

# Électromagnétisme dans l'ARQS

## Les équations de Maxwell

### Objectifs :

- Synthèse des équations de Maxwell 
- ARQS & eq° de Maxwell
- Induction & courants de Foucault
- Energies et couplages magnétiques

### Révisions 1ère année :

- ARQS en électrocinétique
- Effet d'influence dans une capacité
- Loi de Faraday & Induction
- $E_{elec}$ ,  $E_{mag}$  et densité d'énergie EM.
- Transformateur & couplages EM

# I - Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont la traduction mathématiques locales des théorèmes fondamentaux de l'électromagnétisme qui ont été établis sur une base empirique. Chaque équation porte le nom du physicien qui l'a établi mais c'est Maxwell qui a proposé une interprétation et une synthèse de ces équations. Il a également complété le théorème d'Ampère pour le rendre compatible avec la conservation de la charge → charge d'un condensateur.

## 1 - Théorème de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Écriture macroscopique

Green - Ostrogradsky

$$Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Écriture locale

Maxwell-Gauss

**Interprétation :** Le flux du champ  $\vec{E}$  sortant d'une surface fermée  $\Sigma$  est égale algébriquement à la charge totale circonscrite par cette surface.  $Div(\vec{E})d\tau$  est le flux sortant élémentaire. Il existe des charges élémentaires d'où partent les lignes de champ.

## 2 - Conservation du flux magnétique

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Écriture macroscopique

Green - Ostrogradsky

$$Div(\vec{B}) = 0$$

Écriture locale

Maxwell-Thomson  
« Maxwell-flux »

**Interprétation :** Le flux du champ  $\vec{B}$  sortant d'une surface fermée  $\Sigma$  est toujours nul.  $Div(\vec{B})d\tau$  est le flux sortant élémentaire. Il n'existe pas de monopôle magnétique d'où partiraient les lignes de champ.

Ces deux équations ne font pas référence au temps  $t$ , et restent valides pour toute évolution des champs  $\vec{E}(t, M)$  et  $\vec{B}(t, M)$ .

### 3 - Loi de Faraday

La loi de Faraday relie l'évolution temporelle du champ  $\vec{B}(t, M)$  avec les caractéristiques géométriques du champ  $\vec{E}(t, M)$  par le biais de la force électromotrice induite ou f.e.m  $e(t)$ . Les relations ci-dessous sont toujours valides. Elles sont à la base du **phénomène d'induction**.

$$e = - \frac{d\Phi_{\Gamma}}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Écriture macroscopique

Stokes

$$\vec{Rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Écriture locale

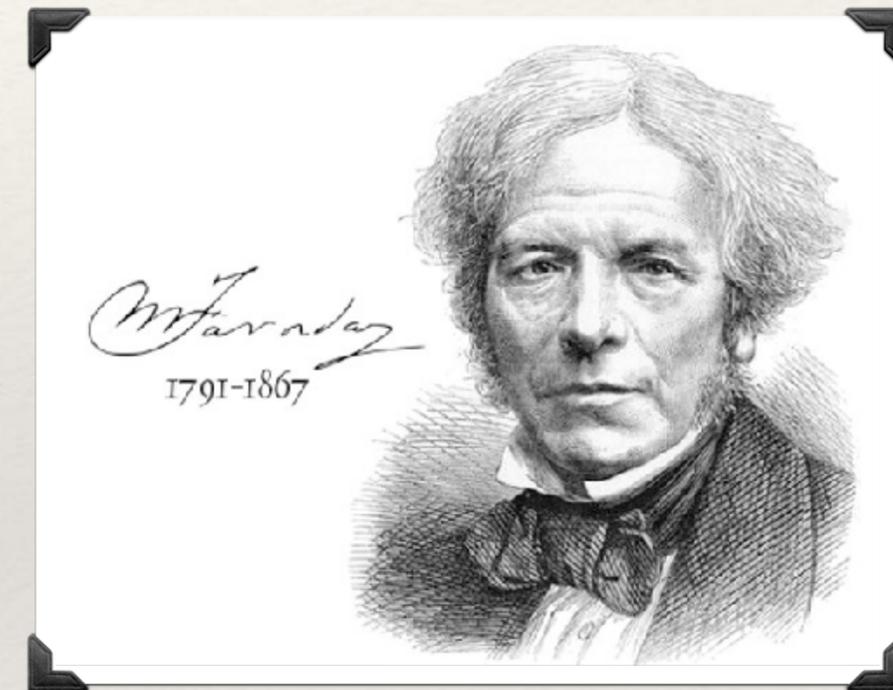
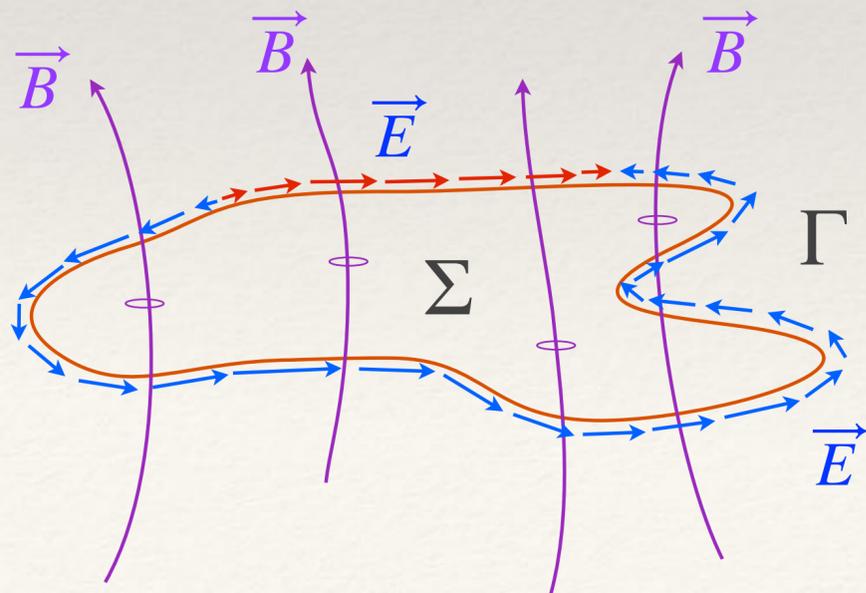
Maxwell-Faraday

