

TD - FILTRAGE & STABILITÉ

Exo 1 — Filtre de Hartley

Calculer la fonction de transfert du filtre suivant.

Astuce :

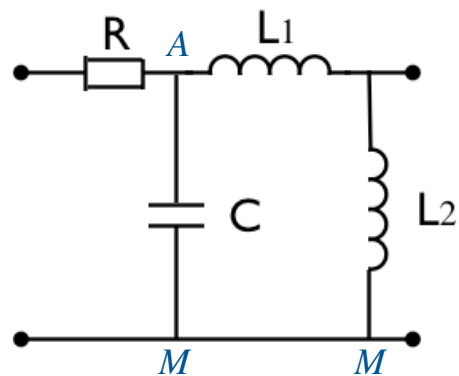
On procédera par deux diviseurs de tension successifs [plus efficace que Millman sur ce type de schéma].

Penser à introduire l'inductance équivalente L_{eq} .

- Mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{ou encore} \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Expliciter H_0 , ω_0 et Q .
- Tracer le diagramme de Bode.
- Quel circuit simple trouve-t-on si on prend la sortie en A [pas de calcul]
Quel est sa fonction de transfert et ses paramètres H_0 , ω_0 et Q .
En déduire une analyse simple du résultat obtenu.



Exo 2 — Filtre de Colpitts

Calculer la fonction de transfert du filtre suivant.

Astuce :

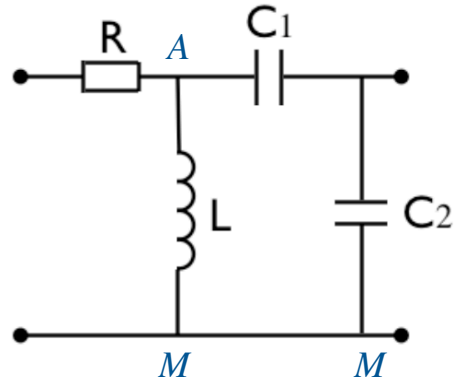
On procèdera par deux diviseurs de tension successifs [plus efficace que Millman sur ce type de schéma].

Penser à introduire la capacité équivalente C_{eq} .

- Mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{ou encore} \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Expliciter H_0 , ω_0 et Q .
- Tracer le diagramme de Bode.
- Quel circuit simple trouve-t-on si on prend la sortie en A [pas de calcul]
Quel est sa fonction de transfert et ses paramètres H_0 , ω_0 et Q .
En déduire une analyse simple du résultat obtenu.



Exo 3 — Combinaison de deux systèmes d'ordre I

On possède un filtre passe bas d'ordre 2, réalisé avec des composants coûteux. On veut pouvoir réaliser la même opération de filtrage avec deux filtres d'ordre 1 et éventuellement un autre élément d'électronique à déterminer.

- 1 - Proposer un montage à l'aide de deux filtres d'ordre 1, pour fabriquer un filtre passe bas d'ordre deux.
On introduira à cet effet un composant actif dont on précisera le câblage, et dont on justifiera l'intérêt
- 2 - Calculer sa fonction de transfert H. Déterminer la fréquence de coupure ω_0 et le facteur de qualité Q du filtre en fonction des fréquences de coupures ω_1 et ω_2 des deux filtres.
- 3 - Connaissant Q et ω_0 pour le filtre d'ordre 2 à modéliser, en déduire par identification les valeurs ω_1 et ω_2 à donner aux fréquences de coupures des filtres d'ordre 1 pour avoir la même fonction de transfert.
En déduire une condition nécessaire sur Q , quant à la faisabilité de la modélisation, et donc du filtre.
Peut-on par exemple envisager que la filtre résultant modélise une situation où $Q = 5$? Ou bien quel est le problème ?
Rq : On pourra à cet effet introduire la variable $x_1 = \omega_1/\omega_0$ et $x_2 = \omega_2/\omega_0$
- 4 - Qu'en est-il pour un filtre passe haut d'ordre 2, pour un filtre passe bande ? On re-précisera à chaque fois le câblage des filtres d'ordre I utilisés.
- 5 - Tracer les diagrammes de Bode des différentes situation : construire graphiquement celui du filtre résultant à l'aide des diagrammes de Bode des filtres de départ.

