère décrire le gain comme le logarithme du rapport des amplitudes des signaux (sortie / entrée). Celui-ci se mesure en déciBel (dB) selon la formule :

$$G_{dB} \equiv 20 \log_{10}(|H|)$$

log : $G_{dB} = 20 \log_{10}(|H|)$

pratique/précis *puissance*

exemples + échelle de décibels :
 0 Bell \rightarrow pratique 0 dB \rightarrow 2000 dB

Application directe : Exprimer le gain en dB d'une division par $\sqrt{2}$ de l'amplitude du signal.

Soit $|H| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $G_{dB} = 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 20 \log_{10}(2) = -10 \cdot 0,3$

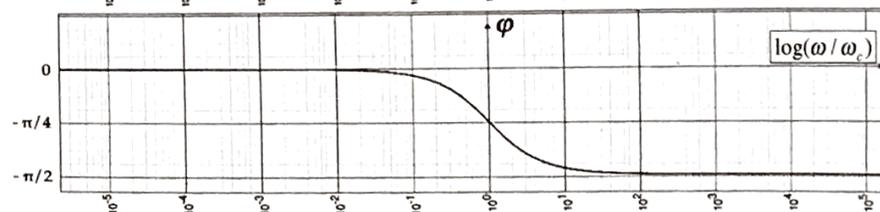
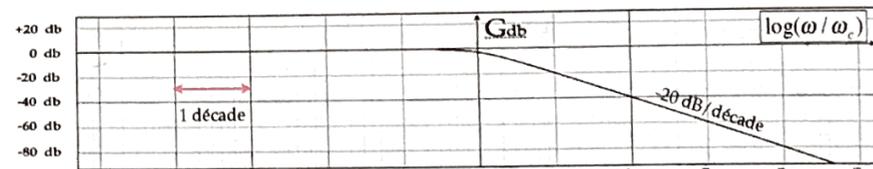
$G_{dB} = -3 \text{ dB}$ \rightarrow identifie la courbe.

$\square \sqrt{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB en log}$
 $\square 10 \Leftrightarrow -20 \text{ dB}$
 Berton Attenuation

* Diagrammes de Bode :

Il s'agit d'un double diagramme qui caractérise une fonction de transfert :

- 1 - $G_{dB}(\omega)$ en fonction de $\log_{10}(\omega)$ (ou $\log_{10}(\omega/\omega_c)$)
- 2 - $\varphi(\omega)$ en fonction de $\log_{10}(\omega)$ (ou $\log_{10}(\omega/\omega_c)$)



1 décade = facteur dix en fréquence

I 2) exemple simple.

Circuit RC

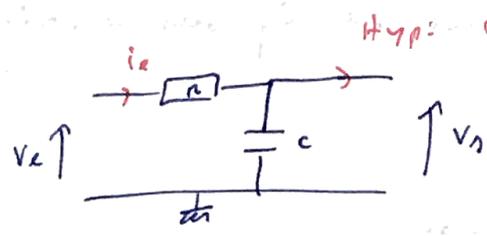
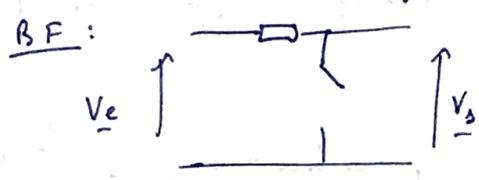


schéma équivalent :



BF:

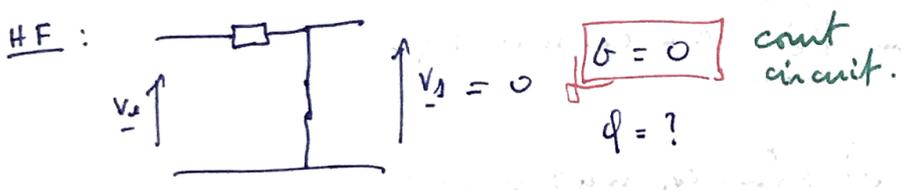
$$i_e = i_s + 0 = 0$$

$$V_R = R i_e = 0$$

$$V_e - V_d = R i_e = 0$$

$$\underline{V_e = V_d}$$

$G = 1$
($G_{dB} = 0$)
 $\phi = 0$



Conclusion pour bon \rightarrow signal présente à BF

2) Cas général:

$$\underline{H} = \frac{V_d}{V_e} = \frac{Z_c}{R + Z_c} = \frac{1/j\omega c}{R + 1/j\omega c} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \underline{H}$$

$\omega_c = (RC)^{-1}$ et $H_0 = 1$

$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\phi = -\arctan(x)$

3) Comp. asymptotique $\omega \ll \omega_c$ (BF)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \approx 1$$

$G = 1$ $G_{dB} = 0$
 $\phi = 0$

HF $\omega \gg \omega_c$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \approx -j\frac{\omega_c}{\omega} \propto \frac{1}{\omega}$$

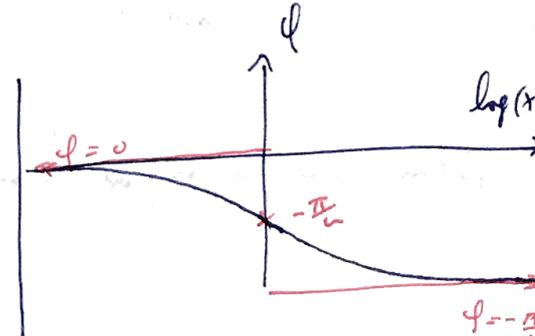
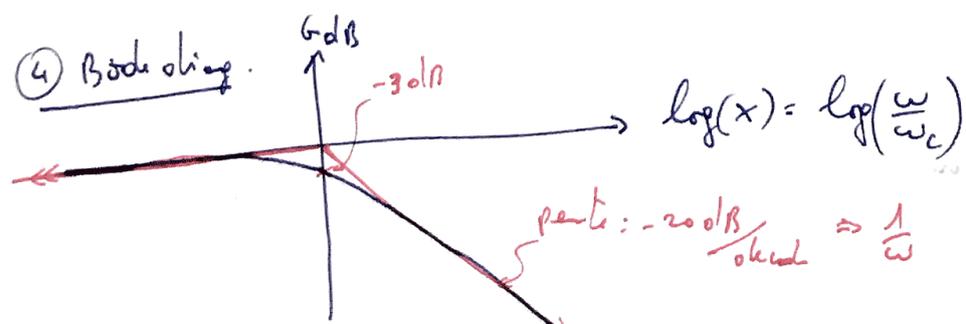
$G = \frac{\omega_c}{\omega}$ $G_{dB} = -20 \log(\frac{\omega}{\omega_c})$
 $\phi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_c$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$$

$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $G_{dB} = -3dB$
 $\phi = -\frac{\pi}{4}$

$\omega_c = \frac{1}{RC}$
 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$



II Analyse harmonique de signaux périodiques.