**Interprétation :** La circulation du champ  $\vec{E}$  sur un contour fermé  $\Gamma$  est l'opposée de la variation temporelle du flux du champs  $\vec{B}$  à travers la surface  $\Sigma$  qui s'appuie sur ce contour  $\Gamma$ .

⚠ :  $\vec{Rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$  est la circulation élémentaire de  $\vec{E}$  autour de  $d\vec{S}$ .

**Démo :**

$$e \equiv \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

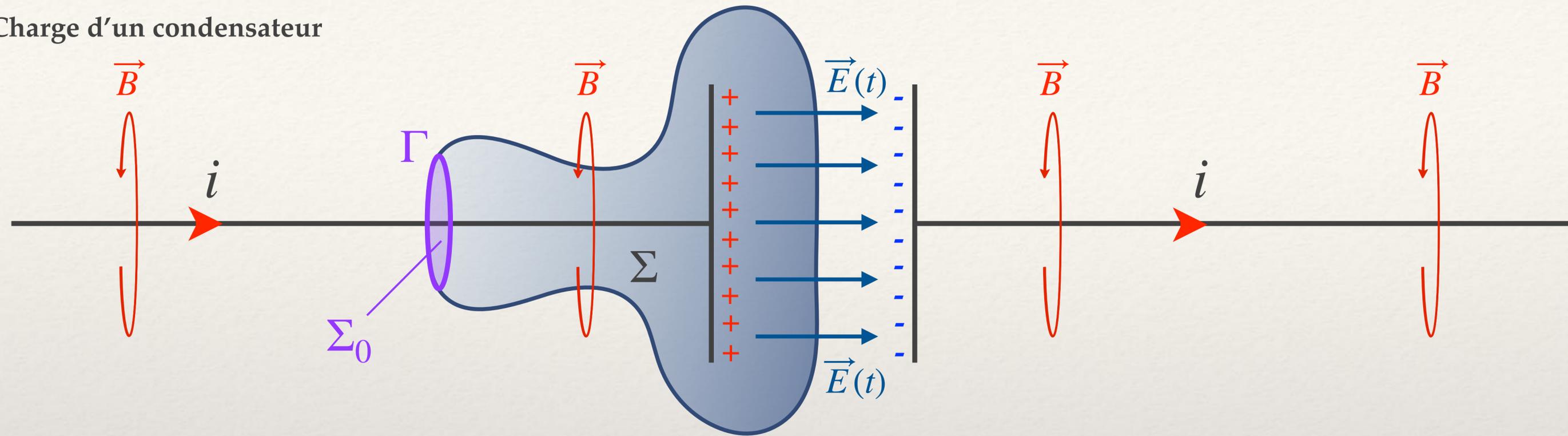


MICHAEL FARADAY

## 4 - Généralisation du théorème d'Ampère

La principale contribution de Maxwell aux équations qui portent son nom a été d'identifier et résoudre le problème qui se pose à des situations très simples dès lors que l'on prétend appliquer le théorème d'Ampère en régime variable dans le temps.

### $\alpha$ - Charge d'un condensateur



On considère la situation ci-dessus où le condensateur possède la symétrie de révolution. Si l'on applique le théorème d'Ampère sur ce contour  $\Gamma$  et sur une surface  $\Sigma$  quelconque, on aboutit à un paradoxe. On peut en effet choisir n'importe quelle surface pour appliquer Ampère :

- Sur  $\Sigma_0$  : On a bien  $\mu_0 i = 2\pi r B(r)$  car un courant  $i$  traverse  $\Sigma_0$  (en violet).
- Sur  $\Sigma$  : On a en revanche  $0 = 2\pi r B(r)$  car aucun courant ne traverse  $\Sigma$  (en bleu).

Notons au passage qu'il n'y a pas « conservation de la charge » au sein du volume  $\Sigma \cup \Sigma_0^{inv}$ , et c'est justement le courant qui apporte ces charges. En réalité, par **effet d'influence**, elles attirent des charges « - » sur l'autre armature ce qui permet le passage du courant à travers le condensateur !