Exo 4 — Le salaire de la peur. [Révision filtrage mécanique]

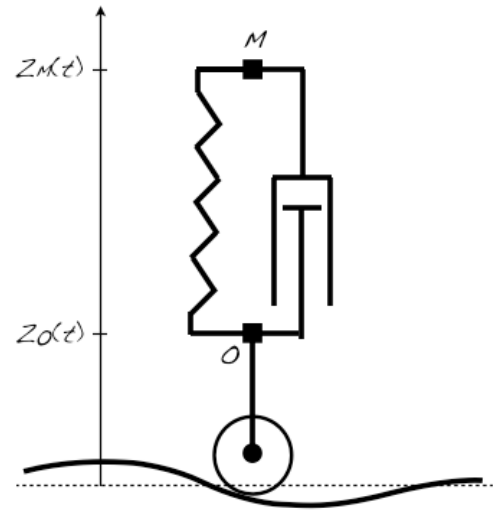
On modélise sommairement une suspension automobile par le système vertical suivant, composé d'un ressort de raideur k , d'un amortisseur linéaire de constante de frottement fluide λ .

Le véhicule avance sur une route dont le profil impose au point O un déplacement vertical $Z_O(t) = a \cos(\omega t)$ par rapport à sa position sur une route plane.

On note $Z_M(t)$ la position du point M par rapport à sa position d'équilibre. Ce dernier positionne une masse m qui représente celle de la voiture. (axe z ascendant).

- La force de friction de l'amortisseur vaut $F = -\lambda.(V_M - V_O)$. Pourquoi ?
- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$. (Vibration de la voiture)
- Déterminer la position d'équilibre, et faire le changement de coordonnées approprié. [Oscillation autour du point d'équilibre]
- Tracer l'amplitude des vibrations en fonction de la vitesse du véhicule.
- Comment éviter les vibrations ?

Bonus : refaire cette étude par l'énergie.



Exo 5 — Sismographe [Révision filtrage mécanique]

On considère un sismographe comme une boîte posée sur le sol et contenant un système {masse (m) - ressort (k, L_0) - amortisseur (λ) } comme représenté ci-contre.

Un rouleau de papier enregistre au moyen d'un stylet le déplacement de la masse par rapport à la boîte.

En cas de tremblement de terre, le sol est animé d'un mouvement $z_s = a \cdot \cos(\omega t)$, la masse oscille dans la boîte et son stylet enregistre son mouvement sur le rouleau qui, lui, reste fixe par rapport à la boîte.

- La force de friction de l'amortisseur vaut $F = -\lambda.(V_M - V_s)$. Pourquoi ?
- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$. (Vibration de la masse)
- Déterminer la position d'équilibre lorsque le sol ne vibre pas.

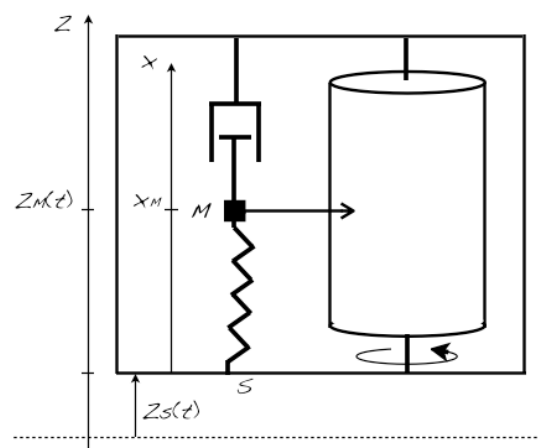
[Stylet au repos]

Nous nous intéressons en fait au mouvement du stylet par rapport au rouleau qui se déplace selon z avec la boîte :

- Quelle est le mouvement du rouleau selon z ?

