[Démo HP]

Théorème de Gauss

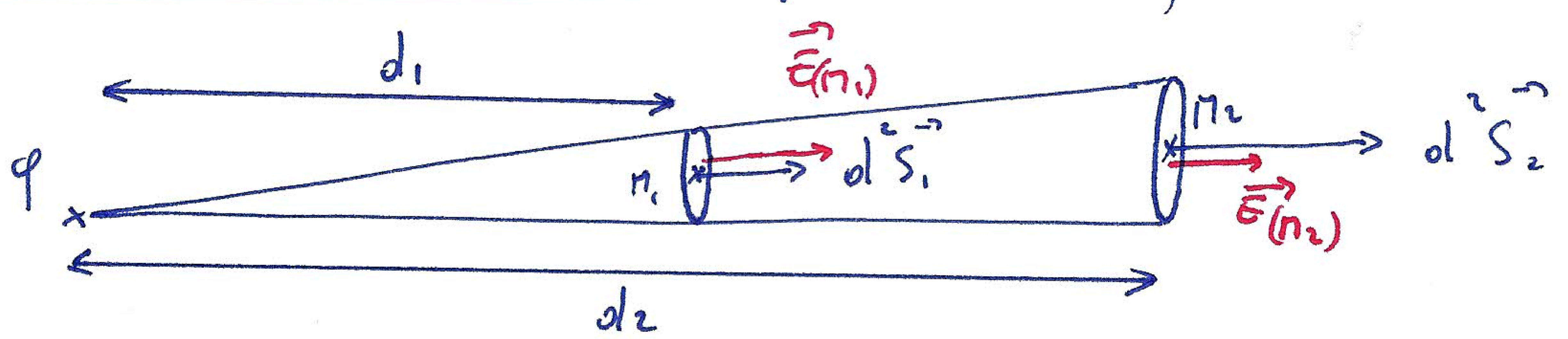
Ce puissant théorème trouve son origine dans la forme mathématique de la loi de Coulomb qui se traduit sur le champ électrique par :

champ d'une charge ponctuelle : $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{e_r}}{r^2}}$

Conséquence sur le calcul du flux :