Ceci est rendu possible par le **champ électrique**  $\vec{E}(t, M)$  qui, **augmentant avec les charges apportées par le courant  $i$ , attirent la même quantité de charge négatives en vis-à-vis.** [Th. de Gauss]. Cet effet d'influence est équivalent à un courant que Maxwell a nommé « **courant de déplacement** »



## $\beta$ - Courant de déplacement

Maxwell propose ainsi d'ajouter un terme à l'équation d'Ampère qui modélise l'évolution temporelle du champ électrique.

**Démo :** Pour trouver l'expression de ce terme on utilise le champ uniforme dans un condensateur plan infini où l'on a montré que :

$$E_x(t) = \frac{\sigma_+(t)}{\epsilon_0} \text{ avec } \sigma_+(t) \text{ la densité surfacique de charge sur l'armature positive. Soit } S \text{ la section du condensateur : } Q_+(t) = S \sigma_+(t)$$

$$\text{On a alors } i = i_D = \frac{dQ_+}{dt} \text{ Soit :}$$

On appelle par abus de langage « **courant de déplacement** » le terme  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  de l'équation de Maxwell-Ampère car il prend la place de  $\vec{j}$  dans l'entrefer du condensateur. Toutefois ce n'est pas un courant mais une densité de courant ( $A m^{-2}$ ) et il n'y a justement aucun déplacement car on est dans le vide de l'entrefer du condensateur .... MAIS ça marche !!! On a donc finalement :

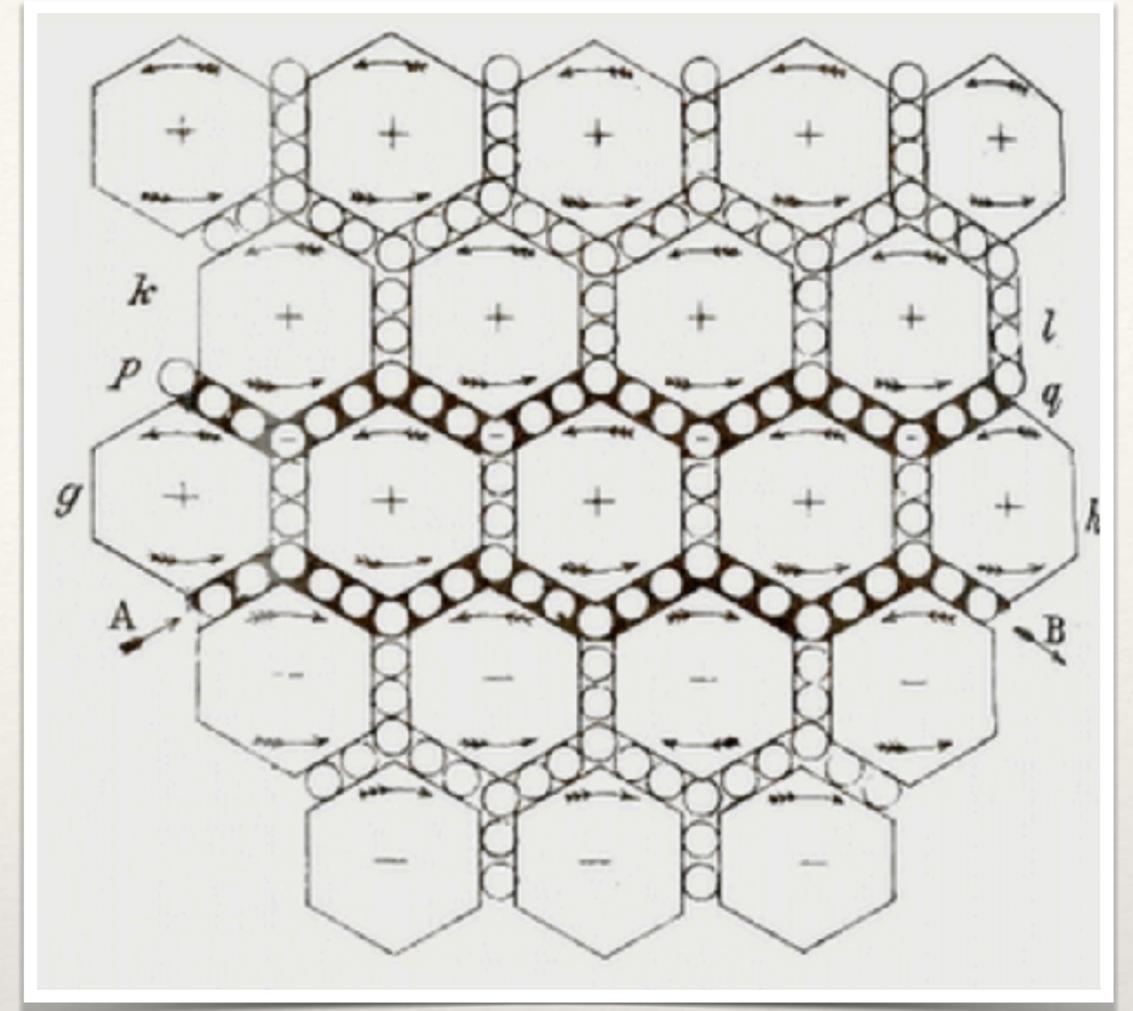
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j}_{tot} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{Stokes}} \overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

Écriture macroscopique  Écriture locale

$$\vec{j}_{tot} \equiv \vec{j} + \vec{j}_D = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell avait une idée très « concrète » au sens mécanique des phénomènes électromagnétiques d'où le terme « courant de déplacement ».