1) Moyenne. Def \rightarrow

2) Moyenne quadratique \rightarrow

3) Cas général égalité de Parseval

$$S_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2}$$

Démo:

$$s(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \phi_k) = \sum_0^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \phi_k) \quad \text{avec } \phi_0 = 0$$

$$\text{Soit } s^2(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\omega t + \phi_m) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \phi_n) \right)$$

$$S_{eff}^2 \langle s^2(t) \rangle = \sum_m \sum_n \langle a_m a_n \cos(m\omega t + \phi_m) \cos(n\omega t + \phi_n) \rangle$$

Tableau de termes \uparrow additionnés
(tous les cas)

$m \setminus n$	0	1	2	3	...
0	$a_0 a_0$	0	0	0	0
1	0	$a_1 a_1$	0	0	0
2	0	0	$a_2 a_2$	0	0
3	0	0	0	$a_3 a_3$	0
	0	0	0	0	$a_n a_n$

* Soit $m = n$

$$\langle a_m^2 \cos^2(m\omega t + \phi) \rangle = \frac{a_m^2}{2} \quad m \neq 0$$

$$\langle a_0^2 \rangle = a_0^2 \quad m = 0$$

* Soit $m \neq n$:

$$\left. \begin{aligned} \cos a \cos b &= \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned} \right\} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\langle a_m a_n \cos(m\omega t + \phi_m) \cos(n\omega t + \phi_n) \rangle = \frac{a_m a_n}{2} \left[\langle \cos(m+n)\omega t + \phi_m + \phi_n \rangle + \langle \cos(m-n)\omega t + \phi_m - \phi_n \rangle \right]$$

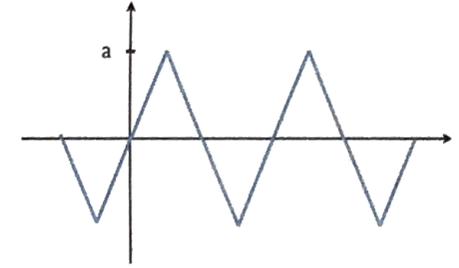
Finalement il ne reste que les termes diagonaux:

$$S_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2}$$

Retour sur le signal triangulaire.

Retour sur le signal triangulaire :

La théorie de Fourier permet de calculer les coefficients de ce signal :



$$s(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{9} + \frac{\sin(5\omega t)}{25} - \frac{\sin(7\omega t)}{49} + \dots \right]$$

Le calcul d'intégrale fait en TD permet donc déterminer le résultat de la série suivante :

$$s_{eff}^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{8a}{\pi^2} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \right)^2$$

$$\longrightarrow s_{eff}^2 = \frac{32a^2}{\pi^4} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \dots \right] \xrightarrow{\infty} \frac{a^2}{3}$$

Pour un signal triangle :

```
>>> K=8/(3.141592653)**2
>>> def a(p):
...     return K*(-1)**p/(2*p+1)**2
...
>>> S=0
>>> for p in range(1000):
...     S+=0.5*a(p)**2
...
>>> S
0.33333333335836124
```

Vérification en Python

III Les filtres passifs

[On ne s'intéresse ici qu'aux filtres sans alimentation extérieure]

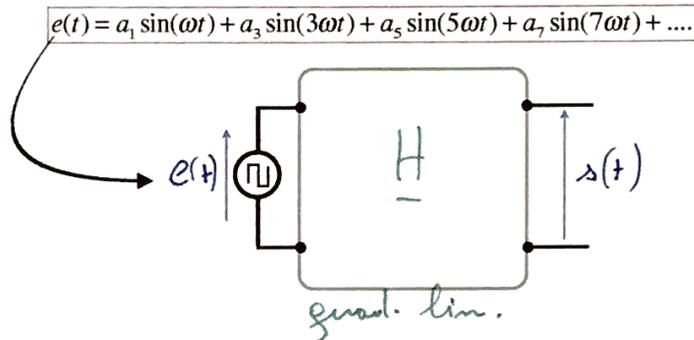
1 - Cadre d'étude des filtres

α - Définition

un filtre est un quadripôle, caractérisé par sa f.t. de transfert H et qui a pour propriété de ne sélectionner que certaines fréquences du signal d'entrée

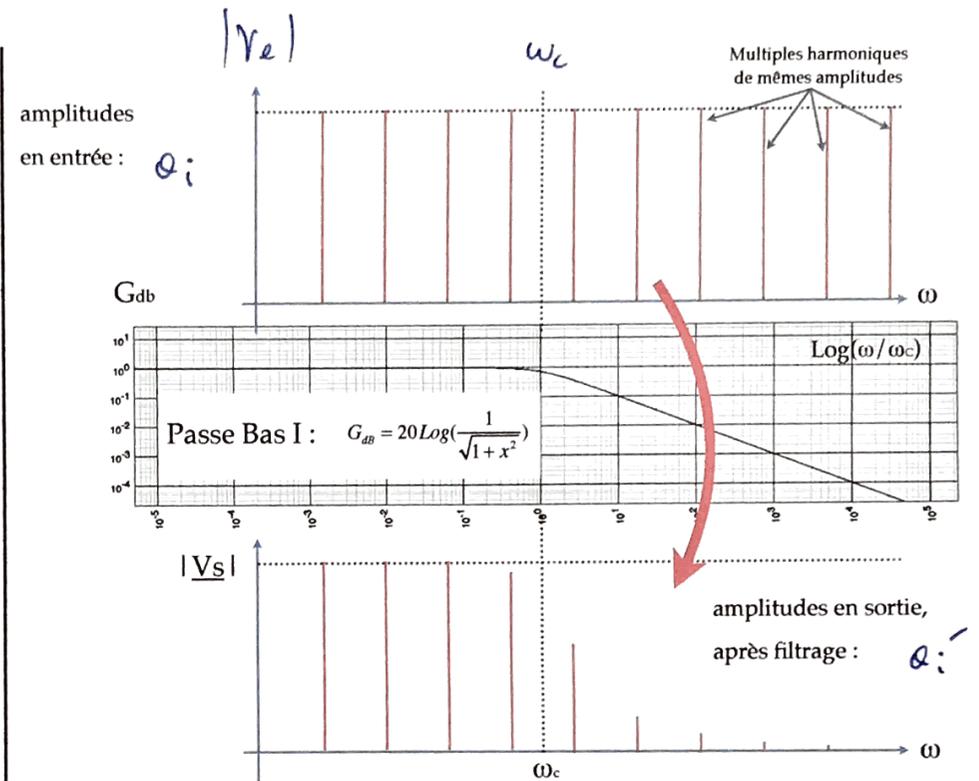
Exemple schématique :

Conséquence pour des systèmes linéaires :



Le quadripôle transforme l'entrée en une sortie par le biais de la f.t. de transfert :

↳ change l'amplitude et la phase de chaque harmonique en f.t. de la fréquence



Le signal de sortie s'écrit :

$$s(t) = a'_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a'_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + a'_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + a'_7 \sin(7\omega t + \varphi_7) + \dots$$

[Rq : On raisonne ici sur l'amplitude mais la phase aussi peut-être altérée]

