Modélisation des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

EC III

<u>Motivation :</u> C'est un <u>cadre d'étude très général</u> : tous les signaux peuvent s'écrire comme une superposition de signaux sinusoïdaux

<u>Objectifs :</u> Utilisation d'un nouveau formalisme en physique

- Introduire le formalisme complexe pour décrire le régime sinusoïdal
- Décrire les caractéristiques des dipôles linéaires en régime sinusoïdal : notion d'impédance complexe $\underline{Z}$

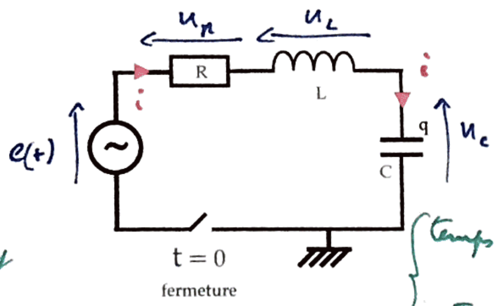
<u>Prérequis :</u>
-Trigo de base
-eq. diff. lin. à coef. cts.
-Nombres complexes

I Etude du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

On considère le circuit RLC série mais avec une alimentation sinusoïdale :

$$\boxed{e(t) = e_0 \cos \omega t}$$

fréquence de forçage
→ Variable (a priori ≠ de ω_0)
fréquence propre du circuit



Temps $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

1 - Etude du régime transitoire + RSE avec des signaux réels

<u>α - Mise en équation</u> $e = u_R + u_L + u_c$ $\left(i = C \frac{du_c}{dt} \right)$

$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + u_c$ on dérive :

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -e_0 \omega \sin(\omega t)$$

soit $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = -\frac{e_0 \omega}{L} \sin(\omega t)$.

forme canonique

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = -\frac{e_0 \omega}{L} \sin(\omega t)}$$

⚠ $\omega \neq \omega_0$

Avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

<u>β - Résolution</u> i - Recherche des solutions homogènes

$i_h = e^{-\lambda t}[A \,\mathrm{ch}(\tilde{\Omega} t) + B \,\mathrm{sh}(\tilde{\Omega} t)]$

$i_h = e^{-\lambda t}[A + Bt]$

$i_h = e^{-\lambda t}[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$

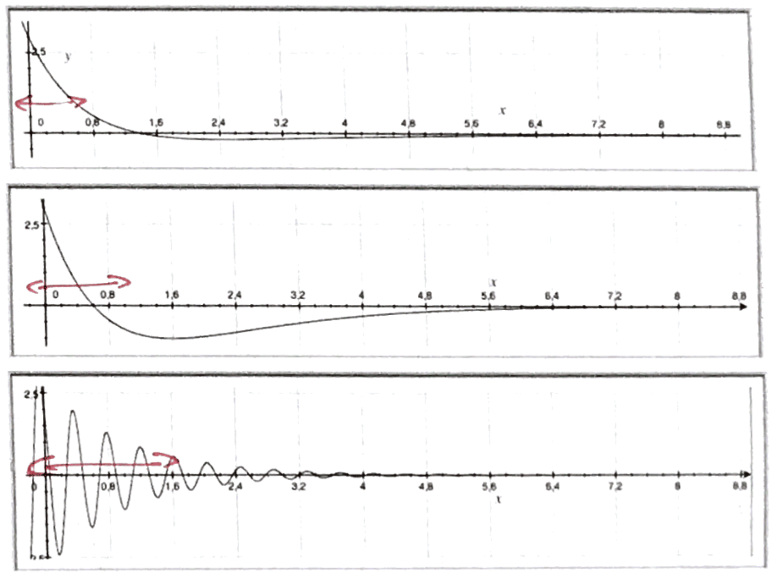
$\propto e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$

amorti sur un temps

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

Caractéristique commune à toutes ces solutions :

Ts les sol° tendent vers 0 sur un temps τ



$Q < \frac{1}{2}$

$Q = \frac{1}{2}$

$Q > \frac{1}{2}$

Temps τ qui augmente avec le facteur de qualité

β - Résolution   ii - Recherche d'une solution particulière

On veut un signal T-périodique $T = \frac{2\pi}{\omega} \neq T_0$ ⚠ purement ⇓ sinusoïdal.