On retrouve un peu les circulations (rotationnel  $\rightarrow$  formule de Stokes) dans des systèmes d'engrenages qu'il imaginait comme véhicule des charges.



Le milieu « tentaculaire » de Maxwell



Les modèles physiques sont souvent, à l'origine, très éloignés de ce qui en restera à la postérité. **L'important c'est que ça marche !**

On peut enfin vérifier la **Conservation locale de la charge** à l'aide des deux équation sources :

## 5 - Résumé des équation de Maxwell

On résume ainsi les théorèmes empiriques de l'électromagnétisme à ces quatre équations qui sont toujours vraies :

### Équations sources

Maxwell-Gauss  $Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thomson  $Div(\vec{B}) = 0$

Maxwell-Faraday  $\vec{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère  $\vec{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell-Gauss  $Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Ampère  $\vec{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell-Faraday  $\vec{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Thomson  $Div(\vec{B}) = 0$

### Équations géométriques

# II - ARQS & Équations de Maxwell

## 1 - ARQS : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire

### $\alpha$ - ODG : Ordre De Grandeur

On souhaite ici définir un cadre simplifié des équations de Maxwell qui correspondent à la plupart des expériences et ODG mis en jeu.

Pour cela on note  $E$  et  $B$  les ODG de variation typique des champs électrique et magnétique ; on note  $L$  et  $T$  les distances et durées typiques sur lesquelles varient ces mêmes champs. Enfin lors d'un raisonnement par ODG on remplace les opérations de dérivation par des divisions.

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{L} \sim \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{E}{T}}$$

$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

### $\beta$ - ARQS magnétique $Div(\vec{j}) = 0$

On parle d'ARQS magnétique le fait de négliger le « courant de déplacement » dans Maxwell-Ampère, ce qui **permet d'appliquer le théorème d'Ampère** sans se soucier de la conservation locale de la charge. Conséquences :  $L \ll cT$  et  $Div(\vec{j}) = 0$

### Démo :

#### Interprétation :

- Cela signifie que l'échelle typique sur laquelle varient les champs est petite devant celle parcourue par une onde électromagnétique (à la vitesse de la lumière) dans le temps typique d'évolution de ces mêmes champs. **Concrètement au sein d'un système de charges et de courants, l'information électromagnétique s'est propagée de façon instantanée en tout point du système avant que les charges et courants n'aient évolués.**

- En corollaire on retrouve la **loi des noeuds locale**  $Div(\vec{j}) = 0$ , c-à-d pas d'accumulation locale de charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  [cf - 1ère année]

## 2 - Applications :

### $\alpha$ - Circuit LC dans l'ARQS

Des étudiants travail sur un circuit LC en TP de taille typique  $D = 1m$  (longueur de câblage) tel que  $L = 100mH$  et  $C = 1\mu F$ .

- Vérifier que l'on est bien dans le cadre de l'ARQS.
- Proposer une fréquence limite  $f_{ARQS}$  et interpréter.

### $\beta$ - Contre-exemple trivial

Montrer que la propagation d'une onde électromagnétique (lumière ou autre) donc à la vitesse  $c_0$  est un phénomène hors ARQS.

### Réponses :

$$\alpha \quad T = D/c_0 \sim 10^{-9}s \text{ temps de vol d'un photon.} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \sim 2 \cdot 10^{-3}s \quad \text{soit} \quad T_0 \gg T \quad \text{Check!} \quad \text{👊}$$

$$f_{ARQS} = \frac{1}{T} \sim 3 \cdot 10^8 Hz \quad \text{au delà on sort de l'ARQS mais il y a de la marge puisque ici : } f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sim 500 Hz$$

$$\beta \quad \text{ARQS} \Rightarrow \frac{L}{T} \ll c_0 \quad \text{or ici } L \sim \lambda \quad \text{et } T \text{ est justement la période de l'onde donc } \frac{L}{T} = \frac{\lambda}{T} = c_0 \quad \text{plouf !!!}$$

[On a besoin du courant de déplacement pour établir l'équation d'onde de Maxwell]

### 3 - Résumé des équations de Maxwell dans l'ARQS

Il existe deux ARQS mais nous ne garderons au programme que l'ARQS dite « magnétique »

#### ARQS magnétique

Maxwell-Gauss  $Div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thomson  $Div(\vec{B}) = 0$

Maxwell-Faraday  $\vec{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère  $\vec{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

#### ARQS Électrique - HP

Maxwell-Gauss  $Div(\vec{E}) = 0 + \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Thomson  $Div(\vec{B}) = 0$

Maxwell-Faraday  $\vec{Rot}(\vec{E}) = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère  $\vec{Rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

