J.COURTIN **PSI** — LYCÉE V.HUGO

Magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$

Les courants et le champ

Objectifs :

- Distribution de courants
- Symétries et invariances
- Conservation du flux magnétique
- Théorème d'Ampère
- Force de Laplace

Révision 1ère année :

- Champ magnétique et Topographie
- Notion de flux
- ARQS
- Induction

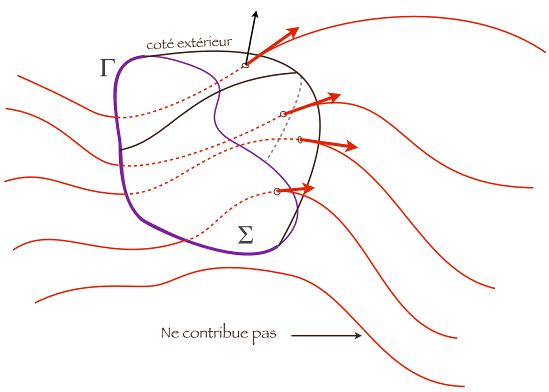
I - Distributions de courants

1 - Vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M)$

On appelle de façon générique « courants » électriques tous porteurs de charge en mouvement. En général le milieu sera un support matériel conducteur mais électriquement neutre comme un fil de cuivre parcouru par un courant I, où les atomes sont fixes et les électrons mobiles. Mais il peut s'agir d'un faisceau d'électron dans le vide d'un tube cathodique, ou d'un plasma polarisé électriquement.
Rq : le courant dépend donc du référentiel.

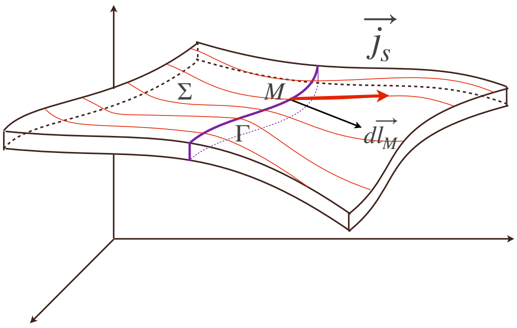
En toute généralité ce support matériel est à 3 dimensions et le courant est modélisé par le **vecteur densité de courant** : $\boxed{\vec{j}(M) = \rho(M)\vec{v}(M)}$ (en Am^{-2})

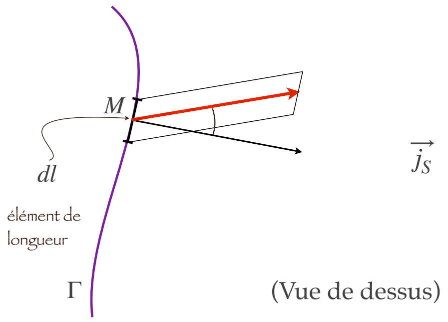
Le courant I en Ampère est obtenu comme le flux de $\vec{j}$ à travers une surface Σ qui s'appuie sur un contour Γ :



Exercice : Soit un fil de section $S = \pi R^2$, relier $\vec{j}(M)$ et le courant I

2 - Densité de courant surfacique $\overrightarrow{j_S}(M)$ **:** dans bien des cas il est pratique d'envisager une distribution surfacique plutôt que volumique





$\overrightarrow{j_S}$ est donc en Am^{-1}

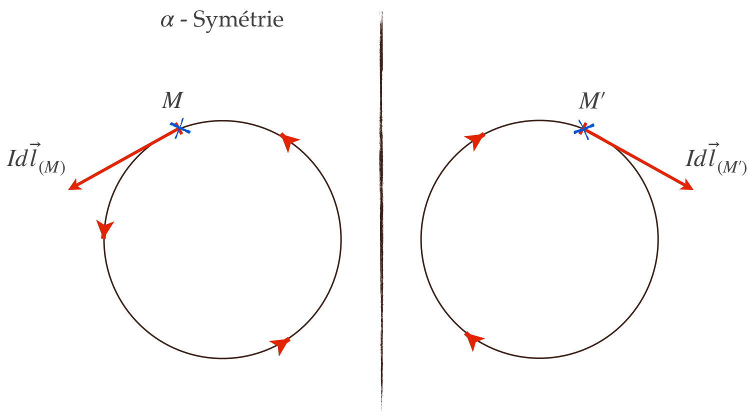
Le courant est donc interprété comme le :
« **flux** » **du vecteur densité de courant à travers une ligne.**

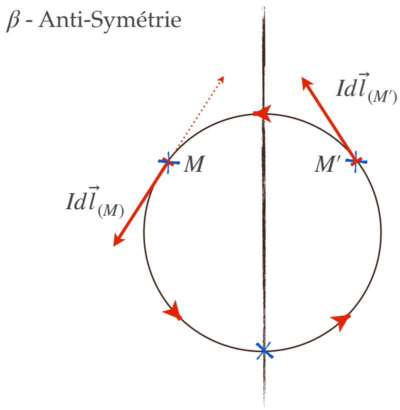
NB : le vecteur $\overrightarrow{dl_M}$ a pour norme dl mais il est dirigé selon la normale à Γ dans le plan tangent à la surface Σ au point M.