→ 2 aspects

1 – distance entre la charge et la surface



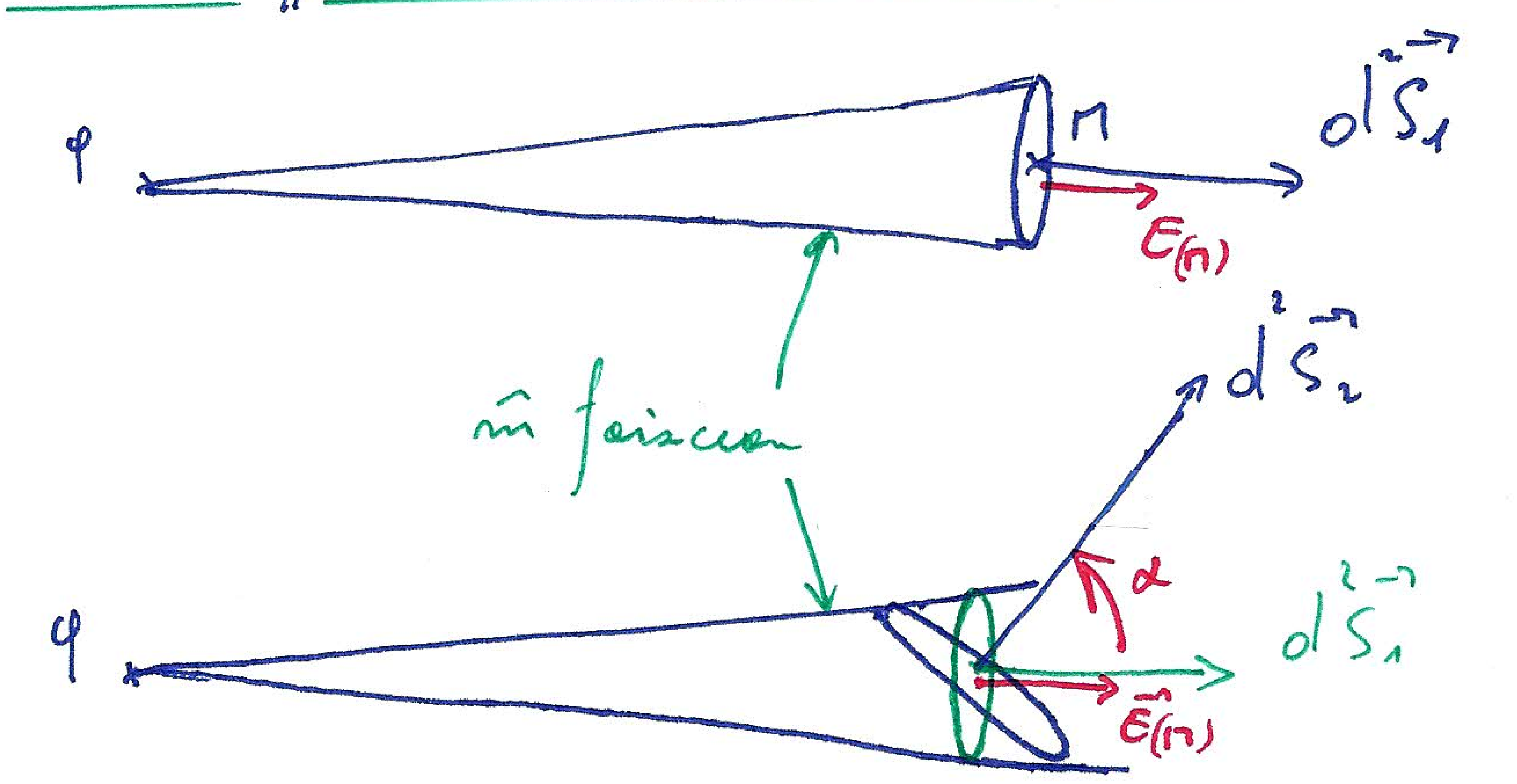
E diminue en $\dfrac{1}{d^2}$

$\Rightarrow E_2 = E_1 \times \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$

$d^2\phi_1 = d^2\phi_1 \Rightarrow \boxed{d\vec{S_2} = \left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot d\vec{S_1}}$