On note x la position relative à la base de la boîte.

- Exprimer x en fonction de z et z_s
- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- Calculer l'amplitude des vibrations du stylet par rapport au rouleau.

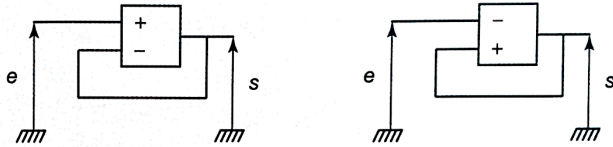


Exo 6 — Stabilité de systèmes bouclés

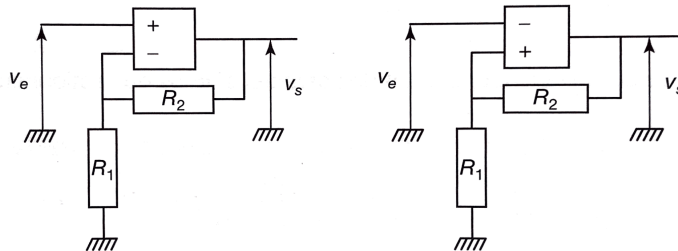
- a) Pour les deux montages suivants de la figure calculer la relation entre s et e .
L'amplificateur opérationnel obéit à la loi :

$$\tau \dot{s}(t) + s(t) = \mu_0 \varepsilon(t) = \mu_0 (v_+(t) - v_-(t))$$

où τ et μ_0 sont des constantes.



- b) Étudier la stabilité de ces deux montages.
c) Faire de même pour les deux propositions de montage amplificateur non inverseur



Exo 7 — Comportement dynamique d'un transducteur (d'après Centrale)

Une lame de quartz d'épaisseur e a ses deux faces en regard métallisées. On applique une différence de potentiel $U(t)$ et on observe l'apparition d'une charge électrique $q(t)$ et une variation de l'épaisseur $e + \xi(t)$.

Une modélisation fournit le jeu d'équations suivant : $U = \frac{q}{C} + \alpha \xi$ et $m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \delta \frac{d\xi}{dt} + k \xi + \alpha q = 0$

m est proportionnel à la masse de la lame, δ est un coefficient positif.

a - Que représente le coefficient δ ?

b - Déterminer l'équation différentielle (E) reliant la vitesse $v(t) = \frac{d\xi}{dt}$ à la différence de potentiel $U(t)$ appliquée aux bornes du quartz.

en introduisant les quantités : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k - \alpha^2 C}{m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$ $Q = \frac{m \omega_0}{\delta}$ avec $Q \gg 1$ $H_0 = -\frac{\alpha C}{m \omega_0}$

c - On suppose que $U(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E , le cristal de quartz étant initialement au repos.

Montrer que la solution $v(t)$ de cette équation peut se mettre sous la forme : $v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$ et donner les expressions de τ et Ω en fonction de Q et ω_0 . On ne cherchera pas à déterminer la constante A . Dans la suite, on pourra supposer $\Omega \approx \omega_0$.

d - On définit le temps de réponse τ_E de l'émetteur comme le temps au bout duquel l'enveloppe du signal est inférieure à 5 % de sa valeur initiale. Exprimer τ_E en fonction de Q et ω_0 .

e - Quelle fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = \frac{v}{U}$ peut-on associer à l'équation différentielle (E) ? On exprimera \underline{H} en fonction de H_0 , Q , ω et ω_0 . Quelle est la nature du filtre de fréquences correspondant ?

