

Électromagnétisme dans l'ARQS

Les équations de Maxwell ☕

Objectifs :

- Synthèse des équations de Maxwell ☕
- ARQS & eq° de Maxwell
- Induction & courants de Foucault
- Energies et couplages magnétiques

Révisions 1ère année :

- ARQS en électrocinétique
- Effet d'influence dans une capacité
- Loi de Faraday & Induction
- E_{elec} , E_{mag} et densité d'énergie EM.
- Transformateur & couplages EM

I - Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont la traduction mathématiques locales des théorèmes fondamentaux de l'électromagnétisme qui ont été établis sur une base empirique. Chaque équation porte le nom du physicien qui l'a établi mais c'est Maxwell qui a proposé une interprétation et une synthèse de ces équations.

Il a également complété le théorème d'Ampère pour le rendre compatible avec la conservation de la charge → charge d'un condensateur.

1 - Théorème de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \xrightarrow{\text{Green - Ostrogradsky}} \text{Div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Écriture macroscopique Écriture locale

Maxwell-Gauss

2 - Conservation du flux magnétique

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{Green - Ostrogradsky}} \text{Div}(\vec{B}) = 0$$

Écriture macroscopique Écriture locale

Maxwell-Thomson
« Maxwell-flux »

Interprétation :

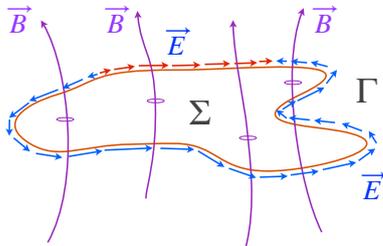
Ces deux équations ne font pas référence au temps t , et restent valides pour toute évolution des champs $\vec{E}(t, M)$ et $\vec{B}(t, M)$.

3 - Loi de Faraday

La loi de Faraday relie l'évolution temporelle du champ $\vec{B}(t, M)$ avec les caractéristiques géométriques du champ $\vec{E}(t, M)$ par le biais de la force électromotrice induite ou f.e.m $e(t)$. Les relations ci-dessous sont toujours valides. Elles sont à la base du **phénomène d'induction**.

$$e = - \frac{d\Phi_{\Gamma}}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

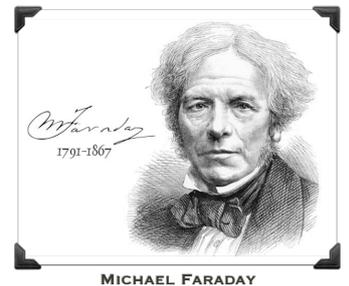
Écriture macroscopique Écriture locale



Interprétation :

▲ : $\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$ est la circulation élémentaire de \vec{E} autour de $d\vec{S}$.

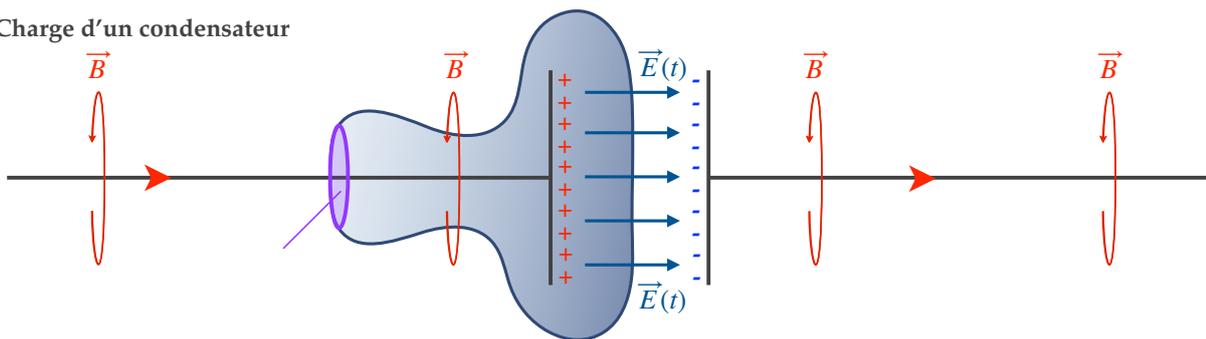
Démo :



4 - Généralisation du théorème d'Ampère

La principale contribution de Maxwell aux équations qui portent son nom a été d'identifier et résoudre le problème qui se pose à des situations très simples dès lors que l'on prétend appliquer le théorème d'Ampère en régime variable dans le temps.