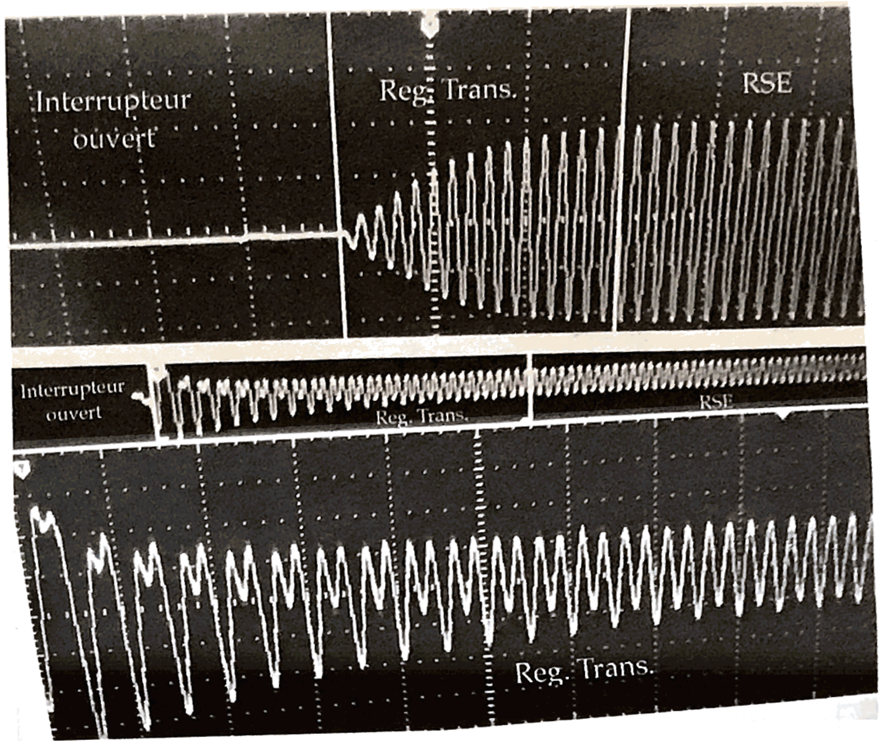
amplitude & phase inconnues

Solution obtenue avec les réels : $\boxed{i^P = i_0 \cos(\omega t + \varphi)}$

1 - L'amplitude est une fonction de ω qui vérifie : $\boxed{i_0(\omega) = \frac{\omega C e_0}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$

2 - La phase est une fonction de ω qui vérifie :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}} \quad \boxed{\sin(\varphi) = \frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$



β - Résolution   iii - Solutions générales   SG = SH + SP

$$i(t) = i^h(t) + i^P(t) \qquad \frac{di}{dt}(t) = \frac{di^h}{dt}(t) + \frac{di^P}{dt}$$

On applique alors les conditions initiales sur SG qui donnent A et B.

$$\left\{ \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{e_0}{L}\cos(\omega t_0) \end{array} \right\}$$

→ expression lourde qui permet de trouver A et B.

$e(t_0)$ au moment où je ferme l'interrupteur

La solution générale se décompose en deux régimes :

t ~ qq τ -> Un régime transitoire : mélange de SH et SP fonction de Ω et de ω.

donc de ω_0 et τ

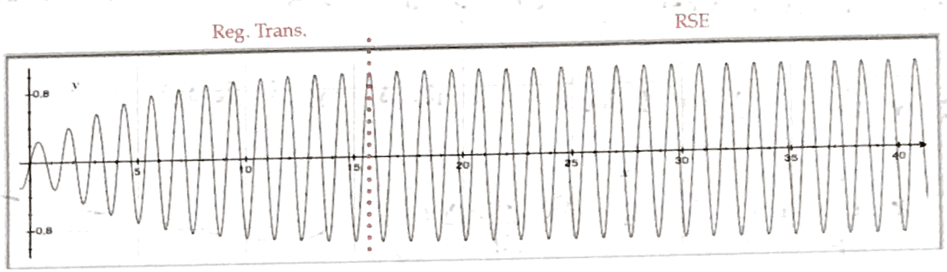
→ C'est le démarrage des oscillations, fonction entre autres des conditions initiales

t >> τ -> Un régime Sinusoïdal établi (RSE) de fréquence ω : caractérisé par $i_0(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

→ Ce régime est <u>indépendant des CI</u>, mais dépend de ω et du facteur de qualité Q

et ω_0 ⚠

Exemple de démarrage des oscillations : en fonction des conditions initiales
en fonction de la fréquence



Dans tous les cas, une fois la solution homogène amortie, le régime transitoire cède la place au Régime Sinusoïdal Etabli (RSE) caractérisé par :

- une amplitude
- une phase

C'est la solution particulière i_P, paramétrée par ω

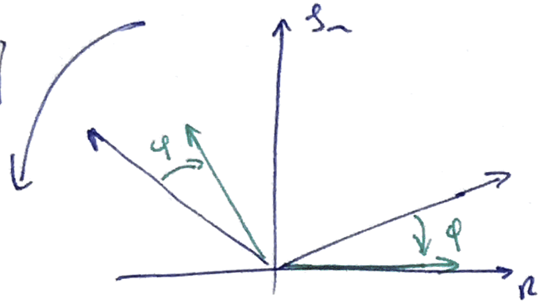
2) Modélisation $\mathbb{C}$ des RSE

1) Représentation $\mathbb{C}$ des signaux.

entrée : $e(t) = e_0 \cos(\omega t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t}$

sortie : $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \underline{s}(t) = \underline{s_0} e^{j\omega t} = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

$\boxed{\omega}$



$\varphi < 0$ $\underline{s}$ est en retard.

$\varphi = -2\pi \dfrac{\Delta t}{T}$

Condition d'utilisation : Les opérations doivent être linéaires.

ex : * $Re(\alpha \underline{s}_1 + \beta \underline{s}_2) = \alpha Re(\underline{s}_1) + \beta Re(\underline{s}_2)$

* $\dfrac{d}{dt}\left(Re(\underline{s}(t))\right) = Re\left(\dfrac{d}{dt}(\underline{s}\, t)\right)$

* $\displaystyle\int_0^t Re(\underline{s}(t))\, dt = Re\left(\int_0^t \underline{s}(t)\, dt\right)$.

Contre ex : $Re(\underline{u}.\underline{i}) \neq Re(\underline{u}) \times Re(\underline{i}) \Rightarrow \boxed{P(t) = Re(\underline{u}(t)) \times Re(\underline{i}(t))}$

$\Rightarrow$ pas de multiplication des signaux.