Exo 8 — Sismographe

a) Un sismographe est typiquement constitué d'une masse M attachée à un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 (Fig. 75). Le ressort est fixé à un bâti lié au sol. Un dispositif non représenté assure un amortissement sur la masse se traduisant par la force : $\vec{f} = -h\vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse de la masse par rapport au bâti. L'axe Oz est lié au sol (et au bâti). En l'absence de séisme, le référentiel lié au sol est supposé galiléen. Quelle est la longueur du ressort au repos l_0' ?

b) Quand un séisme intervient, le sol subit un déplacement $Z(t)$ (l'orientation de \vec{u}_z est aussi vers le bas) par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel lié au sol est-il alors galiléen ?

c) On pose $u(t) = z(t) - l_0'$. Montrer que : $\ddot{u} + \frac{\sqrt{2}}{\tau}\dot{u} + \omega_0^2 u = \alpha \ddot{Z}$

On précisera la valeur et l'homogénéité de τ , ω_0 et α . On explicitera aussi leur interprétation physique.

d) On se place désormais en régime sinusoïdal forcé. Notamment, $Z(t) = Z_0 \exp(i\omega t)$. Donner l'expression de la fonction de transfert mécanique $\underline{H}(j\omega) = \frac{u}{Z}$ dans le cas $\omega_0\tau = 1$ (on mettra \underline{H} sous forme d'une fonction de ω_0/ω).

e) Tracer son diagramme de Bode. Quel type de filtre a-t-on réalisé ?

f) La pulsation propre du sismomètre étant $\omega_0 = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique $u(t)$. L'application d'un algorithme de transformée de Fourier fournit le spectre c_n tracé en Fig. 76. Quelle est la période de cette onde ?

h) Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de $u(t)$ permette de déduire directement $Z(t)$?

i) En considérant l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $\omega_0\tau > 1$, expliquer pourquoi le choix $\omega_0\tau > 1$ doit absolument être évité.

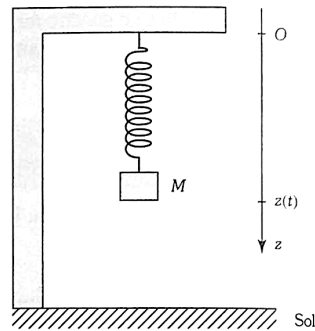


Figure 75

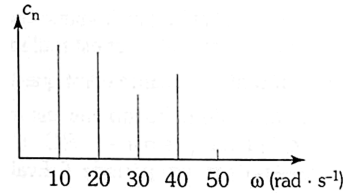


Figure 76

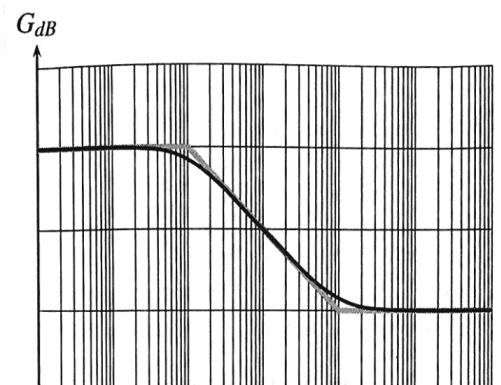
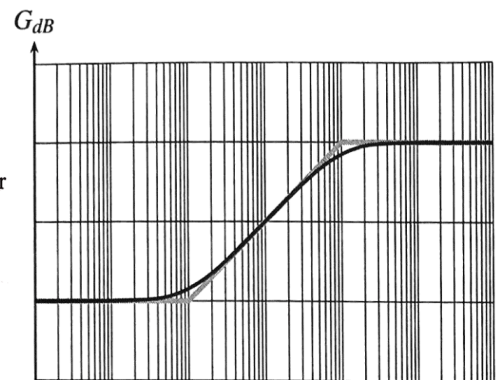
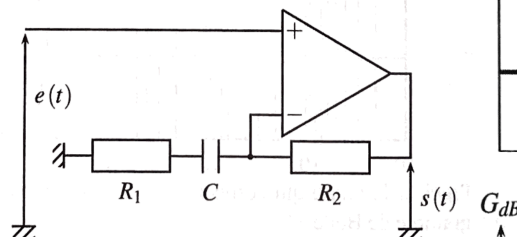
Exo 9 — Filtre accentuateur

On considère le circuit ci-dessous, pour lequel $R_1C = 10^{-3} \text{ s}$ et $(R_1 + R_2)C = 10^{-1} \text{ s}$.