Le flux sera le m̂ si $dS \propto d^2$

2 – effet de l'orientation de $d\vec{S}$



Pour avoir

$d^2\phi_1 = d^2\phi_2$ avec $(\vec{E}(M)\ \vec{E}(M_1) = \vec{E}(M_2))$

on obtient

$d\vec{S_1} \cdot \vec{e_r} = d\vec{S_2} \cdot \vec{e_r}$

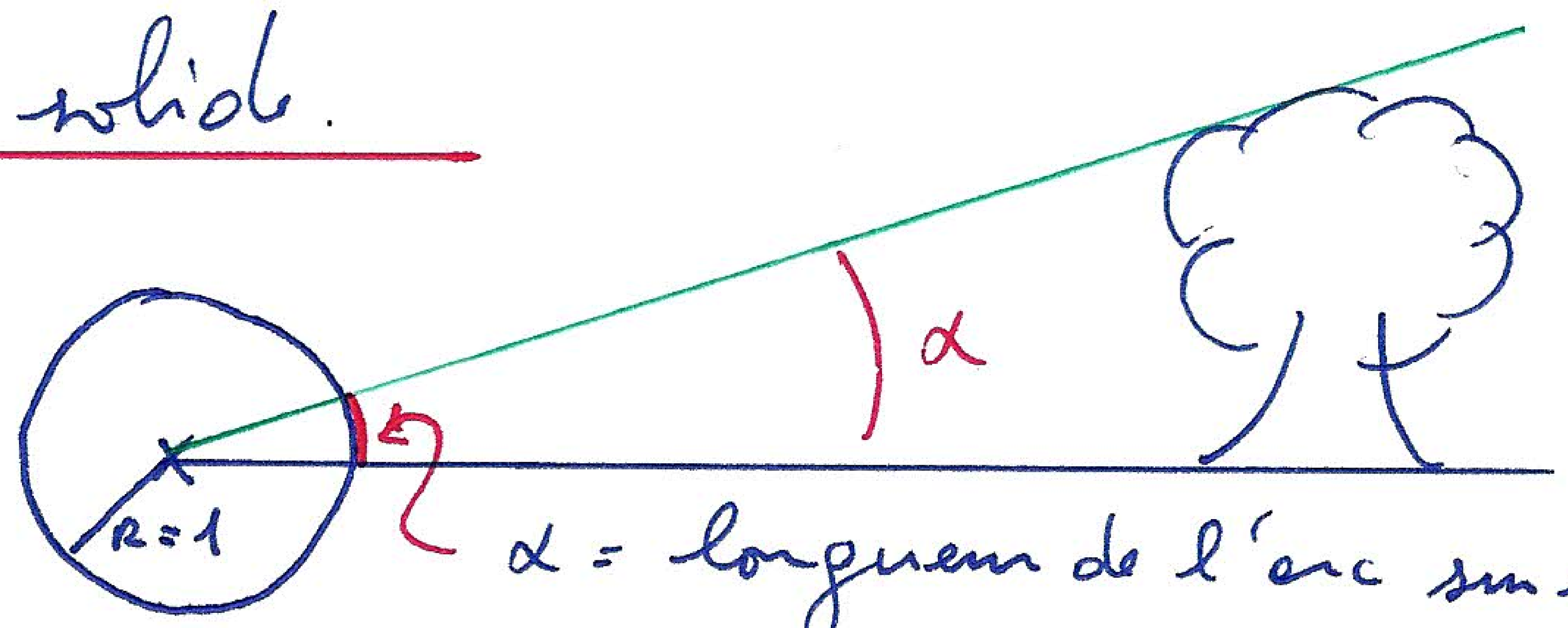
$= dS_2 \cdot \cos(\alpha)$

Soit $\boxed{dS_1 = dS_2 \cdot \cos(\alpha)}$

Le flux sera le m̂ si les deux surfaces interceptent le m̂ faisceau élémentaire.

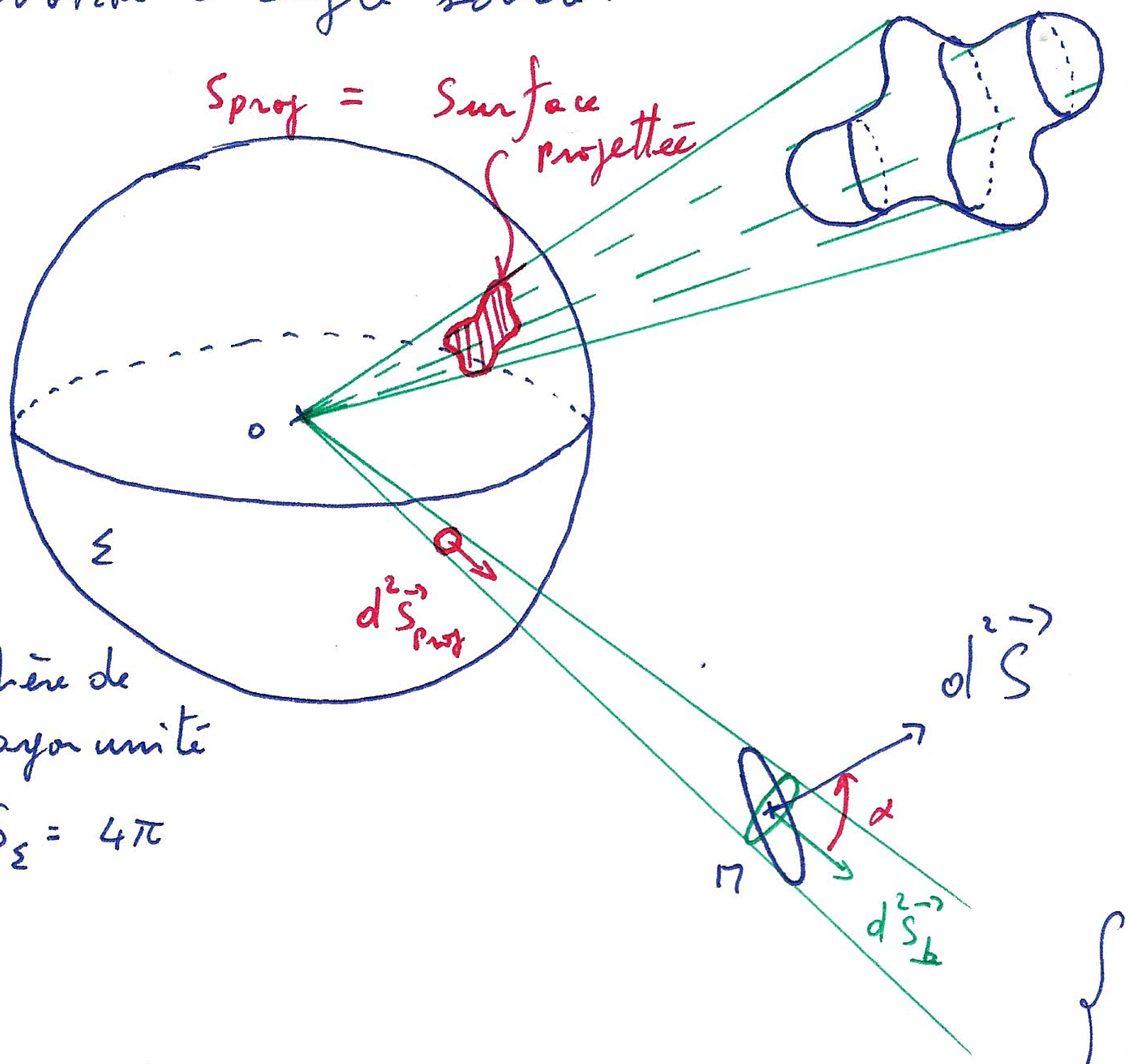
Notion d'angle solide.