α - Charge d'un condensateur



On considère la situation ci-dessus où le condensateur possède la symétrie de révolution. Si l'on applique le théorème d'Ampère sur ce contour Γ et sur une surface Σ quelconque, on aboutit à un paradoxe. On peut en effet choisir n'importe quelle surface pour appliquer Ampère :

- Sur Σ_0 : On a bien car un courant i traverse Σ_0 (en violet).
- Sur Σ : On a en revanche car aucun courant ne traverse Σ (en bleu).

Notons au passage qu'il n'y a pas « conservation de la charge » au sein du volume $\Sigma \cup \Sigma_0^{inv}$, et c'est justement le courant qui apporte ces charges. En réalité, par **effet d'influence**, elles attirent des charges « - » sur l'autre armature ce qui permet le passage du courant à travers le condensateur !

Ceci est rendu possible par le **champ électrique $\vec{E}(t, M)$ qui, augmentant avec les charges apportées par le courant i , attirent la même quantité de charge négatives en vis-à-vis.** [Th. de Gauss]. Cet effet d'influence est équivalent à un courant que Maxwell a nommé « **courant de déplacement** »

β - Courant de déplacement

Maxwell propose ainsi d'ajouter un terme à l'équation d'Ampère qui modélise l'évolution temporelle du champ électrique.

Démo : Pour trouver l'expression de ce terme on utilise le champ uniforme dans un condensateur plan infini où l'on a montré que :

$$E_x(t) = \frac{\sigma_+(t)}{\epsilon_0} \text{ avec } \sigma_+(t) \text{ la densité surfacique de charge sur l'armature positive. Soit } S \text{ la section du condensateur : } Q_+(t) = S \sigma_+(t)$$

On appelle par abus de langage « **courant de déplacement** » le terme $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ de l'équation de Maxwell-Ampère car il prend la place de $\mu_0 \vec{j}$ dans l'entrefer du condensateur. Toutefois ce n'est pas un courant mais une densité de courant (Am^{-2}) et il n'y a justement aucun déplacement car on est dans le vide de l'entrefer du condensateur MAIS ça marche !!! On a donc finalement :

On peut enfin vérifier la **Conservation locale de la charge** à l'aide des deux équations sources :

5 - Résumé des équations de Maxwell

On résume ainsi les théorèmes empiriques de l'électromagnétisme à ces quatre équations qui sont toujours vraies :

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{Div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Thomson} \quad \text{Div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{Div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Thomson} \quad \text{Div}(\vec{B}) = 0$$

II - ARQS & Équations de Maxwell

1 - ARQS : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire

α - ODG : Ordre De Grandeur

On souhaite ici définir un cadre simplifié des équations de Maxwell qui correspondent à la plupart des expériences et ODG mis en jeu.

Pour cela on note E et B les ODG de variation typique des champs électrique et magnétique ; on note L et T les distances et durées typiques sur lesquelles varient ces mêmes champs. Enfin lors d'un raisonnement par ODG on remplace les opérations de dérivation par des divisions.

Ainsi :

β - ARQS magnétique $Div(\vec{j}) = 0$

On parle d'ARQS magnétique le fait de négliger le « courant de déplacement » dans Maxwell-Ampère, ce qui **permet d'appliquer le théorème d'Ampère** sans se soucier de la conservation locale de la charge. Conséquences : $L \ll cT$ et $Div(\vec{j}) = 0$

Démo :

Interprétation :

- Cela signifie que l'échelle typique sur laquelle varient les champs est petite devant celle parcourue par une onde électromagnétique (à la vitesse de la lumière) dans le temps typique d'évolution de ces mêmes champs. **Concrètement au sein d'un système de charges et de courants, l'information électromagnétique s'est propagée de façon instantanée en tout point du système avant que les charges et courants n'aient évolués.**

- En corollaire on retrouve la **loi des noeuds locale** $Div(\vec{j}) = 0$, c-à-d pas d'accumulation locale de charge :

2 - Applications :

α - Circuit LC dans l'ARQS

Des étudiants travail sur un circuit LC en TP de taille typique $D = 1m$ (longueur de câblage) tel que $L = 100mH$ et $C = 1\mu F$.