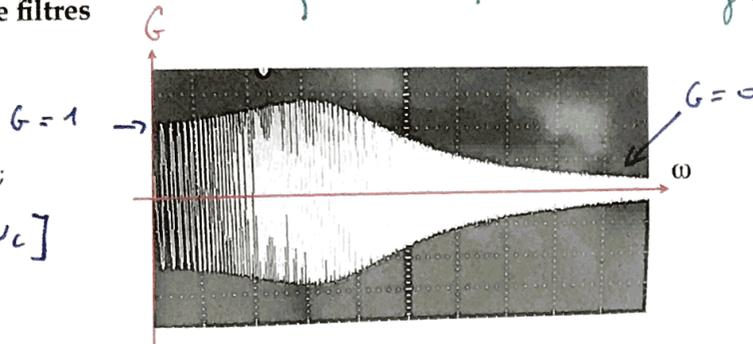
β - Différents types de filtres

Pq: Loi de puissance \rightarrow logarithme

Filtre passe bas

Filtre les hautes fréquences ;
Bande passante :

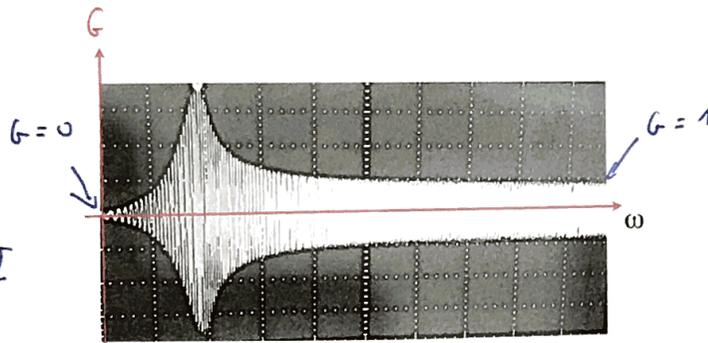
$[0, \omega_c]$



Filtre passe haut

Filtre les basses fréquences ;
Bande passante :

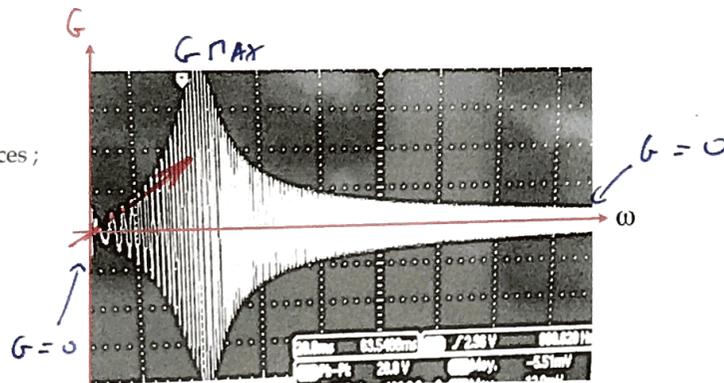
$[\omega_c, \infty[$



Filtre passe bande

Filtre les hautes et basses fréquences ;
Bande passante :

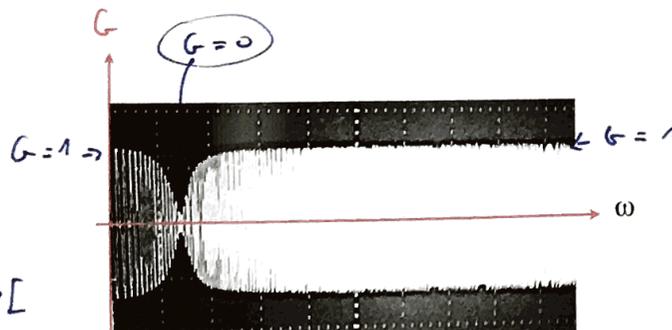
$[\omega_-, \omega_+]$



Filtre coupe bande

Filtre une bande ;
Bande passante :

$[0, \omega_-] \cup [\omega_+, \infty[$



γ - Ordre d'un filtre

Relation de linéarité :

$$\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

On peut toujours la mettre sous la forme d'une fraction rationnelle, rapport de deux polynômes de degrés respectifs n_N et n_D .

On appelle ordre d'un filtre le max. :

$n = \sup(n_N, n_D)$

Exemple : $\underline{H} = \frac{H_0 \delta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$

degré 1 (pointing to the numerator)

degré 2 (pointing to the denominator)

filtre d'ordre 2 : (passe bande)

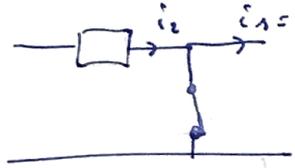
2) Filtrés passifs d'ordre 1

Méthode systématique d'étude d'un filtre.

- * Schéma eq (BF, HF)
- * cas général $H(j\omega)$
- * Comportement asymptotique et compense.
- * Diagramme de Bode.

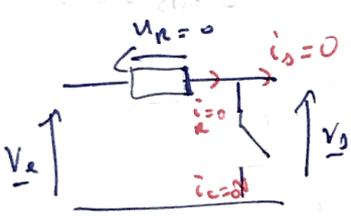
1) Filtré R[L] passe haut.

* BF:



$V_s = 0$ $G = 0$ $\varphi = ?$

* HF:



$V_s + R(i_s + j\omega C) = V_e$
 $G = 1$ $G_{dB} = 0$ $\varphi = 0$
 $\underline{H} = 1$

Conclusion.
passe haut.

* cas général

$\underline{H} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$

forme canonique
 $\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

$H_0 = 1$ $\omega_c = \frac{R}{L}$

$|\underline{H}| = \frac{H_0 X}{\sqrt{1 + X^2}}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(X)$
 $\varphi = + \arctan\left(\frac{1}{X}\right)$

$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}}$

* Comportement asymptotique

(HF) $\omega \gg \omega_c$

$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx H_0 = 1$

$G = 1$ $\varphi = 0$
 $G_{dB} = 0$

(BF) $\omega \ll \omega_c$

$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}$

$G = \frac{\omega}{\omega_c} = X$ $G_{dB} = +20 \log(X)$
 $\varphi = + \frac{\pi}{2}$

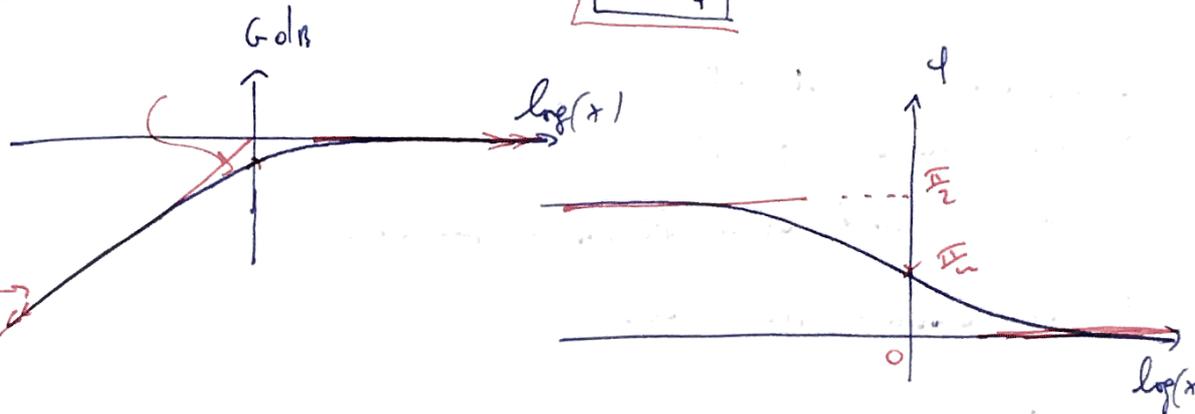
Compteur : $\omega = \omega_c$ $H = \frac{jH_0}{1+j} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = +\frac{\pi}{4}$

$|H| = \frac{1}{\sqrt{2}} = G$ $G_{dB} = -3 \text{ dB}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

* Bode Diag

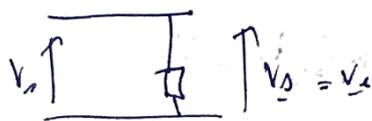
partie +30 dB/decade



A) Filter L-[R] passe bas:

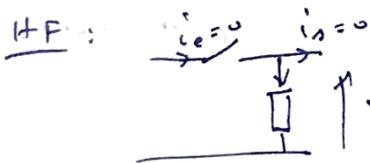
* schéma eq:

BF:



$G = 1$ $G_{dB} = 0$

$\varphi = 0$



$V_s = R \cdot i = 0$ $G = 0$
 $\varphi = ?$

\Rightarrow filter passe bas.