* Notion d'angle :



α = longueur de l'arc sur un cercle de rayon R = 1.

* Notion d'angle solide :



Σ : Sphère de rayon unité

$S_\Sigma = 4\pi$

* Angle solide :

$$\Omega \equiv \frac{S_{proj}}{S_\Sigma} = \frac{S_{proj}}{4\pi}$$

* Angle solide élémentaire :

$$d^2\Omega \equiv \frac{d^2 S_{proj}}{4\pi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2\vec{S}_{proj} = d^2 S_{proj} \cdot \vec{e_r} \\ d^2\vec{S}_\perp = d^2 S_\perp \cdot \vec{e_r} \end{array} \right\}$$

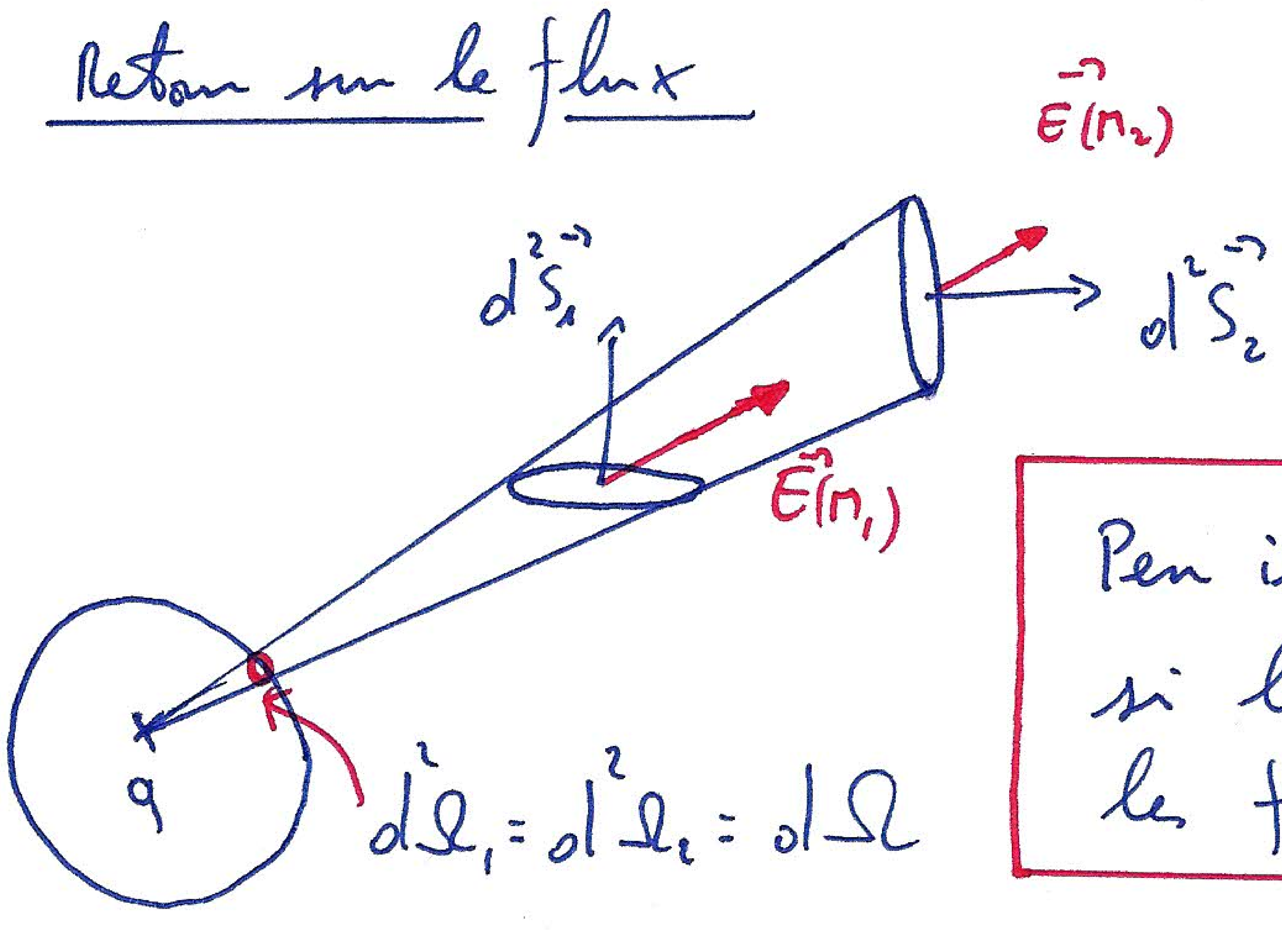
Soit $\|\vec{OM}\| = d$

* $d^2 S_{proj} = \dfrac{d^2 S_\perp}{d^2}$

* $d^2 S_\perp = d^2\vec{S} \cdot \vec{e_r} = d^2 S \cos(\alpha)$