Soit $\underline{s}(t) = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$.

* $\dfrac{d}{dt}\underline{s}(t) = j\omega s_0 e^{j\omega t + \varphi} = j\omega \underline{s}$ $\quad \boxed{\times}\ j\omega$.

* $\displaystyle\int \underline{s}(t)\, dt = \frac{s_0 e^{j\omega t + \varphi}}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{j\omega}$ $\quad \boxed{\div}\ j\omega$.

Signal de valeur moyenne nulle

Pb en réel : $\dfrac{d}{dt}\cos(\omega t) \rightarrow -\omega \sin(\omega t)$.

$\dfrac{d}{dt}\sin(\omega t) \rightarrow +\omega \cos(\omega t)$.

cos $\longleftrightarrow$ sin ⊕ changement de signe ou pas.

* $\dfrac{d}{dt}\left(\overbrace{s_0 \cos(\omega t + \varphi)}^{Re(\underline{s})}\right) = -s_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$.

$\parallel$

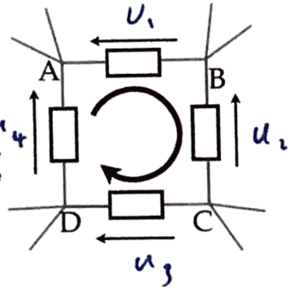
* $Re\left(\dfrac{d}{dt}(\underline{s})\right) = Re\left(j\omega s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = s_0 \omega\, Re(j \cos + \overset{-1}{jj} \sin)$

$= -s_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$.

II Modélisation $\mathbb{C}$ des dipôles linéaire usuels

1 - Les lois de Kirchhoff

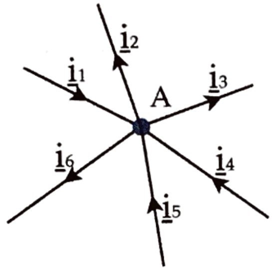
La loi des mailles : $\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$



$\mathbb{C}$ → $\boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{U}_k = 0}$

$\begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{sens de la maille} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{sens opposé} \end{cases}$

La loi des noeuds : $\sum_k \varepsilon_k i_k$



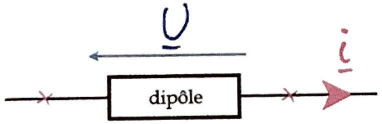
$\mathbb{C}$ → $\boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0}$

$\begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{entrant} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{sortant} \end{cases}$

(convention d'orientat°.)

2 - Notion d'impédance $\mathbb{C}$:

α - Définition et propriétés



On considère des dipôles linéaires et passifs.

Définition d'un dipôle linéaire & passif : $\boxed{F(t) = 0}$

$$a_0 u + a_1 \frac{du}{dt} + \cdots = b_0 i + b_1 \frac{di}{dt}$$

$\xrightarrow{\mathbb{C}}$ $$a_0 \underline{u} + a_1 \frac{d\underline{u}}{dt} + \cdots = b_0 \underline{i} + b_1 \frac{d\underline{i}}{dt} \cdots$$

Soit $[a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2 + \cdots]\,\underline{U} = [b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + \cdots]\,\underline{i}$

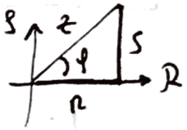
Soit la relation générale : $\boxed{\underline{u} = \underline{z}\ \underline{i}}$ (Volt, Ohm, Ampère) (z en ohm)

Avec : $$\underline{z} = \frac{b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + \cdots}{a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2 + \cdots}$$

Propriétés de l'impédance $\mathbb{C}$:

$\underline{Z} = R(\omega) + j\, S(\omega)$

(résistance) (réactance)



Ecriture exponentielle

$\underline{Z} = z(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$

$|\underline{Z}| = z(\omega) = \sqrt{R^2 + S^2}$

$\tan(\varphi(\underline{Z})) = \frac{S}{R}$

déphasage entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$

Pour un dipôle linéaire : $\underline{u} = u_0\, e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ $\quad \underline{i} = i_0\, e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

$\underline{z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{u_0}{i_0} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

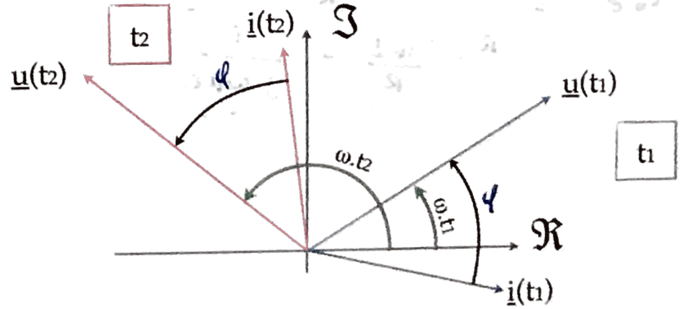
$|\underline{Z}| = \frac{u_0}{i_0}$ $\quad \varphi(\underline{z}) = \varphi_u - \varphi_i$

Rq : $\varphi_u = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(\underline{z}) = -\varphi_i}$

csq 1 : l'impédance $\mathbb{C}$ relie les amplitudes de $\underline{u}$ et $\underline{i}$ par son module

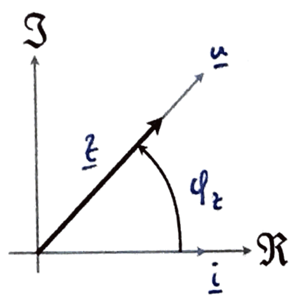
csq 2 l' ______ est responsable d'un déphasage entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$