* Cas général:

$H = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{R}{R + j\omega L}$

form canonique

$H = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

Avec $\omega_c = \frac{R}{L}$ $H_0 = 1$

He la suite de l'étude est identique à R-[C]

Système par dérivation

(C2P)

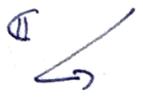
(3)

* Système par dérivation:

$$V_s = \omega_0 \int V_e(t) dt$$

pour la borne

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{V_s(t)\} &= 0 \\ \mathcal{L}\{V_e(t)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{si } \omega_0 \neq 0 \text{ et } \omega_e = 0$$



$$V_s = \omega_0 \int V_e dt = \omega_0 \frac{V_e}{j\omega}$$

$$\text{Soit } \underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

Définition

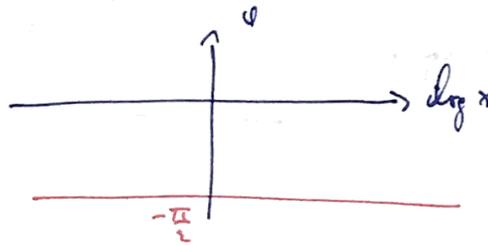
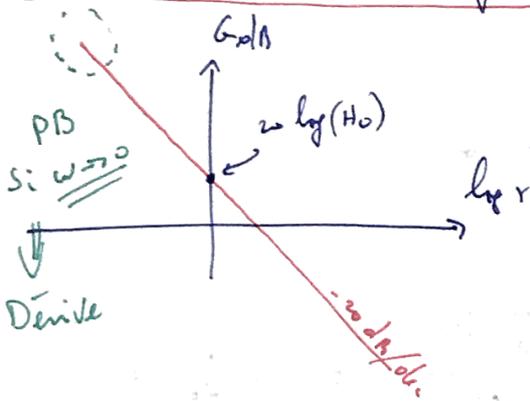
Un système est dit dérivateur si sa fonction de transfert est de la forme

$$\underline{H} = -H_0 j \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{H_0 \omega_0}{j\omega}$$

nécessite un composant actif mais:

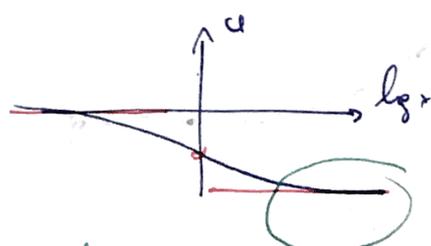
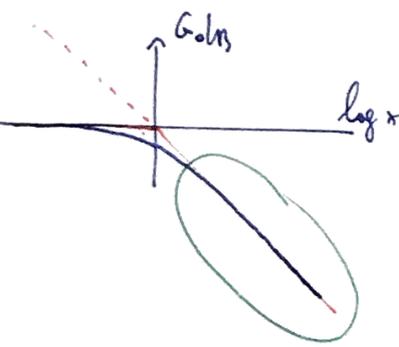
cas général: $|\underline{H}| = \frac{H_0}{X}$

$$G_{dB} = 20 \log(H_0) - 20 \log X$$



$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

cas particulier du passe bas pour $\omega \gg \omega_c$ (HP)



$$\underline{H} = \frac{H_0}{j\omega} = -j \frac{\omega_c H_0}{\omega}$$

$$\omega_0 = \omega_c$$

Comportement pseudo-intégrateur si $\omega \gg \omega_c$

Conclusion:

Le filtre passe bas vérifie les spécifications d'un intégrateur pour $\omega \gg \omega_c$ pour les fréquences du signal.

Derivatives

$$V_s \equiv \frac{d}{dt}(V_e)$$

$$\rightarrow \underline{V}_s = j \frac{\omega}{\omega_0} \underline{V}_e$$

Soit $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = j \frac{\omega}{\omega_0}$

Definition: on appelle Dérivée une fonctionnelle dont la fct de transfert peut s'écrire

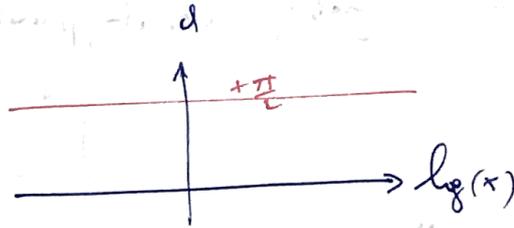
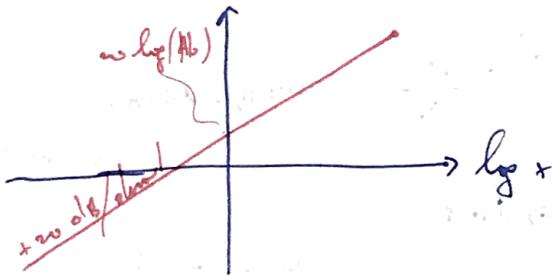
$$\underline{H} = H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}$$

* cas général: $|\underline{H}| = H_0 \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$

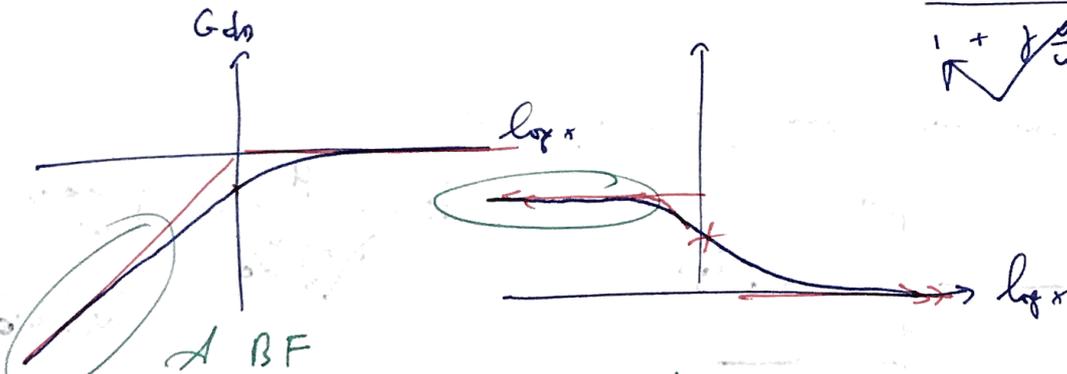
$$G_{dB} = 20 \log(H_0) + 20 \log(x)$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$