**Le théorème d'Ampère s'applique !**

LDN : pas d'accumulation locale de charge  $Div(\vec{j}) = 0$

TD : Etude de la charge d'un condensateur  
en régime lentement variable

# III - Induction

## 1 - Le phénomène d'induction

L'équation Maxwell-faraday permet d'établir

la Loi de Faraday sur un circuit :  $e = - \frac{d\Phi_{\Gamma}}{dt}$

## Révision 1ère année : Auto-induction & Induction Mutuelle

On pose pour cela : la f.e.m  $e \equiv \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$  et le flux  $\Phi_{\Gamma} \equiv \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

## 2 - Energie magnétique

Il a été établi en première année que pour un circuit seul parcouru par un courant  $i$  l'énergie associée au phénomène d'auto-induction vaut :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} Li^2$$

Avec le flux propre :  $\Phi = Li$   $L > 0$  (en Henry)

## Révision 1ère année : Energies propres et mutuelles

Pour deux circuits de courant  $i_1$  et  $i_2$  il y a inductions propres des circuits et aussi induction mutuelle entre les deux circuits. Cette dernière est quantifiée par un coefficient d'induction mutuelle  $M$  dont le signe dépend de l'orientation relative des deux circuits. On a l'énergie :

$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$  quant aux flux, chaque circuit voit son flux propre + mutuel :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

sachant que :  $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$

### 3 - Densité d'énergie magnétique

On s'appuie pour trouver cette densité d'énergie, sur une situation où le champ est uniforme :  $B_0 = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{h} I$

—> Solénoïde infini (tronçon de hauteur h et de section S)

## 4 - Couplages

Il existe différentes qualité de couplage selon les enroulement réalisés (Voir cours 1ère année). Dans le pire des cas  $M = 0$  les deux circuits n'ont pas de flux magnétique en commun. Mais dans le meilleur des cas on montre toutefois que l'on doit toujours vérifier :  $M^2 \leq L_1 L_2$

## 5 - Courants de Foucault

On parle de « courants de Foucault » pour désigner des courants induits dans un volume conducteur, et qui sont généralement la source de déperdition par effet Joule. Ils sont utiles pour réaliser un freinage magnétique (train, métro) en complément d'une éventuelle récupération de l'énergie au freinage.

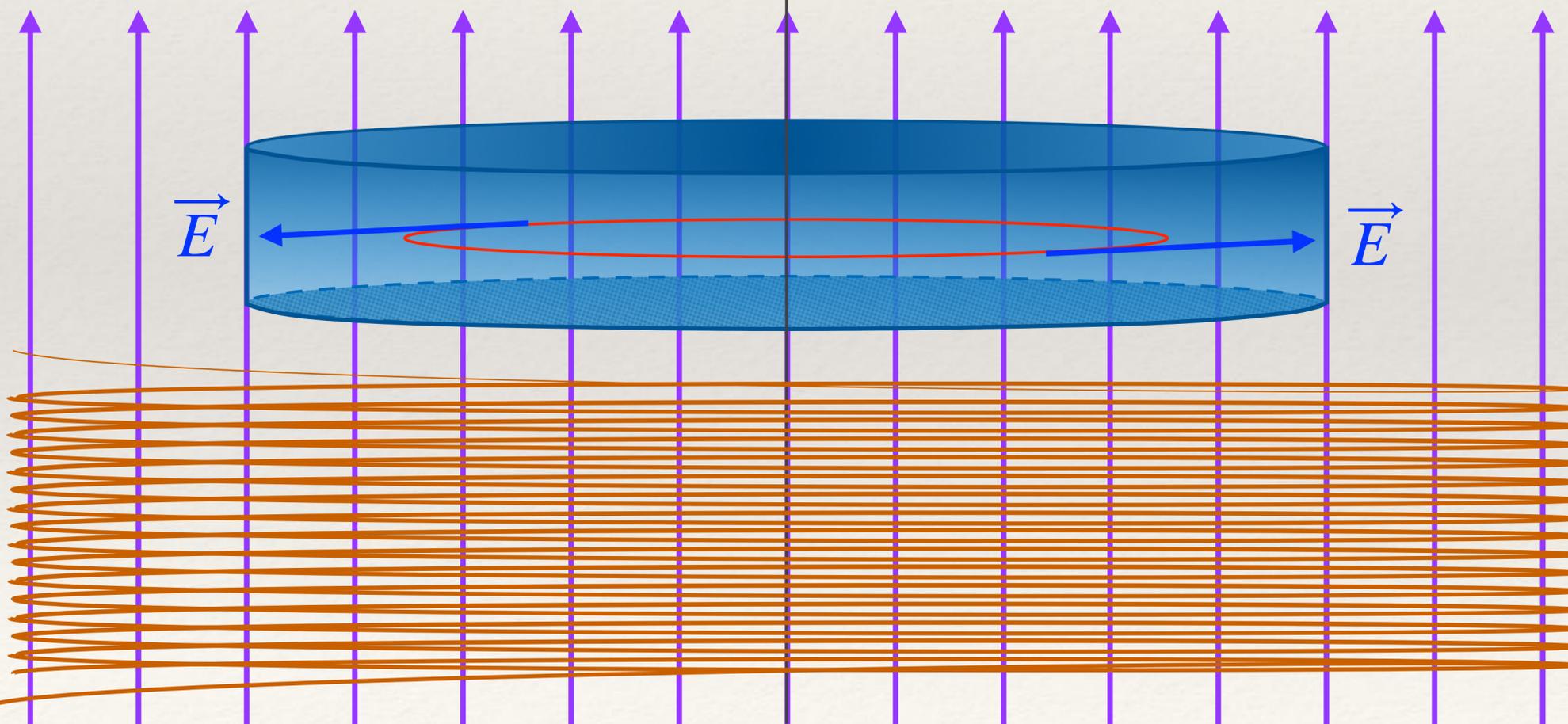
Pour l'illustrer, on plonge un conducteur cylindrique dans un champ magnétique uniforme (solénoïde, bobines de Helmholtz), mais qui varie sinusoidalement dans le temps. Concrètement c'est exactement le cas de la **cuisson par induction**. On se place ici dans le cadre de l'ARQS magnétique car les fréquences sont faibles (50Hz).