On trouve donc : $\boxed{d^2\Omega = \dfrac{d^2\vec{S} \cdot \vec{e_r}}{4\pi d^2}} = \dfrac{d^2 S \cdot \cos(\alpha)}{4\pi d^2}$

Retour sur le flux



$$d^2\phi_1 = d^2\vec{S}_1 \cdot \vec{E}(M_1) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{d\vec{S}_1 \cdot \vec{e_r}}{4\pi d_2^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot d^2\Omega$$

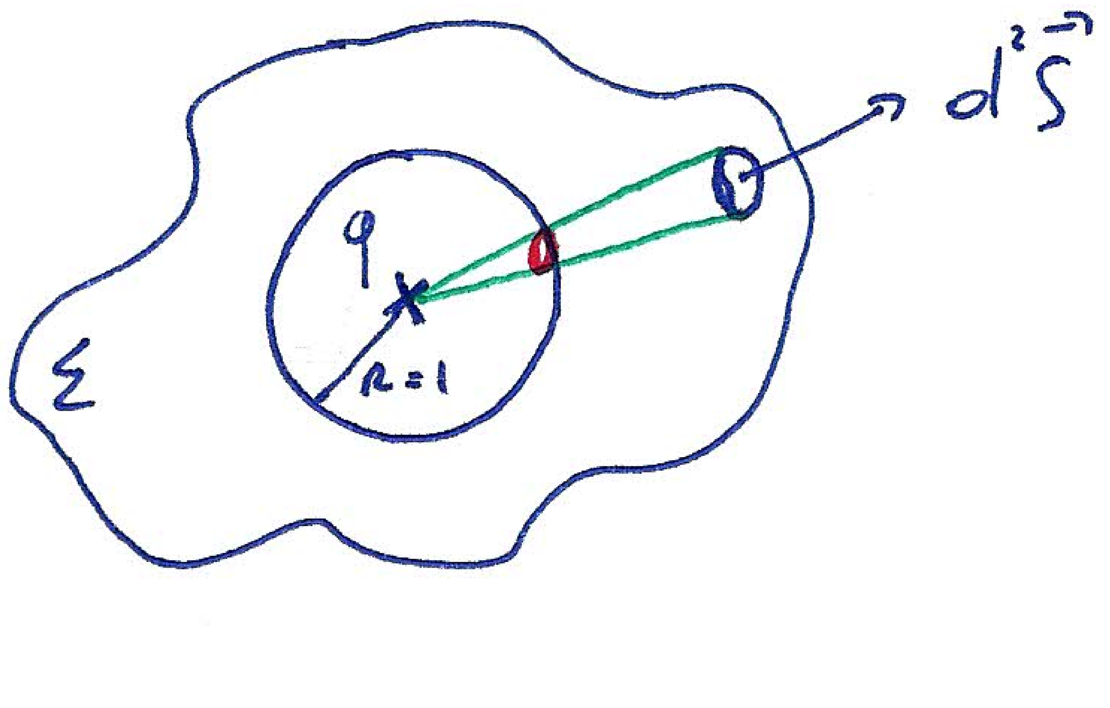
$$d^2\phi_2 = d^2\vec{S}_2 \cdot \vec{E}(M_2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{d\vec{S}_2 \cdot \vec{e_r}}{4\pi d_1^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot d^2\Omega$$

Peu importe l'orientation ou la distance, si les angles solides sont les mêmes, les flux seront identiques

Conséquence 1 : flux d'une charge ponctuelle à travers une surface fermée.