Cas particulier du passe haut 1^{er} ordre. **BF**

$$\underline{H} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c} H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx \frac{j \frac{\omega}{\omega_c} H_0}{j \frac{\omega}{\omega_c}}$$



A BF

↳ comportement passe haut. si $\omega \ll \omega_c$

Conclusion: _____

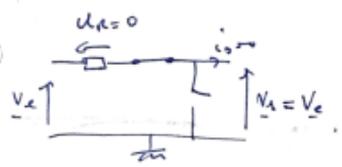
3) Filtre passif du 2nd ordre

↳ Réponse en Tension de RLCC (4)

↳ Filtre RLCC

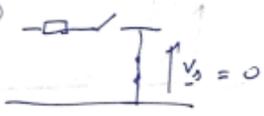
* selon q :

(BP)



$G = 1$ $Q = 0$
 $G_{dB} = 0$

(HP)



$G = 0$

Conclusion : Passé bas

* Cas général : $\underline{H} = \frac{Z_c}{R + Z_c + \frac{1}{j\omega C}}$

$= \frac{1}{1 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega C}}$ $1 = \frac{j\omega RC}{j\omega RC} + \frac{j\omega RC}{\omega^2 \sqrt{LC}}$

Form canonique

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

$H_0 = 1$
 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$R \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{Q}$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{\sqrt{\left[1 - x^2\right]^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q \omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \quad (\pm \pi) \text{ si } \omega < \omega_0$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{Q}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\varphi \in]\pi, \infty[)$$

* Comportement asymptotique (au 1^{er})

(BF) $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \approx H_0 = 1$

$G_{dB} = 0$
 $\varphi = 0$

(HF) $\underline{H} = \frac{H_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2}} = -\frac{\omega_0^2 H_0}{\omega^2}$

$G_{dB} = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow G_{dB} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$\varphi = -\pi$

$G < \frac{1}{\omega^2}$

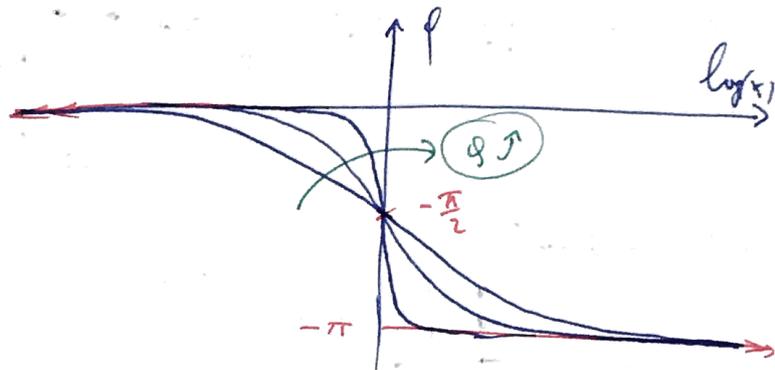
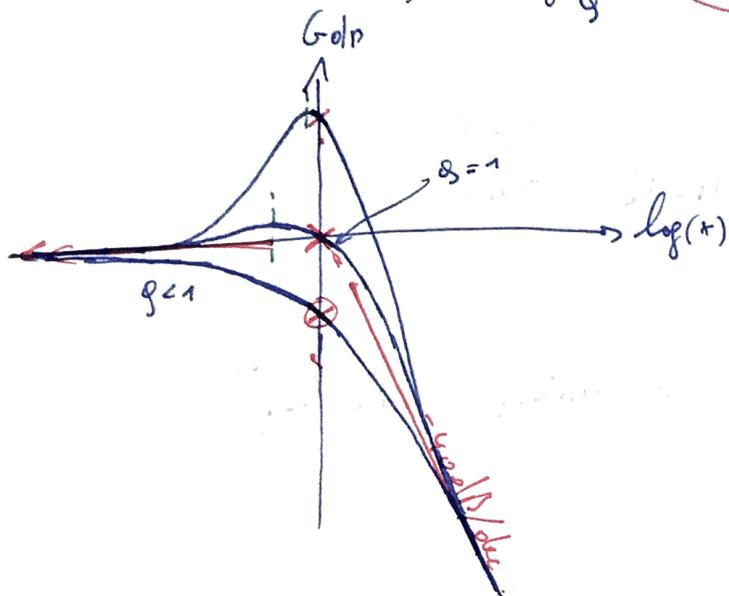
$$\omega = \omega_0$$

$$H = \frac{H_0}{1 - s^2 + j \frac{s}{Q}} = -j Q H_0$$

$$G_{dB} = 20 \log(Q)$$

$$G = Q$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$



① ω_c : il n'y a de bon que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
(en général on ne veut pas de bon).

② Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ le gain peut dépasser ①

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est un bon choix

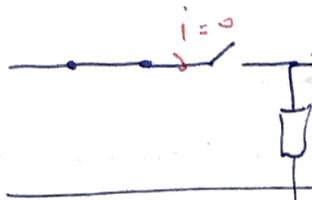
on a alors $\omega_c = \omega_0$ car $G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

4) filter LC (R) passe bande: \Leftrightarrow Reponse a Constant (5)

* Schem eq:

(BF)

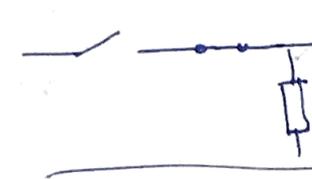


$i_D = 0$ $i_R = i - i_D = 0$

$V_D = R i_R = 0$

$G = 0$

(HF)



$V_D = R(i - i_R) = 0$

$V_D = R i_R = 0$

$G = 0$

par éliminat^o
passe bande

* Co général:

(DT)

$$H = \frac{R}{n + Z_L + Z_C} = \frac{R}{n + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Solt

form canonique

$$H = \frac{H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$H_0 = 1$

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}]}$$

$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$

$$|H| = \frac{H_0 \frac{x}{Q}}{\sqrt{[1 - x^2]^2 + (\frac{x}{Q})^2}}$$

$$\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}\right) (\neq \pi) \text{ si } \omega < \omega_0$$

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right)$$

* Comportement asympt. fine:

* BF:

$$H = \frac{H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}$$

$G = \frac{x}{Q}$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$

$G \propto \omega$

$G_{dB} = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$

$y = ax + b$

* HF:

$$H = \frac{H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = -H_0 j \frac{\omega_0}{Q\omega}$$

$G = \frac{1}{Qx}$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$G \propto \frac{1}{\omega}$