- Vérifier que l'on est bien dans le cadre de l'ARQS.
- Proposer une fréquence limite f_{ARQS} et interpréter.

β - Contre-exemple trivial

Montrer que la propagation d'une onde électromagnétique (lumière ou autre) donc à la vitesse c_0 est un phénomène hors ARQS.

3 - Résumé des équations de Maxwell dans l'ARQS

Il existe deux ARQS mais nous ne garderons au programme que l'ARQS dite « magnétique »

ARQS magnétique

Maxwell-Gauss	$Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Thomson	$Div(\vec{B}) = 0$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Le théorème d'Ampère s'applique !

LDN : pas d'accumulation locale de charge $Div(\vec{j}) = 0$

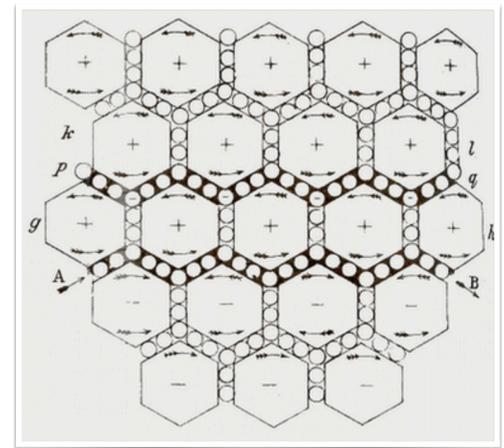
ARQS Électrique - HP

Maxwell-Gauss	$Div(\vec{E}) = 0 + \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Thomson	$Div(\vec{B}) = 0$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

TD : Etude de la charge d'un condensateur en régime lentement variable

Maxwell avait une idée très « concrète » au sens mécanique des phénomènes électromagnétiques d'où le terme « courant de déplacement ».

On retrouve un peu les circulations (rotationnel → formule de Stokes) dans des systèmes d'engrenages qu'il imaginait comme véhicule des charges.



Le milieu « tentaculaire » de Maxwell



Les modèles physiques sont souvent, à l'origine, très éloignés de ce qui en restera à la postérité. **L'important c'est que ça marche !**

III - Induction

1 - Le phénomène d'induction

L'équation Maxwell-faraday permet d'établir

la Loi de Faraday sur un circuit :

Révision 1ère année : Auto-induction & Induction Mutuelle

On pose pour cela : la f.e.m $e \equiv \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ et le flux $\Phi_{\Gamma} \equiv \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

2 - Energie magnétique

Il a été établi en première année que pour un circuit seul parcouru par un courant i l'énergie associée au phénomène d'auto-induction vaut :

Avec le flux propre : $\Phi = Li$ $L > 0$ (en Henry)

Révision 1ère année : Energies propres et mutuelles

Pour deux circuits de courant i_1 et i_2 il y a inductions propres des circuits et aussi induction mutuelle entre les deux circuits. Cette dernière est quantifiée par un coefficient d'induction mutuelle M dont le signe dépend de l'orientation relative des deux circuits. On a l'énergie :

3 - Densité d'énergie magnétique

On s'appuie pour trouver cette densité d'énergie, sur une situation où le champ est uniforme :

$$B_0 = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{h} I$$

—> Solénoïde infini (tronçon de hauteur h et de section S)