1. Pourquoi le système est-il stable ?

2. Établir la fonction de transfert sous la forme $H(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{1 + \tau_1 p}$, où τ_0 et τ_1 sont à exprimer en fonction de R_1 , R_2 et C .

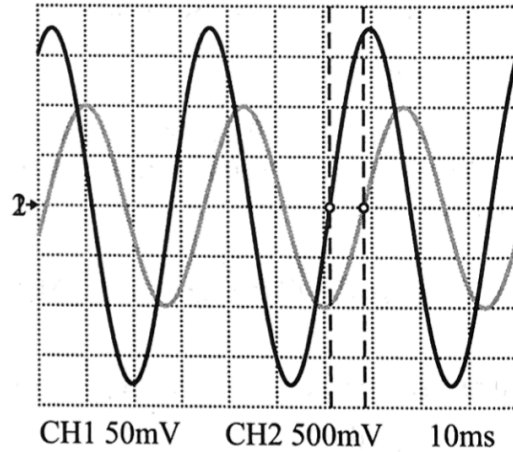
3. On propose page suivante deux tracés de gain en décibel. Préciser celui qui correspond au filtre étudié; les différentes pentes; les valeurs sur les axes; conclure quant au nom de « filtre accentuateur ». Quelle sont les valeurs de la phase dans chaque domaine asymptotique ?



4. On alimente le circuit avec $e(t) = E_0 + E_1 \cos(2\pi f_e t)$, où $E_0 = E_1 = 1 \text{ V}$ et $f_e = 1,6 \text{ kHz}$. Que vaut la sortie $s(t)$ en régime établi ?

5. Lors du câblage du circuit, la valeur de R_2 n'a pas été exactement respectée, c'est-à-dire $(R_1 + R_2)C \approx 10^{-1} \text{ s}$, alors que les valeurs de R_1 et C sont bien celles de l'introduction, $R_1C = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. On observe expérimentalement à l'oscilloscope les signaux ci-contre, avec $e(t)$ (en gris) et $s(t)$ (en noir).

voie 1 freq 30.0 Hz	voie 1 C-C 200 mV
voie 2 C-C 3.56 V	curseurs Δt 7.0 ms



- a. En déduire la valeur du produit R_2C .
- b. Que vaut le déphasage entre les deux signaux ? Quel est le signal en retard sur l'autre ?
- c. Établir et tracer la réponse indicielle du circuit. On exprimera la solution en fonction de R_1 , R_2 et C , sans application numérique. Sachant que $R_2 \approx 10^2 R_1$, à quelle condition sur l'amplitude du signal d'entrée peut-on observer un tel signal en sortie de l'amplificateur opérationnel ?

6. On tient dorénavant compte des défauts de l'amplificateur opérationnel, qui est modélisé par un passe-bas du premier ordre, de constante de temps 10 ms.

a. Rappeler la fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel, avec les valeurs numériques des constantes qui y apparaissent.

b. Montrer que la fonction de transfert du circuit se factorise sous la forme (on rappelle que $R_1C = 10^{-3}$ s et $R_2C \approx 10^{-1}$ s) :

$$H(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \theta p)},$$

où θ dépend de R_1 , R_2 , C et des caractéristiques internes de l'amplificateur opérationnel.

c. Expliquer pourquoi la tension de sortie n'est alors pas discontinue lorsque l'entrée passe de 0 à E_0 en $t = 0$.

d. Quelle est la valeur de $\frac{ds}{dt}(0^+)$? Conclusion ?