Représentation des signaux $\mathbb{C}$:

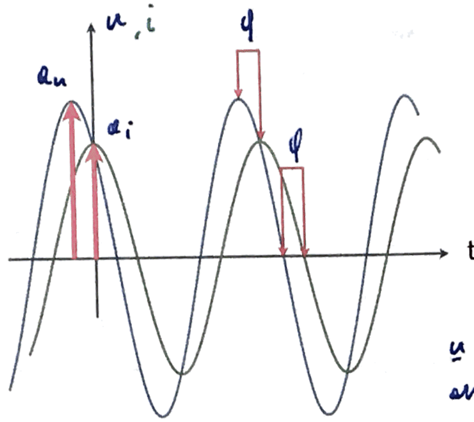


Représentation de Fresnel de l'impédance ℂ :

$\underline{z}$ ds le plan ℂ



$\underline{i}$ est pris comme référence



u est en avance φ

$\varphi(t) > 0$

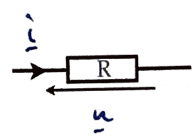
Concrètement :

Quand un dipôle est parcouru par un courant, le courant et la tension ne sont plus en phase à priori

Rq : On définit aussi l'admittance ℂ : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$ en Siemens (S)

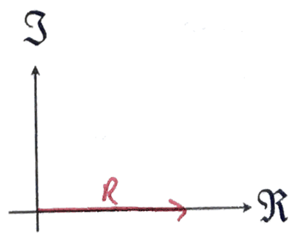
β - Impédances des dipôles usuels :

✳ La résistance :



$u = Ri \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{u} = R\underline{i}$

Soit $\boxed{\underline{Z}_R = R}$

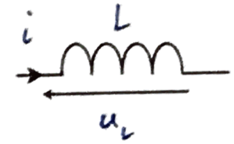


Propriété :

Aux bornes d'une R... pas déphasage

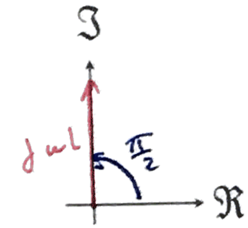
+ comportement dépend pas de la fréquence

✳ L'inductance :



$u = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{u} = j\omega L\,\underline{i}$

Soit $\boxed{\underline{Z}_L = j\omega L}$



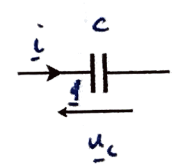
Comportements asymptotiques :

$\omega = 0$ $|\underline{Z}_L| = 0$ ⟺ fil. R.P.

$\omega \to \infty$ $|\underline{Z}_L| \to \infty$ ⟺ coupe circuit.

$\varphi(t) = +\frac{\pi}{2}$ $\forall\omega$ induit une quadrature avance de la ten

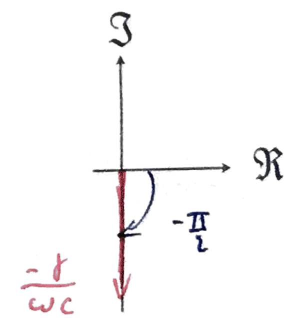
✳ Le condensateur :



$i = C\frac{du_c}{dt} \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{i} = j\omega C\underline{u}$

$\underline{u} = \frac{1}{j\omega C}\underline{i}$

Soit $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}}$



Comportements asymptotiques :

$\omega = 0$ $|\underline{Z}_c| \to \infty$ ⟺ coupe circuit R.P.

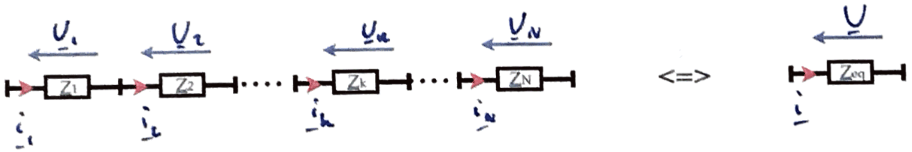
$\omega \to \infty$ $|\underline{Z}_c| \to 0$ ⟺ fil.

$\varphi(\underline{Z}_c) = -\frac{\pi}{2}$ $\forall\omega$ tension $\underline{u}$ quadrature retard sur $\underline{i}$

3 - Associations de dipôles linéaires usuels :

Très simple en $\mathbb{C}$: Formellement elle est analogue à l'association de résistances car on a toujours $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ pour tout dipôle linéaire.

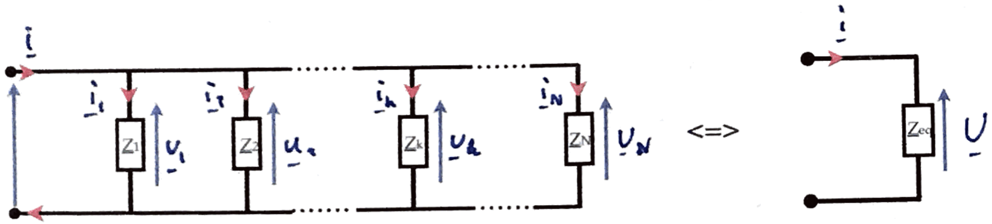
α - Association en série de dipôle linéaires :



$$\underline{U} = \underline{Z}_{eq}\,\underline{i} = \sum_k \underline{U}_k = \sum_k \underline{Z}_k\,\underline{i}_k = \left(\sum_k \underline{Z}_k\right)\underline{i} \quad \text{car } \forall k \;\; \underline{i}_k = \underline{i} \quad (\text{série})$$