Champ magnétique externe

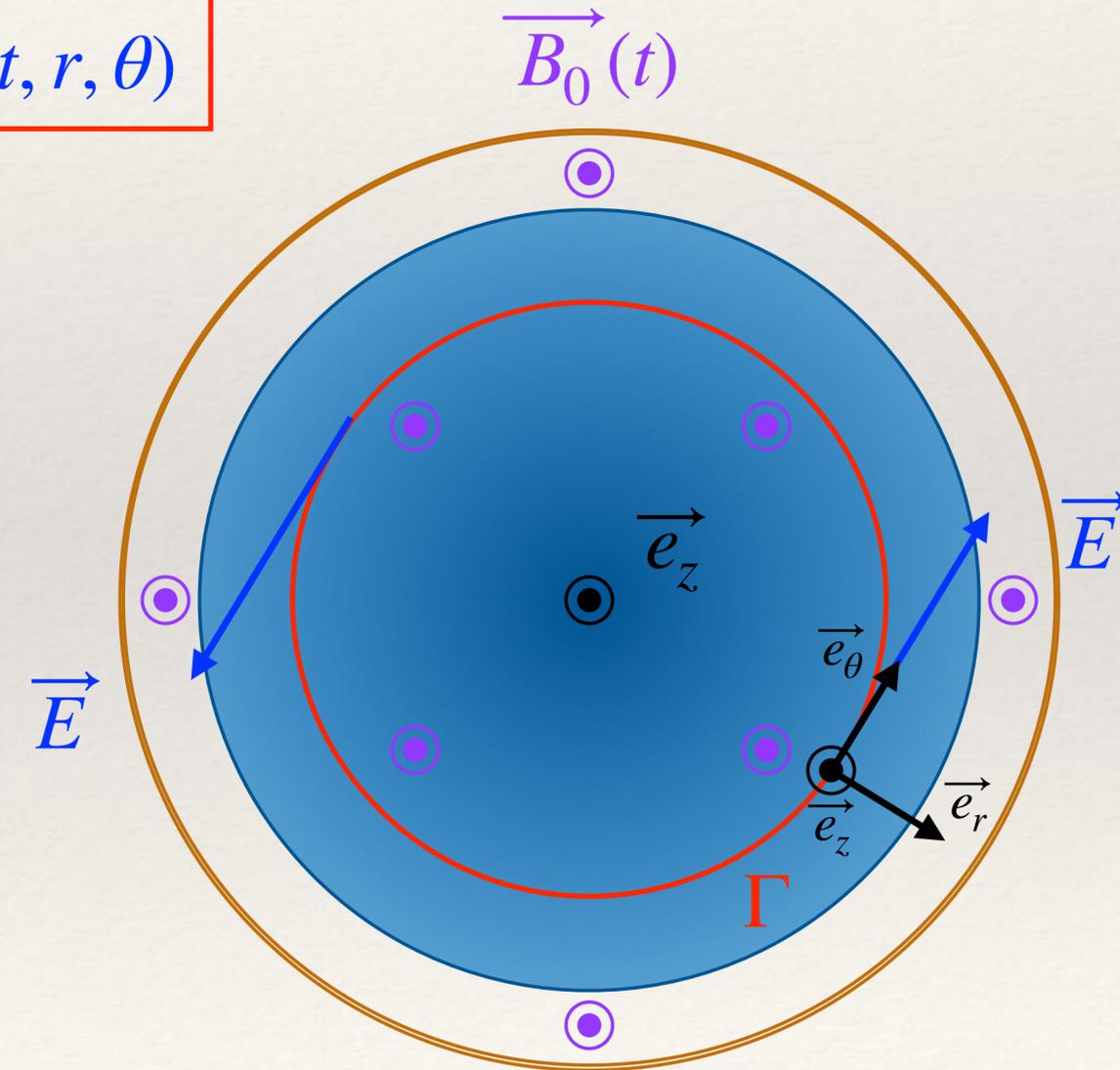
$$\vec{B}_0(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Champ électrique induit

$$\vec{E}(t, M) = \vec{E}(t, r, \theta)$$



Vue de coté



Vue de dessus



**Thermo-Fusion :  
Technologie induction  
avancée**

La base Thermo-Fusion assure une distribution rapide et optimale de la chaleur dans toute la poêle pour une cuisson parfaite des aliments