$G_{dB} = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$

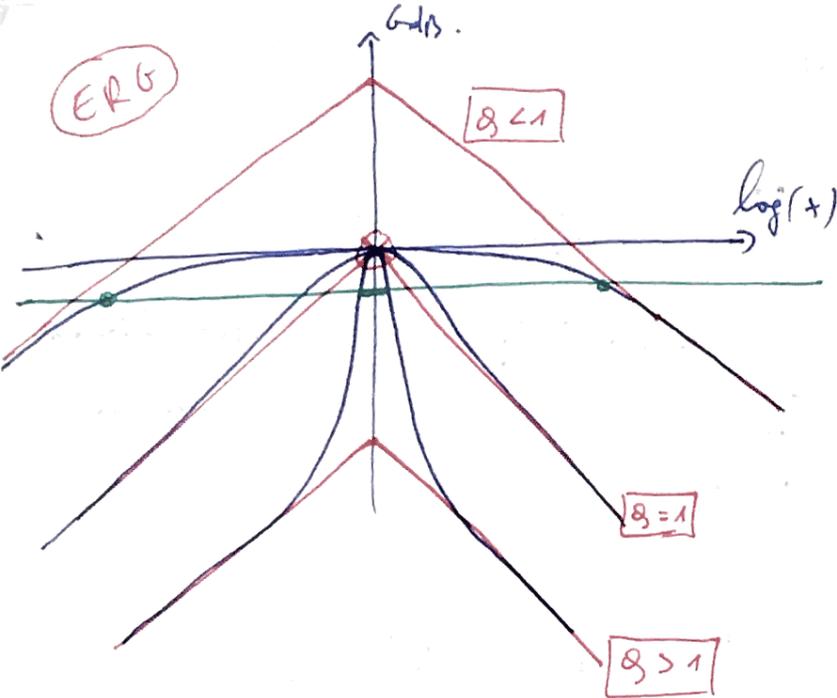
$y = -ax + b$

* $\omega = \omega_0$

$$H = \frac{H_0 j \frac{1}{Q}}{1 - 1 + j \frac{1}{Q}} = H_0 = 1$$

$\varphi = 0$

$G_{dB} = 0$



coupeur = -3 dB

$Q < 1 \Rightarrow$ large bande passante
 $Q > 1 \Rightarrow$ bande passante plus étroite

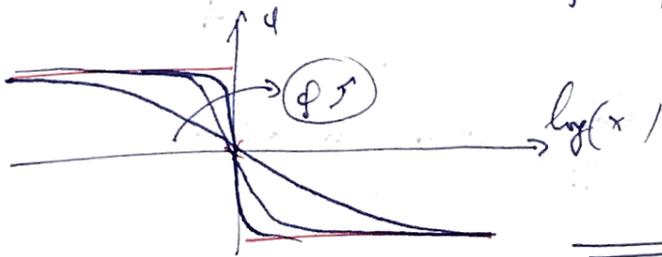
$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[x - \frac{1}{x} \right]^2}}$$

Prop: $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

$$|H|\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{H_0 \frac{1}{Qx} x^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{Qx}\right)^2}} = \frac{H_0 \frac{x}{Q}}{\sqrt{\left[x^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = |H|(x)$$

Donc $G_{dB}\left(\frac{1}{x}\right) = G_{dB}(x)$

\Rightarrow f^d symétrique / axe ordonnée dans le diagram de Bode.



Passe haut: RC [L]

$$H = \frac{z_c}{r + z_c + z_c} = \frac{j\omega L}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\omega^2 LC}{\omega^2 LC + j\omega rC + 1}$$

$$H = \frac{-H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Coupe bande: BF HF nq G=1

$\boxed{\omega = \omega_0}$ \Rightarrow $\underline{z_c + z_c = 0}$ fil. $V_s = 0$

$$H = \frac{z_c + z_c}{r + z_c + z_c} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega rC}$$

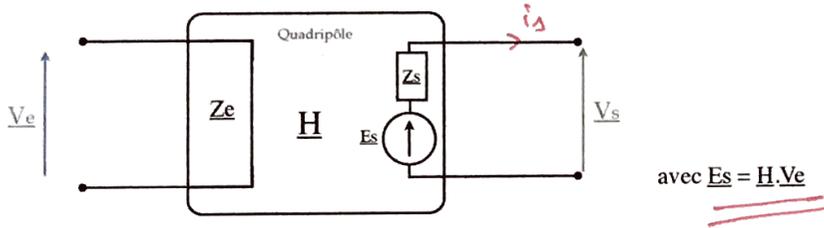
$$H = \frac{H_0 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

4 - Mise en cascade de filtres

Il s'agit ici d'enchaîner plusieurs filtres pour répondre aux spécifications d'un certain cahier des charges :

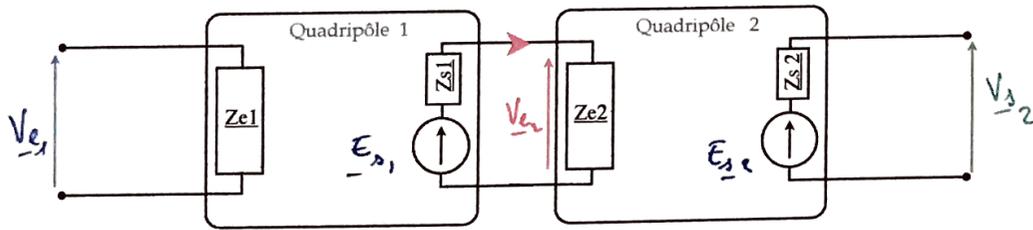
- Chaque filtre à ses propres caractéristiques. Nous les avons calculées.
- Il s'agit de ne pas altérer les caractéristiques d'un filtre lorsqu'on les relie les uns autres (ce qui n'est pas le cas en pratique).

Tout quadripôle est caractérisé par ses impédances d'entrée et sortie :



Cela pose problème lors de la connexion de deux ou plusieurs quadripôles :

Cela pose problème lors de la connexion de deux quadripôles :



Si $\underline{Z}_{e2} \sim \underline{Z}_{s1} \sim k\Omega$ ce qui est souvent le cas avec des impédances standards :

- Pb de tension en entrée du quadripôle 2 $\rightarrow \underline{V}_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{E}_{s1} \neq \underline{H}_1 \underline{V}_{e1} = \underline{E}_{s1}$

$\underline{H} \neq \underline{H}_1 \underline{H}_2$

Entre chaque étage d'électronique il faut avoir $\underline{Z}_{e2} \gg \underline{Z}_{s1}$

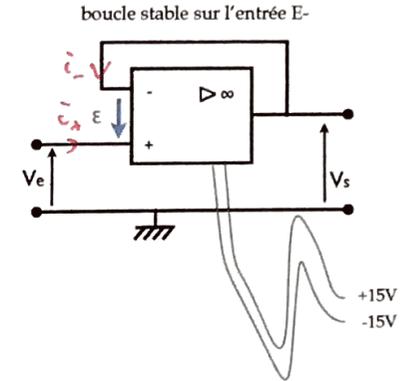
Solostat d'impédance

* Utilisation d'un composant actif : le quadripôle suiveur

[Réalisé à l'aide d'un AO : Amplificateur Opérationnel]

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Z}_e \sim 10^{12} \Omega \\ \underline{Z}_s \sim 1 \Omega \end{array} \right\}$

l'AO nous garantit $\underline{E} = 0$
si on boucle sur l'entrée E- vers la sortie
soit $\underline{V}_e = \underline{E} + \underline{V}_s$
 $\underline{V}_s = \underline{V}_e$



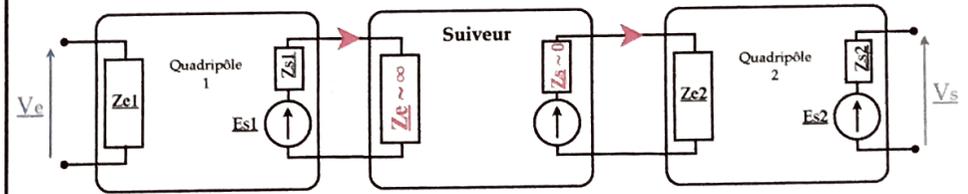
Nous avons réalisé ! : un fil ?