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k}$$

β - Association en parallèle de dipôle linéaires :



$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \underline{i}_k = \sum_k \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} = \left(\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}\right)\underline{U} \quad \text{car } \forall k \;\; \underline{U}_k = \underline{U} \quad (//)$$

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \qquad \left(\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k\right)$$

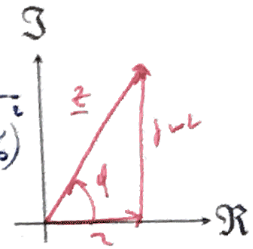
γ - Exemples simples :

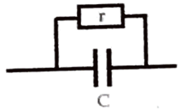
Inductance réelle : 

$\underline{Z} = r + j\omega L$

$|\underline{Z}| = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} = r\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{\omega L}{r}\right)$



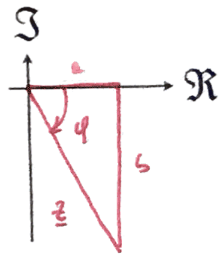
Condensateur réel : 

$$\underline{Z} = \underline{Z}_r \,//\, \underline{Z}_c = \frac{\frac{r}{j\omega C}}{r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{r}{1 + j\omega r C} \left(= \frac{r - j\omega r^2 C}{[1 + \omega^2 r^2 C^2]} = a - jb \right)$$

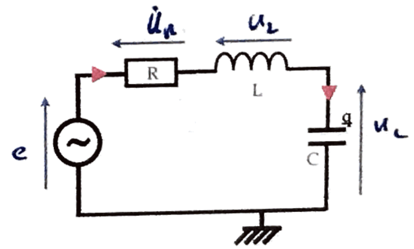
$(a, b > 0$

$|\underline{Z}| = \dfrac{r}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2 C^2}}$

$\arg(\underline{Z}) = -\arg(1 + j\omega r C) = -\arctan(\omega r C)$



<u>Application directe :</u> Trouvez $\underline{i}(\omega)$?



$\underline{e} = \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]\underline{i}$

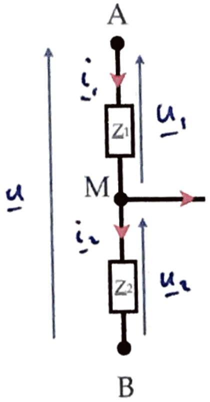
$$\underline{i}_0 \cancel{e^{j\omega t}} = \frac{\frac{e_0}{R}\,\cancel{e^{j\omega t}}}{1 + j\omega\frac{L}{R} + \frac{1}{j\omega R C}}$$

$$\boxed{\underline{i}_0 = i_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{e_0}{R}}{1 + j\omega\frac{L}{R} + \frac{1}{j\omega R C}}}$$

4 - Ponts diviseurs de tension et courant :

α - Diviseur de tension : $\underline{i}_1 = \underline{i}_2 = \underline{i}$

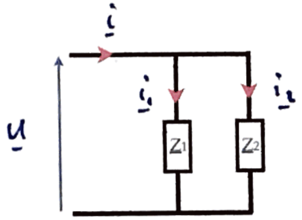
$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$$



Hypothèse $\underline{i}_s = 0$

Soit $\boxed{\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}}$ $\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}}$

β - Diviseur de courant

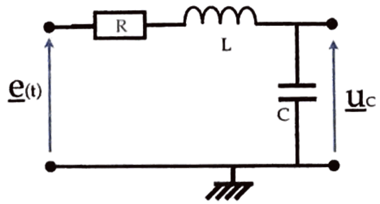


$$\underline{U} = \underline{Z}_1\underline{i}_1 = \underline{Z}_2\underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{i}$$

Soit $\boxed{\underline{i}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{i} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}\underline{i}}$ $\boxed{\underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{i} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}\underline{i}}$

Application directe :

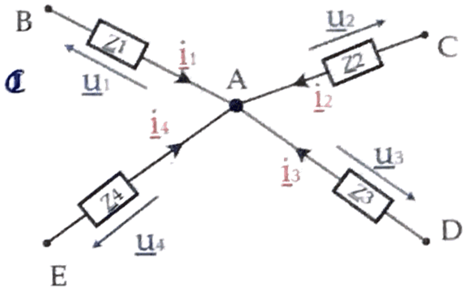
Exprimez $\underline{u}_c$ en fonction de $\underline{e}$



$$\underline{u}_c = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_L+\underline{Z}_c}\underline{e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}\underline{e}$$

$$\boxed{\underline{u}_c = \frac{\underline{e}}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}}$$

5 - Théorème de Millmann : (Même démo)



On peut faire le passage aux C des potentiel $\underline{U}_{AB} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$

$\underline{U}_{AB} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$ ← C

Soit $$\boxed{\underline{V}_A = \frac{\sum_k \frac{\underline{V}_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} = \frac{\sum_k \underline{Y}_k\underline{V}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}}$$

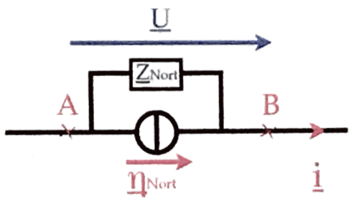
m̂ démo

6 - Principe de superposition : (Admis)

Le principe de superposition s'applique toujours en RSE :

- Lois de Kirchhoff linéaires
- Dipôles linéaires : $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$
- Pas besoin de Cond. Ini.