**3<sup>ème</sup> couche ultra-antiadhésive**  
Garantie une antiadhérence parfaite et durable  
*3<sup>rd</sup> ultra non stick layer*

**2<sup>ème</sup> couche antiadhésive**  
Renforcée aux particules de titane pour garantir la résistance  
*2<sup>nd</sup> non stick layer*

**1<sup>ère</sup> couche antiadhésive**  
Intégrée dans la structure sablée et renforcée aux particules de titane pour une tenue extrême  
*1<sup>st</sup> non stick layer*

**Inox 18-10**  
*18-10 stainless steel*

**Fond thermo-diffuseur différent suivant les collections**  
*(ici collection Mutine)*

*Thermo diffusing base*



**3<sup>ème</sup> couche ultra-antiadhésive**  
Garantie une antiadhérence parfaite et durable  
*3<sup>rd</sup> ultra non stick layer*

**2<sup>ème</sup> couche antiadhésive**  
Renforcée aux particules de titane pour garantir la résistance  
*2<sup>nd</sup> non stick layer*

**1<sup>ère</sup> couche antiadhésive**  
Intégrée dans la structure sablée et renforcée aux particules de titane pour une tenue extrême  
*1<sup>st</sup> non stick layer*

**Anodisation renforcée**  
*Reinforced anodizing*

**Corps aluminium Ultralu®**  
*Ultralu® aluminium base*



**EXCELISS+ SUR BASE INOX**

**EXCELISS+ SUR BASE ALUMINIUM**

## « L'homme qui tendait l'oreille à sa plaque à induction » !

Si on écoute bien le bruit produit par une plaque à induction [produit par les contractions-relâchement des circuits d'induction] On comprend que la chauffe n'est pas continue mais procède par impulsions. Ceci permet aux matériaux qui sont de très bons **conducteurs thermiques** d'égaliser la chaleur reçue par effet Joule, car nous allons voir que l'induction seule chauffe énormément en périphérie mais pas du tout au centre, ce qui poserait de GROS PB en cuisine !

L'induction permet de faire ce que le gaz ne permet pas !

## 5 - Courants de Foucault

$\alpha$  - Structure du champ électrique  $\vec{E}(t, M)$  induit [HP  $\rightarrow$  admis au programme]

Comment peut-on prouver que le champ est sous la forme  $\vec{E}(t, M) = \vec{E}(t, r, \theta)$  et même  $\vec{E}(t, M) = E_\theta(t, r) \vec{e}_\theta$  ?

**1er point :** On se place dans un conducteur  $\Rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E}$  et dans l'ARQS  $\Rightarrow$  pas d'accumulation de charge. Si il y avait des composantes de  $\vec{E}$  (donc de  $\vec{j}$ ) selon  $\vec{e}_r$  ou  $\vec{e}_z$  les charges viendrait s'accumuler sur les bords latéraux (au centre aussi) ou sur les faces inférieurs et supérieurs. C'est ce qui se passe par exemple dans une antenne (hors ARQS !)

**2nd point :** On utilise l'invariance par rotation :  $E_\theta(t, r, \theta, z) = E_\theta(t, r, z)$

**3ème point :** On utilise le rotationnel  $\overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  : composante nulle sur  $\vec{e}_r \Rightarrow E_\theta(t, r, z) = E_\theta(t, r)$  [cf-schéma]

**Discussion :** En réalité cette structure de champ est approximative, et n'est valide dans l'ARQS que parce que le champ induit est très faible au regard du champ extérieur. Dans la réalité le  $\vec{E}$  induit crée un nouveau champ  $\vec{B}_1$  qui crée un autre  $\vec{E}_1$  qui crée un ..... etc

**ODG :**  $\frac{E}{R} \sim \frac{B_0}{T}$  soit.  $E \sim \frac{R}{T} B_0 \ll c_0 B_0$  or  $B_1 \propto E$  donc dans l'ARQS  $B_1 \ll B_0$

attention  $\triangle$  : Ceci n'est en aucun cas une démonstration mais montre que les effets restent faibles à basse fréquence (ARQS) au regard de ce qu'ils seraient à plus haute fréquence (hors ARQS).

### Conclusion :

On retiendra que dans un champ magnétique uniforme et mais variable dans le temps, les courants de Foucault  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  décrivent des boucles fermées dans le métal. Leur forme exacte dépend de la forme du conducteur : pour un cylindre ce sont des cercles concentriques.

$\beta$  - Approche avec le potentiel vecteur  $\vec{A}(t, M)$

$\beta'$  - Approche avec des boucles de courants élémentaires

## $\gamma$ - Retour sur la plaque à induction

- Calcul de  $\vec{E}$  et  $\vec{j}$
- Puissance volumique et tracé => Conséquence(s) technologique(s)
- Calcul de la puissance totale dissipée
- Retour sur les matériaux feuilletés 🍁 🌿 🍂

# Courants de Foucault

La variation du champ magnétique dans le ferromagnétique conducteur induit des courants appelés «courants de Foucault» dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, exactement comme dans la plaque à induction.

Ces courants dissipent en partie l'énergie amenée par le primaire : **on parle de pertes « fer » par courants de Foucault** .