4 - Couplages

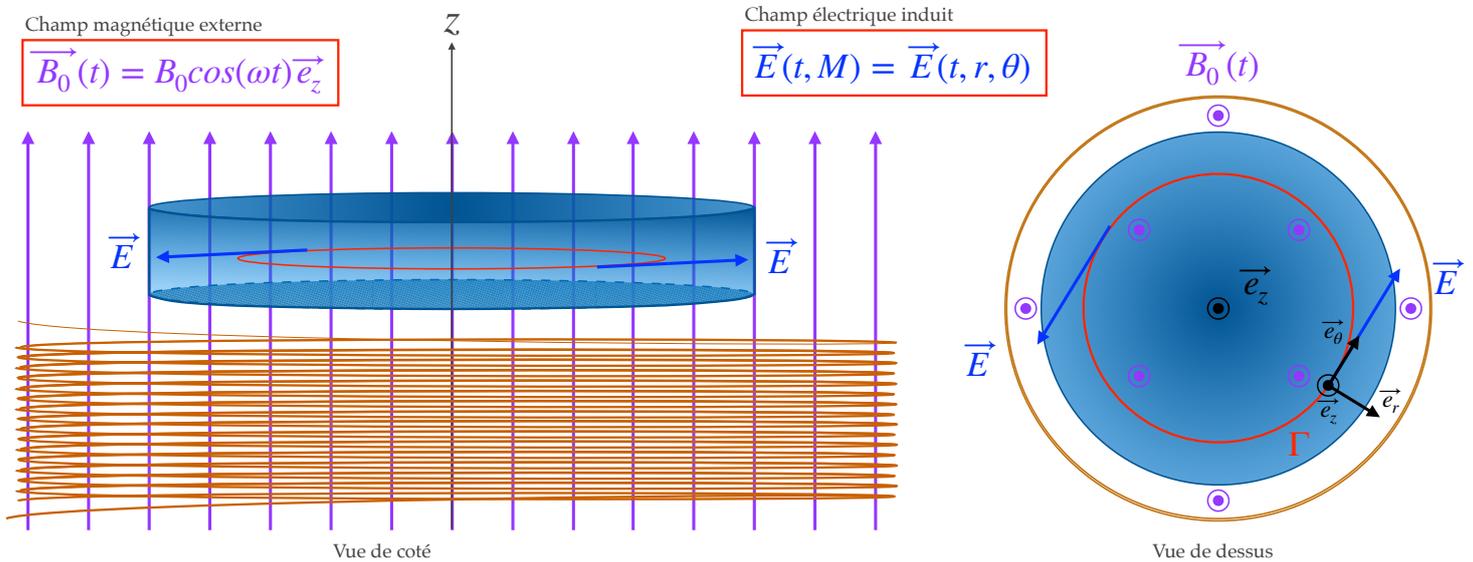
Il existe différentes qualité de couplage selon les enroulement réalisés (Voir cours 1ère année). Dans le pire des cas $M = 0$ les deux circuits n'ont pas de flux magnétique en commun. Mais dans le meilleur des cas on montre toutefois que l'on doit toujours vérifier : $M^2 \leq L_1 L_2$

5 - Courants de Foucault

— Calcul complet sur copie double —

On parle de « courants de Foucault » pour désigner des courants induits dans un volume conducteur, et qui sont généralement la source de déperdition par effet Joule. Ils sont utiles pour réaliser un freinage magnétique (train, métro) en complément d'une éventuelle récupération de l'énergie au freinage.

Pour l'illustrer, on plonge un conducteur cylindrique dans un champ magnétique uniforme (solénoïde, bobines de Helmholtz), mais qui varie sinusoidalement dans le temps. Concrètement c'est exactement le cas de la **cuisson par induction**. On se place ici dans le cadre de l'ARQS magnétique car les fréquences sont faibles (50Hz).



5 - Courants de Foucault

α - Structure du champ électrique $\vec{E}(t, M)$ induit [HP \rightarrow admis au programme]

Comment peut-on prouver que le champ est sous la forme $\vec{E}(t, M) = \vec{E}(t, r, \theta)$ et même $\vec{E}(t, M) = E_\theta(t, r) \vec{e}_\theta$?

1er point : On se place dans un conducteur $\Rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E}$ et dans l'ARQS \Rightarrow pas d'accumulation de charge. Si il y avait des composantes de \vec{E} (donc de \vec{j}) selon \vec{e}_r ou \vec{e}_z les charges viendrait s'accumuler sur les bords latéraux (au centre aussi) ou sur les faces inférieurs et supérieurs. C'est ce qui se passe par exemple dans une antenne (hors ARQS !)