7 - Equivalences des générateurs de Thévenin et Norton : (Admis)

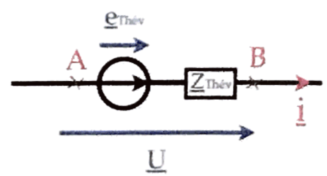


Th. Thévenin

⇒

⇐

Th. Norton



$$\underline{\eta}_{Nort} = \frac{\underline{e}_{Thev}}{\underline{Z}_{th}}$$

$$\underline{e}_{Thev} = \underline{Z}_{Nort}\cdot\underline{\eta}_{Nort}$$

$$\underline{Z}_{Thev} = \underline{Z}_{Nort}$$

III Réponse en courant et tension d'un circuit RLC série RSE (1)

∃ 2 temps

* $\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}}$ $\qquad$ $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

1) Réponse en intensité

LDM : $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C = [\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C]\,\underline{i} \Rightarrow \underline{i}_0 \cancel{e^{j\omega t}} = \dfrac{e_0 \cancel{e^{j\omega t}}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$

Soit $\boxed{i_0 e^{j\varphi} = \dfrac{e_0/R}{1 + j\frac{\omega L}{R} + \frac{1}{j\omega RC}}}$ $\qquad$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{\omega_0\sqrt{LC} = 1}$

$x \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$

1ère forme : (pour étude résonance)

$$\underline{i_0} = i_0 e^{j\varphi} = \frac{e_0/R}{1 + j\left[\underbrace{\frac{\omega L}{\omega_0\sqrt{LC}\,R}}_{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} - \underbrace{\frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega RC}}_{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\right]} = \boxed{\frac{e_0/R}{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]} = i_0 e^{j\varphi}} \quad (A)$$

Rq : $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

2ème forme : (forme canonique)

$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$

$$\underline{i_0} e^{j\varphi} = \frac{\frac{e_0}{R}\; j\frac{\omega RC}{\omega_0\sqrt{LC}}}{1 + j\frac{\omega RC}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega^2 \cancel{LC}}{\omega_0^2 \cancel{LC}}}$$

Soit

$$\boxed{\underline{i_0} = i_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{e_0}{R}\cdot j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}} \quad (B)$$

forme canonique

1) Amplitude du courant : $|\underline{i}| = |\underline{i}_0| = i_0$.

$$\boxed{i_0(\omega) = |\underline{i}_0| = \frac{e_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}}}$$

BF : $i_0 \to 0$

$\omega = \omega_0$: $i_0 = \frac{e_0}{R} = I_{MAX}$.

HF : $i_0 \to 0$

$\boxed{BF}$: $\omega \ll \omega_0$ $\quad \frac{\omega_0}{\omega}Q \gg 1 \gg \frac{\omega}{\omega_0}Q$

$$\underline{i}_0 = \frac{e_0/R}{\cancel{1} + jQ\left[\cancel{\frac{\omega}{\omega_0}} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]} \simeq +j\frac{e_0}{RQ}\frac{\omega}{\omega_0}$$

$\underline{i}_0 \simeq j\frac{\omega\sqrt{LC}}{R\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}e_0 = j\omega C e_0$

$|\underline{i}_0|(\omega) = (Ce_0).\omega \to 0$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ dépend pas de Q

$\boxed{i_0 \propto \omega}$ BF

$\boxed{\omega = \omega_0}$: $\frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 - 1 = 0$

$\boxed{i_0(\omega_0) = \frac{e_0}{R} = I_{MAX}}$

$\varphi = 0$

Rq ω_0 fixée

$R \searrow Q \nearrow$

$\boxed{HF}$: $\omega \gg \omega_0$ $\quad Q\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \gg Q\frac{\omega_0}{\omega}$

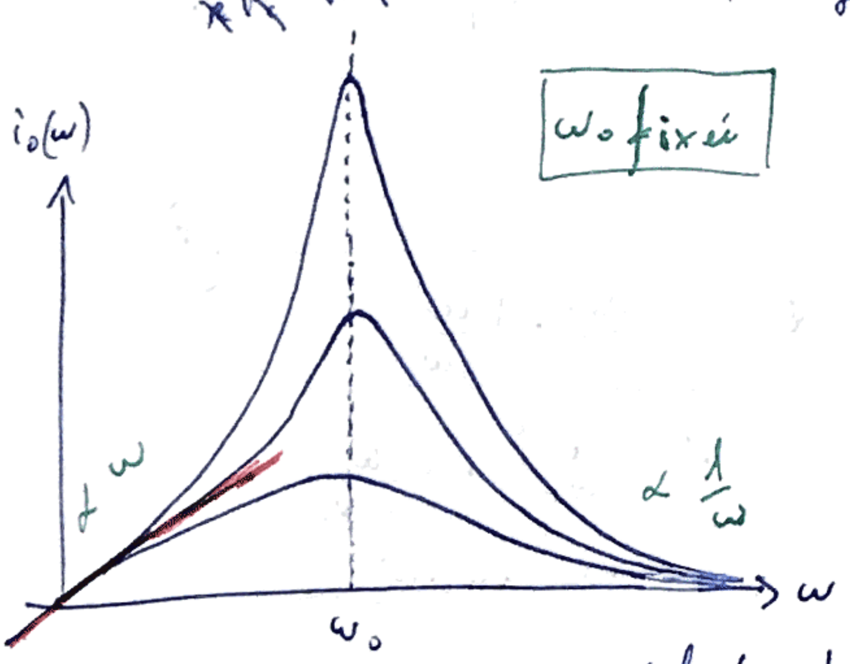
$$\underline{i}_0 = \frac{e_0/R}{\cancel{1} + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \cancel{\frac{\omega_0}{\omega}}\right]} \simeq -j\frac{e_0}{RQ}\frac{\omega_0}{\omega}$$