$\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ fil
 $\underline{i}_+ = \underline{i}_- = 0$ interruption ouvert
coursé en court

* Intérêt du montage suiveur :

Propriété :

- Le montage suiveur a :
- une impédance d'entrée ∞
 - une impédance de sortie nulle



D'après le montage suiveur $\underline{H} = 1$, donc on a exactement la même tension en entrée et en sortie du suiveur

De plus $\underline{Z}_e \sim \infty$ $\underline{i}_{s1} = 0$: Hyp Validée.

et $\underline{Z}_s \sim 0$ soit $\underline{V}_{e2} = \underline{E}_{s1} = 1 \cdot \underline{V}_{s1} = \underline{V}_{s1}$

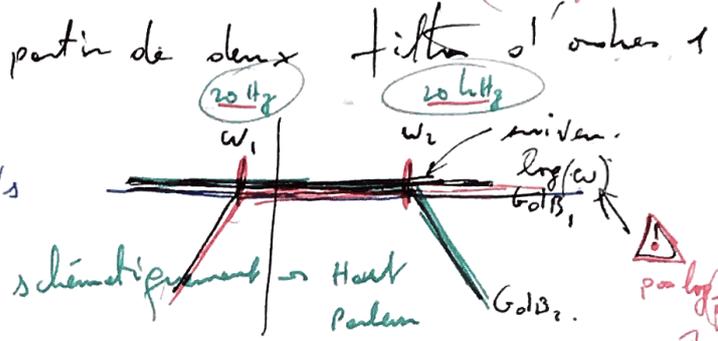
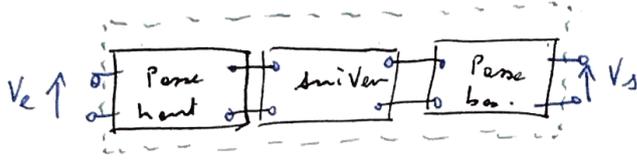
$\underline{H} = \frac{\underline{V}_{s2}}{\underline{V}_{e1}} = \frac{\underline{V}_{s2}}{\underline{V}_{e2}} \left(\frac{\underline{V}_{e2}}{\underline{V}_{s1}} \right) \frac{\underline{V}_{s1}}{\underline{V}_{e1}} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$

$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$

on a réalisé l'adapt d'impédance !!

Appliquat° du niveau: Produit de 2 fct de Transfert: (exercices type)

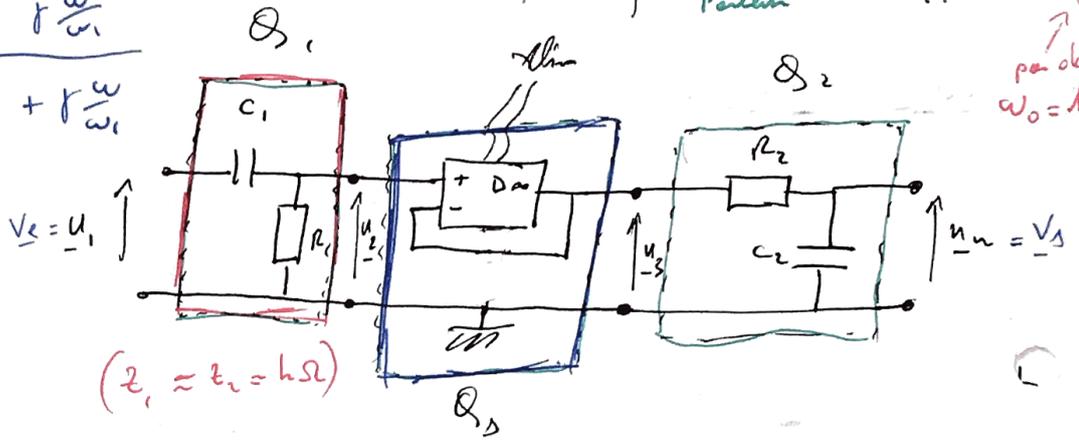
* On peut construire un passe bande à partir de deux filtres d'ordre 1.



$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

$$\underline{H}_s = 1$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$



$$\underline{H} = \frac{u_n}{u_1} = \frac{u_n}{u_3} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} = \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_s \cdot \underline{H}_1 = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$$

1 → int. positif
in = 0

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$$

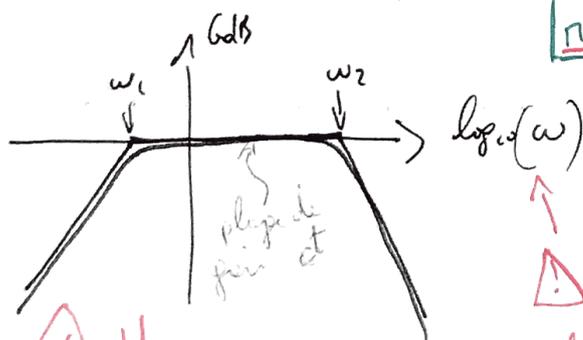
Propriétés:

Dans la limite où les conditions de fct de chaque filtre est respectée
La fct de Transfert de filtres successifs est égale au produit de leur fct de transfert. (cf adaptat° d'impédance)

Diagramme de Bode: Méthode de construction:

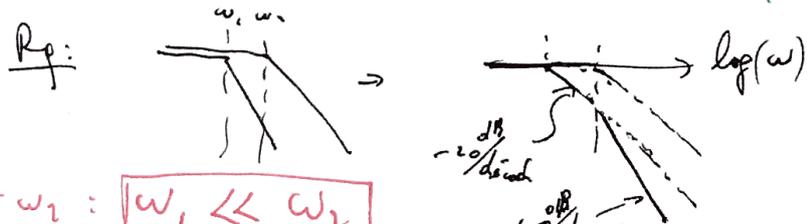
→ On écrit $|H| = |H_1| \cdot |H_2|$ Soit $G_{dB} = 20 \log(|H|) = 20 \log(|H_1|) + 20 \log(|H_2|)$
 $G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2}$

Le gain Total est la somme des gains individuels.



Méthode:

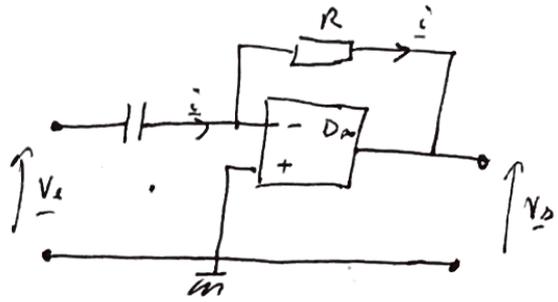
Graphiquement on trace donc ttes les asymptotes.