2nd point : On utilise l'invariance par rotation : $E_\theta(t, r, \theta, z) = E_\theta(t, r, z)$

3ème point : On utilise le rotationnel $\text{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: composante nulle sur $\vec{e}_r \Rightarrow E_\theta(t, r, z) = E_\theta(t, r)$ [cf-schéma]

Discussion : En réalité cette structure de champ est approximative, et n'est valide dans l'ARQS que parce que le champ induit est très faible au regard du champ extérieur. Dans la réalité le \vec{E} induit crée un nouveau champ \vec{B}_1 qui crée un autre \vec{E}_1 qui crée un etc

ODG : $\frac{E}{R} \sim \frac{B_0}{T}$ soit. $E \sim \frac{R}{T} B_0 \ll c_0 B_0$ or $B_1 \propto E$ donc dans l'ARQS $B_1 \ll B_0$

attention \blacktriangle : Ceci n'est en aucun cas une démonstration mais montre que les effets restent faibles à basse fréquence (ARQS) au regard de ce qu'ils seraient à plus haute fréquence (hors ARQS).

Conclusion :

On retiendra que dans un champ magnétique uniforme et mais variable dans le temps, les courants de Foucault $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ décrivent des boucles fermées dans le métal. Leur forme exacte dépend de la forme du conducteur : pour un cylindre ce sont des cercles concentriques.

Courants de Foucault

La variation du champ magnétique dans le ferromagnétique conducteur induit des courants appelés «courants de Foucault» dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, exactement comme dans la plaque à induction.

Ces courants dissipent en partie l'énergie amenée par le primaire : **on parle de pertes « fer » par courants de Foucault** .

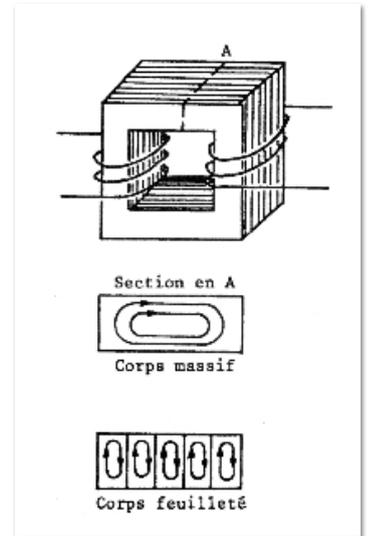
Nous avons vu que dans un champ uniforme, **la puissance est dissipée avec une loi de distribution parabolique**, autrement dit la puissance dissipée devient importante si la boucle de courant possède un diamètre important. Inversement, en réduisant la taille physique des zones conductrices on réduit la taille des boucles de courant et avec elles la dissipation. Ces petites boucles réalisent une dissipation négligeable. Enfin, les boucles sont perpendiculaires au champ B.

Conclusion :

Pour limiter les pertes « fer » par courants de Foucault, on utilise un **ferromagnétique** :

- Formés de **feuilletés très fins et isolés** [épaisseur $e \sim 0.1mm$ et couche isolante $\Delta e \sim 0.01 mm$]
- juxtaposés **parallèlement aux lignes de champ**.
- Si possible de forte résistivité \Rightarrow ferromagnétique **peu** ou « pas » **conducteur**.

\Rightarrow Etude des milieux ferromagnétiques



ACIER AU SILICIUM : STATOR D'ALTERNATEUR



Ferromagnétique doux

ROTOR D'ALTERNATEUR



Les matières transformées varient de l'**acier au silicium** fully processed à grain non orienté et à grain orienté, acier magnétique semi-fini, à la qualité laminée à froid bas carbone, dans des **épaisseurs de 1 mm descendant jusqu'à 0,2 mm pour nuance à haute teneur en silicium** \rightarrow **fer doux feuilleté !**

Stators d'Alternateurs pour Automobile

 **r. bourgeois** est le leader mondial dans la production de stators d'alternateurs pour l'automobile, avec des productions dépassant 15 millions de stators par an.

Isolation de paquets de tôles avant le bobinage