$\underline{i}_0 \simeq -j\frac{e_0}{R\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{1}{\omega} = -j\frac{e_0}{L\omega} \left(= \frac{e_0}{jL\omega}\right)$ $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$i_0(\omega) = \frac{e_0}{\omega L} \propto \frac{1}{\omega} \to 0$

$\boxed{i_0 \propto \frac{1}{\omega}}$ HF

$\boxed{\omega_0 \text{ fixée}}$



Etude du maximum d'intensité.

$i_0(\omega) = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{1 + Q^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}}$ est maximum si le Dénominateur est minimal soit $\boxed{1}$

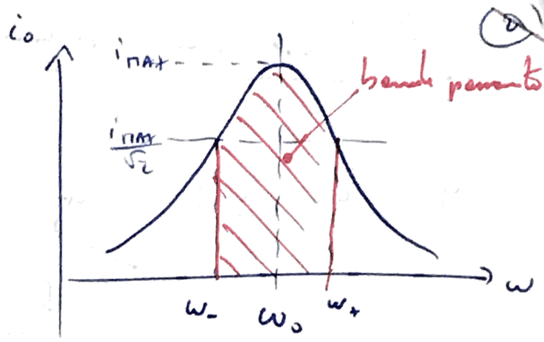
$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 \qquad$ Soit $\omega = \cancel{\pm}\,\omega_0 > 0$

Il y a resonance d'intensité lorsque $\boxed{\omega = \omega_0}$ $\quad \boxed{i_0 = I_{MAX} = \frac{e_0}{R}}$

$\underline{i}_0 = i_0 e^{j\varphi} = \frac{I_{MAX}}{1}$ $\quad \boxed{\varphi = 0}$

* Acuité de la résonance :

$$\boxed{\text{Def Bande passante : } \quad i \geqslant \frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}}$$



Rq : $P_s = R i^2 \rightarrow \boxed{\div}\, 2$

Soit $0 < \omega_- < \omega_0 < \omega_+$ tq : $i_0(\omega_-) = i_0(\omega_+) = \dfrac{i_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$

$$i_0 = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{1 + \underbrace{Q^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}_{=1}}} = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{1+1}}$$

Soit $Q\left[\underbrace{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}_{\text{Change de signe en } \omega_0}\right] = \varepsilon$ avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \omega_+ \\ \varepsilon = -1 & \omega_- \end{cases}$

Soit $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ $\qquad Q\left[x - \dfrac{1}{x}\right] = \varepsilon \qquad \boxed{x^2 - \dfrac{\varepsilon x}{Q} - 1 = 0}$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = +\frac{\varepsilon}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$\begin{cases} x_+ = \dfrac{\omega_+}{\omega_0} = \dfrac{1}{2Q} \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} + 1} > 0 \\[2ex] x_- = \dfrac{\omega_-}{\omega_0} = \dfrac{-1}{2Q} \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\omega_+}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\omega_-}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \left(\frac{1}{2Q} + \cancel{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}\right) - \left(\frac{-1}{2Q} + \cancel{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}Q} = \frac{1}{Q}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

$Q \nearrow \iff \Delta\omega \searrow$ $\left\{\begin{matrix} \text{bon facteur de qualité} \\ \Updownarrow \\ \text{bande passante sélective} \end{matrix}\right\}$

3) Phase du courant

$$\varphi = \arg(\underline{i_0}) = \underbrace{\cancel{\arg\left(\frac{e_0}{R}\right)}}_{\mathbb{R}^+} - \arg\left(1 + jQ\overbrace{\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}^{\frac{-j\varphi}{1} \cdot \left|Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right|}\right).$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right)}$$

$+\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{BF}$: $\omega \ll \omega_0$ $\quad \frac{\omega_0}{\omega} \gg \frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad \varphi \simeq -\arctan\left(-Q\frac{\omega_0}{\omega} \to -\infty\right) = +\frac{\pi}{2}$

$$\underline{i_0} \simeq \frac{I_{max}}{\cancel{1} + jQ\left[\cancel{\frac{\omega}{\omega_0}} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]} = j\frac{I_{max}\,\omega}{\omega_0} \quad \boxed{\arg(\underline{i_0}) \simeq \frac{\pi}{2}}.$$

$\boxed{\omega = \omega_0}$: $\varphi = -\arctan(0) = 0$ $\quad \boxed{\varphi = 0}$

$\boxed{HF}$: $\omega \gg \omega_0$ $\quad \varphi = -\arctan\left(Q\frac{\omega}{\omega_0} \to +\infty\right) \to -\frac{\pi}{2}$

$$\underline{i_0} = \frac{I_{max}}{\cancel{1} + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \cancel{\frac{\omega_0}{\omega}}\right]} \simeq -j\frac{I_{max}\,\omega_0}{Q\,\omega} \quad \boxed{\arg(\underline{i_0}) \simeq -\frac{\pi}{2}}$$

Voisinage de la résonance : $\boxed{\text{effet de } Q}$

$\omega = \omega_0 + \varepsilon$ $\quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0}$ $\quad \varphi = -\arctan\left(Q\left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0}\right) - \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0}}\right)\right]\right)$

$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}$ $\quad$ Soit $\varphi \simeq -\arctan\left(Q\left[\cancel{1} + \frac{\varepsilon}{\omega_0} - \cancel{1} + \frac{\varepsilon}{\omega_0}\right]\right)$ $\quad \boxed{\varphi \simeq -\frac{2Q}{\omega_0} \cdot \varepsilon}$

$\arctan(x) \underset{0}{\simeq} x$

$Q \nearrow \Rightarrow$ chgt de phase d'autant + brutal.