Deux situations possibles :

→ **charge à l'intérieur de Σ :**



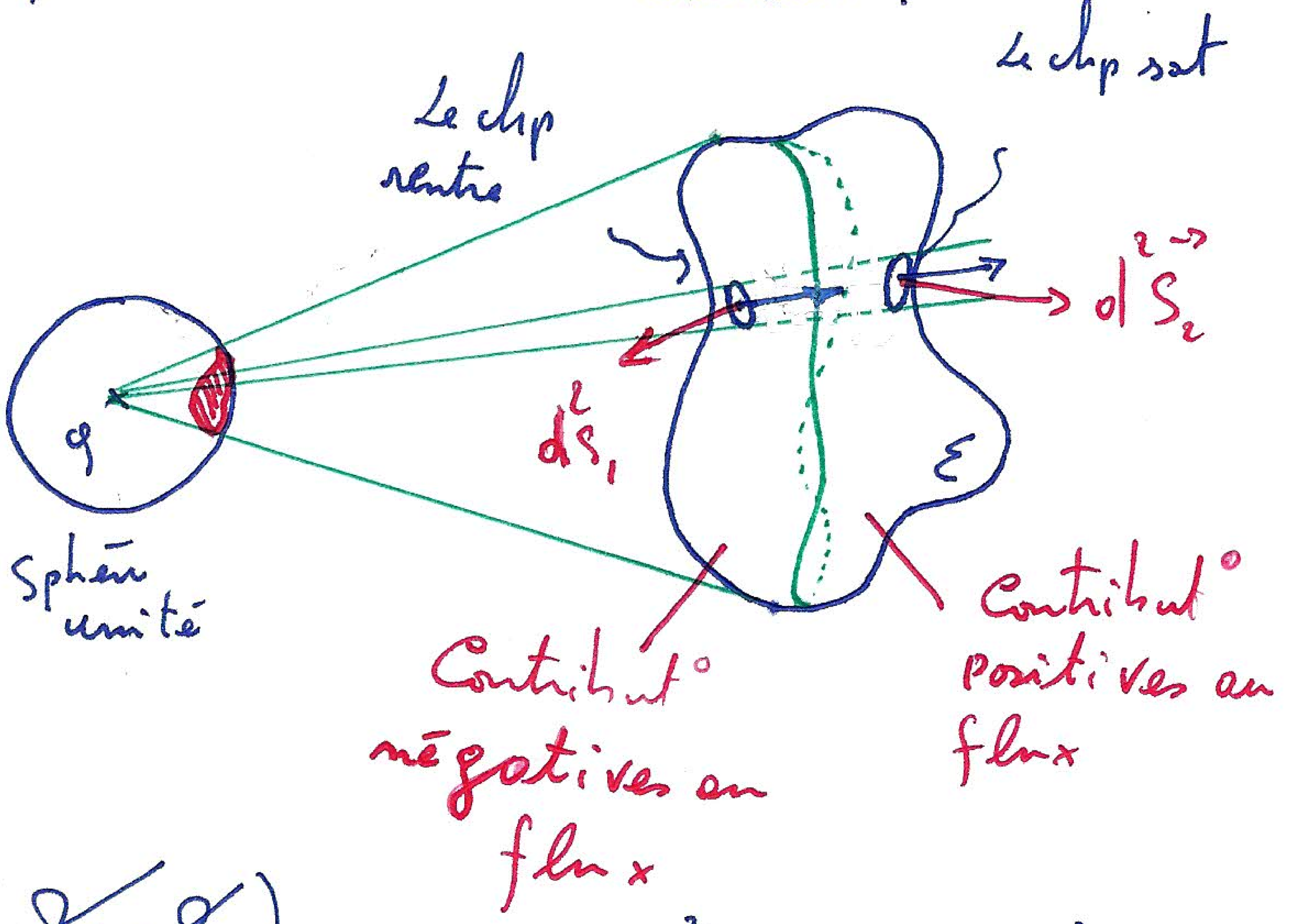
$$\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \frac{q}{\varepsilon_0}\cdot d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}\iint_\Sigma d\Omega$$

Vu de l'intérieur $\iint_\Sigma d\Omega = \iint_{\text{Sphère}} \frac{d S_{\text{projetée}}}{4\pi} = \frac{4\pi}{4\pi} = 1$

$$\boxed{\phi_\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Rq :
Toutes les lignes de champ issues de q traversent Σ en sortant.