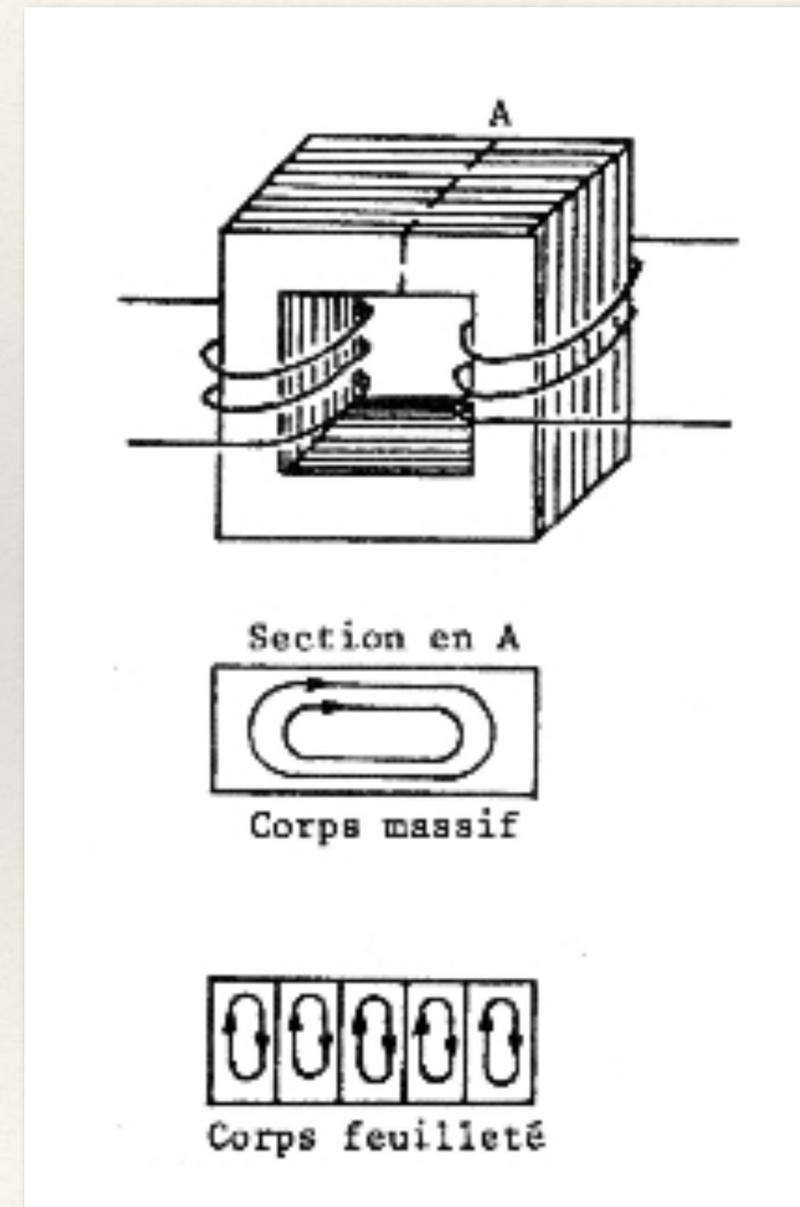
Nous avons vu que dans un champ uniforme, **la puissance est dissipée avec une loi de distribution parabolique**, autrement dit la puissance dissipée devient importante si la boucle de courant possède un diamètre important. Inversement, en réduisant la taille physique des zones conductrices on réduit la taille des boucles de courant et avec elles la dissipation. Ces petites boucles réalisent une dissipation négligeable. Enfin, les boucles sont perpendiculaires au champ B.

## Conclusion :

Pour limiter les pertes « fer » par courants de Foucault, on utilise un **ferromagnétique** :

- Formés de **feuilletés très fins et isolés** [épaisseur  $e \sim 0.1mm$  et couche isolante  $\Delta e \sim 0.01 mm$ ]
- juxtaposés **parallèlement aux lignes de champ**.
- Si possible de forte résistivité  $\Rightarrow$  ferromagnétique **peu** ou « pas » **conducteur**.

$\Rightarrow$  Etude des milieux ferromagnétiques



# ACIER AU SILICIUM : STATOR D'ALTERNATEUR

Ferromagnétique doux



ROTOR D'ALTERNATEUR

Les matières transformées varient de l'acier au silicium fully process à grain non orienté et à grain orienté, acier magnétique semi-fini, à la qualité laminée à froid bas carbone, dans des épaisseurs de 1 mm descendant jusqu'à 0,2 mm pour nuance à haute teneur en silicium —> **fer doux feuilleté !**



**Isolation** de paquets de tôles avant le bobinage

## Stators d'Alternateurs pour Automobile

 **r. bourgeois** est le leader mondial dans la production de stators d'alternateurs pour l'automobile, avec des productions dépassant 15 millions de stators par an.

Une grande résistivité rend négligeable les pertes par courants de Foucault.  
Les ferrites au nickel sont caractérisés par de faibles pertes à haute fréquence.



Remarque : Le ferrite est une **céramique ferromagnétique** obtenue par moulage à forte pression et à haute température (>1 000 °C) à partir d'oxyde de fer  $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{XO}$  (où X : manganèse, zinc, cobalt, nickel, etc.)