J.COURTIN ***PSI*** *— LYCÉE V.HUGO*

Stabilité des systèmes linéaires

Objectifs :
- Fonction de transfert
- Passage aux complexe
- Retour aux réels
- **Stabilité**

Révision 1ère année :
- EC III Régime sinusoïdal
- EC IV Décomposition en série de Fourier
- EC IV Filtrage linéaire

— Révision du filtrage de sup —
+ connaitre les critères de stabilité

I - Définition des systèmes CLI   Continus - Linaires - Invariants

Approche temporelle

On désigne par **système linéaire** tout dispositif (électronique ou mécanique) qui relie une entrée à une sortie par une équation différentielle linéaire (1ère année) :

$$a_0 e + a_1 \frac{de}{dt} + a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + \ldots = b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + \ldots$$

Approche harmonique

Passée en complexe cette équation différentielle devient la **fonction de transfert** du même ordre qu'elle.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \ldots}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \ldots} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$$\underline{H}(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

<u>Principe de linéarité :</u>

Systèmes continus :
On décrira ici des systèmes continus où les entrées e(t) et sorties s(t) dont décrites par des fonctions continues du temps. On peut les visualiser à l'oscilloscope

RQ : En pratique les entrées seront par ailleurs bornées.

Systèmes invariants :
Les règles de fonctionnement du système ne dépendent pas de l'instant t où on l'utilise.

II - Exemples simples

Correspondance :

$$p \leftrightarrow j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$$

- Passe bas I
- Intégrateur

II - Exemples simples

Correspondance :

$$p \leftrightarrow j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$$

- Passe bas II
- Mise en cascade de filtre d'odre I.
  (Voir TD)
- Filtre mécanique
- Intégrateur stabilisé
  {—> A chercher}

III - Stabilité d'un système d'ordre I ou II

Définition : On dit que le **système linéaire est stable** si et seulement si
sa réponse linéaire à un signal d'entrée bornée dans le temps
restera également bornée dans le temps à la sortie

RQ : - Inversement un système instable peut diverger dans le temps bien que soumis à une entrée bornée (intégrateur).
- L'augmentation du signal conduit généralement à des Non Linéarités et a un effet de saturation (AO).

SG = SH + SP

- Du point de vue temporel : la solution particulière est toujours bornée si l'entrée est bornée car on la cherche sous la même forme mathématique (principe de Curie). Reste la question de la solution homogène $s_h(t)$.

RQ : Voir 1ère année —> $s_p(t)$: Réponse à un échelon de tension et Régime Sinusoïdal Etabli]

- Du point de vue harmonique : le RSE est sinusoïdal donc borné ; reste également le régime transitoire gouvernée par l'équation homogène (1ère année) qui donne le dénominateur de la fonction de transfert.

Système de 1er ordre :

Système du 2nd ordre :

Un système est stable si son régime libre s'amorti $s(t) \to 0$ quand $t \to 0$
On note que cela ne concerne que l'**<u>équation différentielle homogène à la sortie</u>**

Approche temporelle

On peut également résumer la **stabilité des systèmes d'ordres I ou II** à l'aide de leur fonction de transfert :
Le système est stable si tous les <u>coefficients au dénominateur</u> sont de même signe dans l'écriture en p.
concerne la sortie

Approche harmonique

Retour sur les exemples de système linéaires simples :

- Passe bas I —> toujours stable (régime amorti sur τ, diagramme de Bode borné)
- Intégrateur —> Instable si $\omega \longrightarrow 0$ effet de dérive puis saturation

- Passe bas II —> Stable (3 régimes amortis sur τ, diagramme de Bode borné)
- Mise en cascade de filtre d'odre I => idem
- Filtre mécanique (sans frottement) —> divergence de principe à la résonance
- Intégrateur stabilisé —> Stable.

Seuls les circuits actifs (alimentés) peuvent être instables : il ne peut y avoir de divergence sans apport d'NRJ.
En pratique il y aura saturation.

Exemple : **circuits avec R,L,C seulement => toujours stables en pratique**
(⚠️ sauf OH : si résonance sans frottement … instable sur le papier)

IV - Décomposition en série de Fourier (HP)