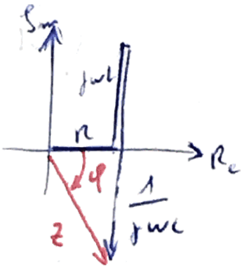
③

γ) Conclusion

$$\underline{e}_0 = \underline{Z}\,\underline{i}_0 = \left[R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right]\underline{i}_0$$

cas général :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

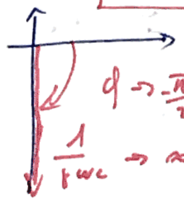


$$Z = R + j\frac{\omega L}{\omega_0\sqrt{LC}} - \frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega C}$$

$$\boxed{Z = R\left[1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right]}$$

BF : $\omega \ll \omega_0$

$$Z = \cancel{R} + \cancel{jL\omega} + \frac{1}{jC\omega} \simeq \frac{1}{jC\omega}$$



Comme un condensateur

capacitif

$\omega = \omega_0$

$$Z = R + j\left[\cancel{\frac{\omega L}{\omega_0\sqrt{LC}}} - \cancel{\frac{\omega_0\sqrt{LC}}{\omega C}}\right] = R$$

$\boxed{\text{Comportement purement résistif !} \quad \boxed{\varphi = 0}}$

$\boxed{i = I_{max}}$

HF : $\omega \gg \omega_0$

$$Z_{HF} = \cancel{R} + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \cancel{\frac{\omega_0}{\omega}}\right] = jQ\frac{\omega}{\omega_0} \to \infty$$

Comme une bobine.

inductif

2) Réponse en tension et résonance :

déf : $\boxed{\underline{u}_c = \underline{Z}_c\,\underline{i}}$

* DT :
$$\underline{u}_c = \underline{e}\,\frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_c} = \underline{e}\,\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{u}_c = \underline{u}_0 \cancel{e^{j\omega t}} = \frac{e_0 \cancel{e^{j\omega t}}}{1 - \frac{\omega^2 LC}{(\omega_0\sqrt{LC})^2} + j\frac{\omega RC}{\omega_0\sqrt{LC}}}$$

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$$

$$\boxed{U_0 e^{j\varphi_u} = \frac{e_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

A) phase de la tension

$$\underline{u}_c = \frac{\underline{i}}{jC\omega} \qquad \arg(\underline{u}_0) = \arg(\underline{i}_0) - \arg(j) = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$$

d) Amplitude de la tension :

$$\boxed{u_o(\omega) = \frac{e_o}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_o^2}}}}$$

$\boxed{BF}$: $\omega \ll \omega_o$

$$u_o(\omega) = \frac{e_o}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\cancel{\omega}}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \frac{\cancel{\omega^2}}{Q^2\omega_o^2}}} \simeq e_o$$

$$\boxed{u_o(\omega) \underset{0}{\simeq} e_o}$$

$\omega = \omega_o$:

$$u_o(\omega_o) = \frac{e_o}{\sqrt{\cancel{(1-1)^2} + \frac{1}{Q^2}}} = Q e_o$$

$$\boxed{u_o(\omega_o) = Q e_o}$$

$\boxed{HF}$: $\omega \gg \omega_o$

$$u_o(\omega) = \frac{e_o}{\sqrt{\left(\cancel{1}-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\cancel{\omega}}{Q\omega_o}\right)^2}} \simeq \frac{e_o\,\omega_o^2}{\omega^2} \propto \frac{1}{\omega^2} \to 0.$$

Résonance : recherche du maximum : $u_o(\omega) = \frac{e_o}{\sqrt{D(x)}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$

$U_o(\omega)$ Max lorsque $D(x)$ min

Soit $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ $\qquad f'(x) = 2(-2x)(1-x^2)^1 + \frac{2x}{Q^2} = 0$

Soit $2x\left[\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2)\right] = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\qquad \frac{1}{Q^2} = 2 - 2x^2 \qquad 1 - x^2 = \frac{1}{2Q^2} \qquad x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \qquad x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$$\boxed{\omega_{res} = \omega_o\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} < \omega_o$$

il faut $\boxed{Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$\left(1 - \frac{1}{2Q^2} = 0 \qquad 2Q^2 = 1 \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Rq : $f''(x) = \frac{2}{Q^2} - 4(1-x^2) + 8x^2 = \frac{2}{Q^2} - 4 + 12x^2$

* $f''(x_{res}) = \frac{2}{Q^2} - 4 + 12\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = -\frac{4}{Q^2} + 8 \geq 0$

* $f''(0) = \frac{2}{Q^2} - 4$ $\qquad \oplus\ Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\ominus\ Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$