→ **charge à l'extérieur de Σ :**



$$\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}\iint_\Sigma d\Omega = ?$$

La surface projetée sur la sphère unité est couverte une fois positivement et une fois négativement.

Soit $\phi_\Sigma = \frac{q}{\varepsilon}\left[\cancel{\iint_{\Sigma_+} d\Omega} - \cancel{\iint_{\Sigma_-} d\Omega}\right] = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(\cancel{\Omega_+} - \cancel{\Omega_-}\right)$

$$d^2\Omega_2 = -d^2\Omega_1$$

$$\boxed{\phi_\Sigma = 0}$$

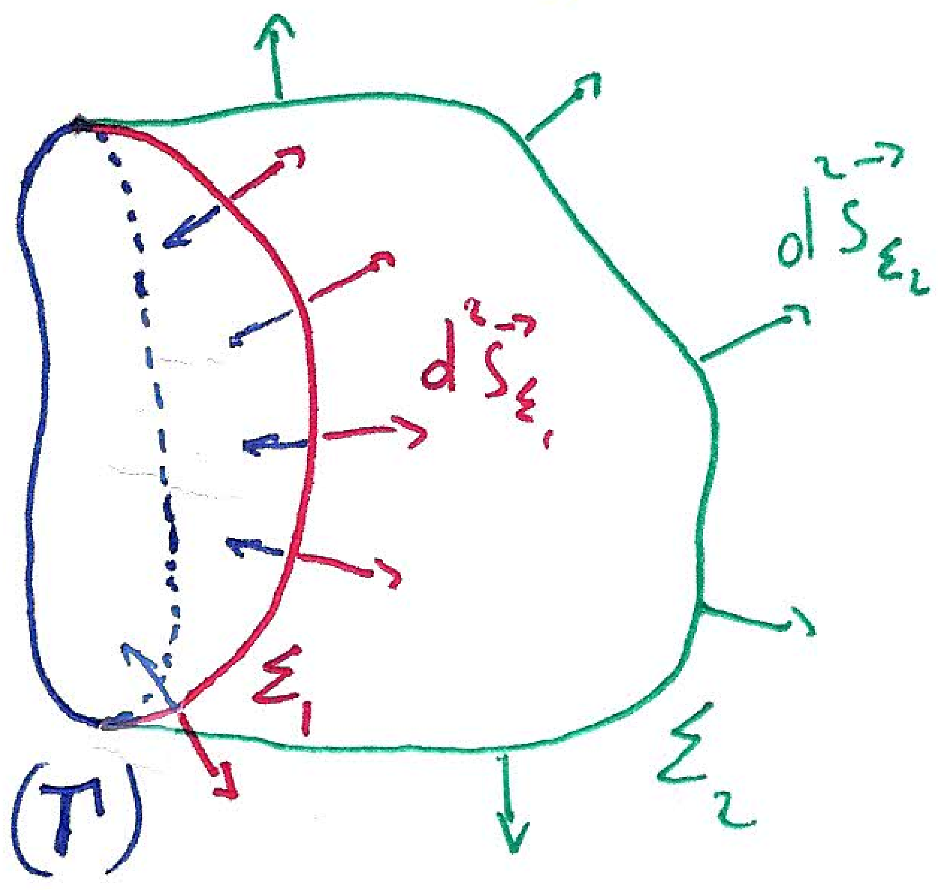
Rq : Toutes les lignes de champ qui sont rentrées dans Σ en sont ensuite ressorties.

Th de Gauss pour une charge ponctuelle :

$$\begin{cases} \text{Si } q \text{ est à l'intérieur de } \Sigma : \phi_\Sigma = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \\ \text{Si } q \text{ est à l'extérieur de } \Sigma : \phi_\Sigma = 0 \end{cases}$$

* Conséquence 2 : Surface avec un bord.

Soit (Γ) un contour fermé, Σ_1 et Σ_2 deux surfaces portées par (Γ) :



On définit $(\Sigma) \equiv (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2)$

Une surface fermée orientée vers l'extérieur ($d\vec{S}$ inversé sur Σ_1)

$$d^2S_{\Sigma_1} = -d^2S_{\Sigma}$$

$$d^2S_{\Sigma_2} = +d^2S_{\Sigma}$$

$\forall \mathcal{D}$ de charge extérieure à Σ : $\phi_\Sigma = 0$

Or $\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \phi_{\Sigma_2} - \phi_{\Sigma_1} = 0$

Soit $\boxed{\phi_{\Sigma_1} = \phi_{\Sigma_2}}$

Prop :

Soit (Γ) un contour fermé, le flux intercepté par (Γ) ne dépend pas de la surface qui s'appuie sur (Γ)

* Cas d'un champ $\vec{E}$ uniforme : $\vec{E} = c^{te}$. (charge ponctuelle à l'∞)

$$\phi_{\Sigma_1} = \phi_{\Sigma_2} \Leftrightarrow \iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}_2 \Leftarrow \vec{E}\cdot\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \vec{E}\cdot\iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

$\forall \vec{E} = c^{te}$.