! Hypothèse où $G=1$ entre w_1 et w_2 : $w_1 \ll w_2$

3) Le filtre : dérivateur :

* Réalisation du quadripôle :
(On inverse R et C)



A nouveau. $\begin{cases} E=0 \\ i_+ = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} V_e = z_c i \\ V_s = -R i \end{cases} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{-R}{\frac{1}{j\omega C}} = -jRC\omega$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

* Synthèse du Montage :

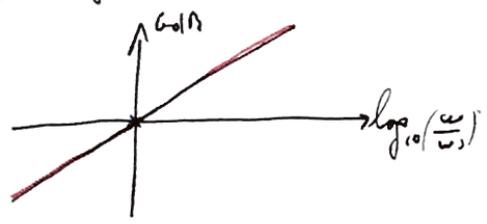
$$H = -j \frac{\omega}{\omega_0}$$

soit $V_s = -RC \cdot j\omega V_e \Rightarrow V_s = -RC \frac{dV_e}{dt}$

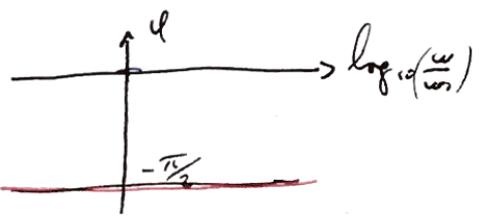
retour aux réels

$$\forall \omega (\neq \infty)$$

* Diagramme de Bode :

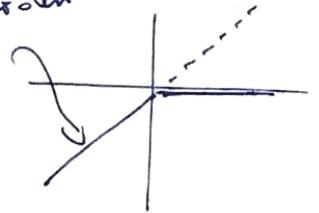


$$|H| = \frac{\omega}{\omega_0} \quad GdB = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$



$$\varphi = \arctan(-j) = -\frac{\pi}{2}$$

Rq: Contrairement au filtre passe haut le comportement dérivateur est rigoureux $\forall \omega$.
pseudo-dérivateur



Rq: La phase ne vaut pas le même chez int (resp dériv) que chez pseudo... car il y a un signe "-" [$\pm \pi$]

Conclusion sur les filtres actifs

* Présents partout en électronique.

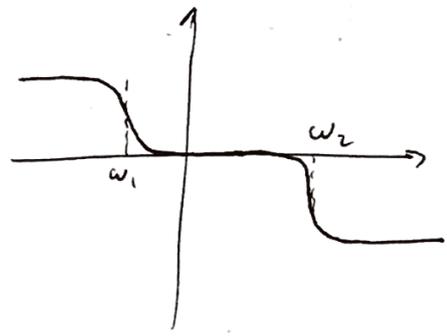
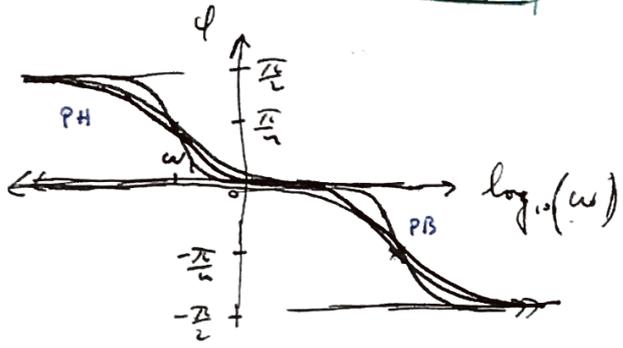
* nous devons juste connaître ces quelques cas et savoir les combiner les uns avec les autres.

* On peut concevoir des filtres d'ordre deux en combinant ces dipôles usuels avec un AO.

* $\arg(H) = \arg(H_1) + \arg(H_2)$

$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

La phase totale est donc la somme des phases



Conclusion!

Sur cet exemple on a construit un passe-bande

dont :
 -> la bande passante est large et peut être ajustée à volonté.
 ω_1 fct de R_1, C_1 et ω_2 fct de R_2 et C_2 .

-> pas de déphasage dans la bande passante.

Req: inconvénient si bande passante large: filtre n'est pas "sélectif" \rightarrow sélection de une bande

Req: le filtre est actif car il y a un AO, donc une alimentation externe.

\Rightarrow On a un filtre du deuxième ordre

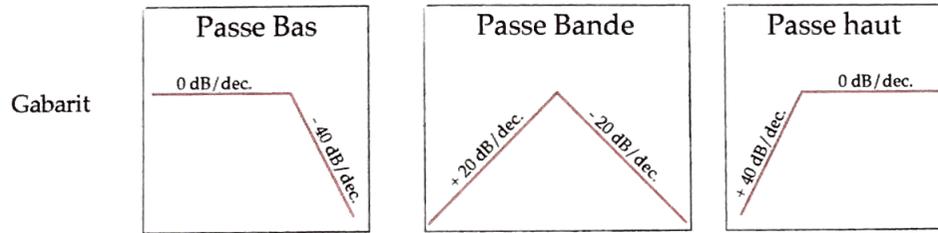
5 - Notion de Gabarit

Définition :

- Il s'agit d'une représentation simplifiée qui résume les caractéristiques d'un filtre.
- La connaissance des différents gabarits permet, en les mettant en cascade de concevoir rapidement un filtre plus complexe qui répond à des spécifications précises.

Le gabarit résume la réponse en gain du filtre :

ex :



Plus précisément, le gabarit nous indique :

- La tolérance sur le gain pour être dans la bande passante : $G_{\min} < G < G_{\max}$

En pratique on coupe si : $G < \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{dB} < -3 \text{ dB}$

- La bande passante qui s'en déduit :

- ex : passe bande $\rightarrow [\omega_-, \omega_+]$
- passe bas $\rightarrow [0, \omega_c]$
- passe haut $\rightarrow [\omega_c, +\infty]$

- La bande atténuée où l'on garantit un gain inférieur à une limite : $G < G_a$.
On en déduit également la bande atténuée $[\omega_-, \omega_+]$

Ex : on considérera le signal négligeable si $G_{dB} = -40 \text{ dB}$ soit $G = \frac{1}{100}$

$$-40 = 20 \log G \quad -2 = \log_{10} G \quad G = 10^{-2}$$

Exemples de spécifications :

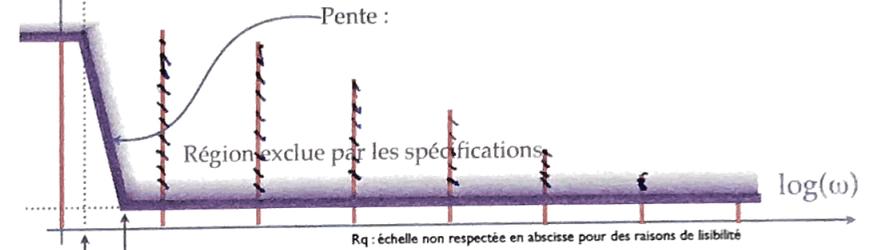
Réalisation d'un moyennneur :

Soit un signal $e(t)$ dont on veut la moyenne [offset ou composante continue]

- On sait que les fréquences sont toutes des multiples de 4 kHz.
- On ne veut pas de bruit dont l'amplitude dépasse 1% de la composante continue

Gabarit : $G_c = -3 \text{ dB} [0, 250 \text{ Hz}]$

$G_a = -40 \text{ dB} [2,5 \text{ kHz}, +\infty]$



$$f_c = 250 \text{ Hz}$$

De quel ordre doit être le passe-bas pour valider les spécifications du cahier des charges ?

il faut une pente de $-40 \text{ dB/decade} \Rightarrow$ Passe bas (II)