Soit $\forall_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = \vec{S}$.

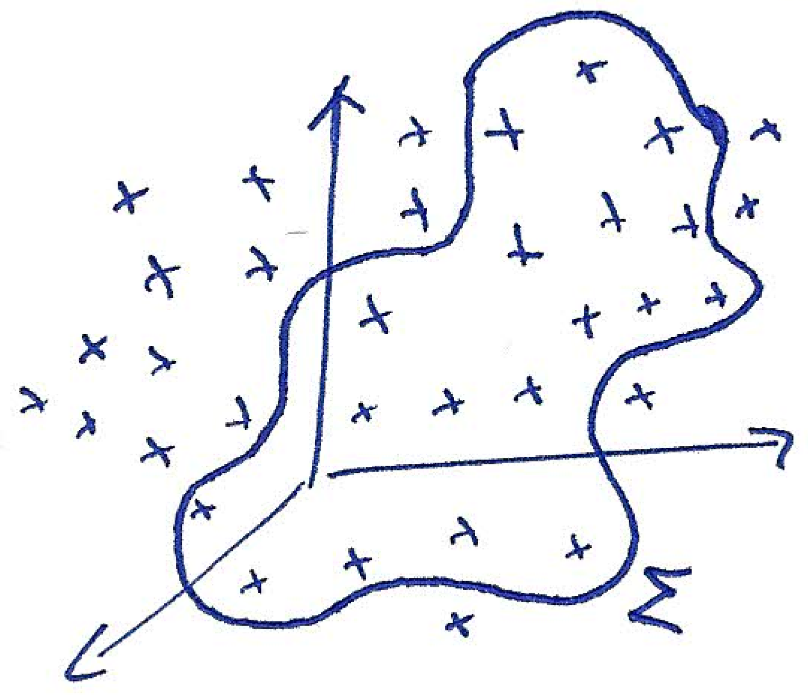
On définit le vecteur surface d'un contour (Γ) par

$$\boxed{\vec{S} \equiv \iint_\Sigma d\vec{S}}$$

$\forall \Sigma$ qui s'appuie sur (Γ)

Théorème de Gauss :

Soit $(\mathcal{D})$ une distribut° qcq de charges ponctuelles et soit (Σ) une surface fermée :



$*$ $\vec{E} = \sum_i \vec{E_i}$ somme des chp des charges ponctuelles (Principe de superposition).

$$\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \iint \left(\sum_i \vec{E_i}\right).d\vec{S} = \sum_i \iint \vec{E_i}.d\vec{S}.$$

$*\, q$ à l'intérieur $\phi_i = \dfrac{q_i}{\varepsilon_0}$

$*\, q$ à l'extérieur $\phi_i = 0$

$$\phi_\Sigma = \sum_i \phi_i = \sum_{i \text{ à l'intérieur}} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$*$ Passage au continu : $q_i \to dq_P$ $\quad \sum_i \to \int_D$ $\Rightarrow$ $\boxed{\phi_\Sigma = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \int_D dq_P = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon}}$

Th. de Gauss :

Soit $(\mathcal{D})$ une distribut° de charge et (Σ) une surface qui englobe une charge Q_{int}.

$$\boxed{\phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S}_\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

<u>Prop</u> : formule de Green - Ostrogradski

Soit $\vec{v}$ un chp de Vecteur et (Σ) la frontière fermée d'un Domaine $(\mathcal{D})$

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{v}\, d\vec{S} = \iiint_D Div(\vec{v}).d\tau}$$

Ici $\displaystyle\iint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_D Div(\vec{E}).d\tau$ or d'après Gauss $\displaystyle\iint_\Sigma \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_D \rho\, d\tau$

Soit $\displaystyle\iiint_D \left[Div(\vec{E}) - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right] d\tau = 0$ Vraie $\forall D$ $\Rightarrow$ Vraie localement càd :

$$\boxed{Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Maxwell - Gauss.

champ

source

Traduction de la <u>loi de Coulomb</u> en formalisme Vectoriel pour une distribution de charge locale.