Exercice : Soit une surface d'épaisseur e, relier $\vec{j}(M)$ et $\overrightarrow{j_S}(M)$

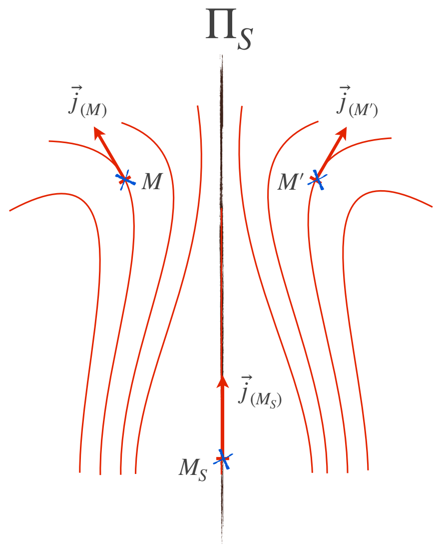
II - Symétries et invariances dans les distributions de courant

1 - Symétrie plane



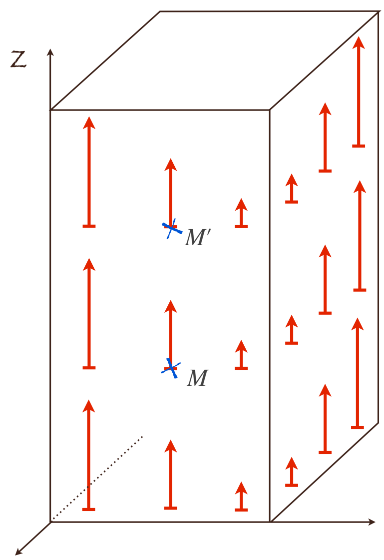


Autre exemple : courants surfacique ou volumique



2 - Invariance par translation

Soit $\overrightarrow{T}$ une translation quelconque et soit $M' = \overrightarrow{T}[M]$ le translaté de M.



Définition :

On dit qu'il y a invariance par translation selon $\overrightarrow{T}$ dès lors que :

$\forall$ M un point, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$:

Translation **continue**

Conséquence ici :

3 - Invariance par rotation

Soit R_Δ^θ une rotation d'angle θ autour de (Δ)
Et soit $M' = R_\Delta^\theta[M]$

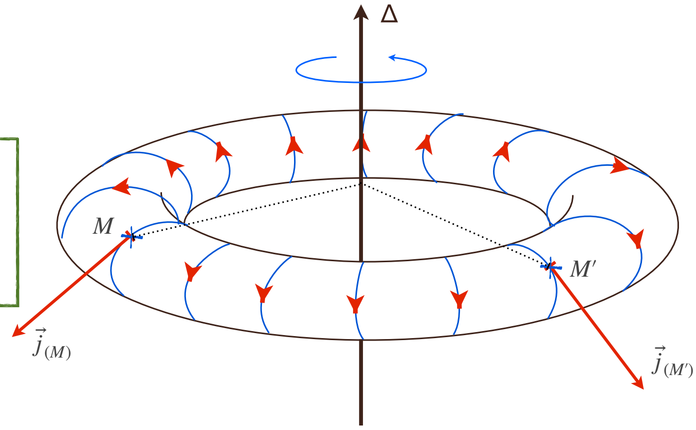
Définition :

On dit qu'il y a invariance par rotation autour de (Δ) dès lors que :

∀ M un point, ∀ θ ∈ ℝ

Rotation continue

Exemple : tore de courant



Conséquence ici :

$$\vec{j}_{(M)} = \begin{bmatrix} j_r(r,\theta,z) \\ j_\theta(r,\theta,z) \\ j_z(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_r(r,z) \\ j_\theta(r,z) \\ j_z(r,z) \end{bmatrix}$$

RQ : Par symétrie plane

$$\vec{j}_{(M)} = \begin{bmatrix} j_r(r,z) \\ j_\theta(r,z) \\ j_z(r,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_r(r,z) \\ 0 \\ j_z(r,z) \end{bmatrix}$$

⚠ Attention ⚠

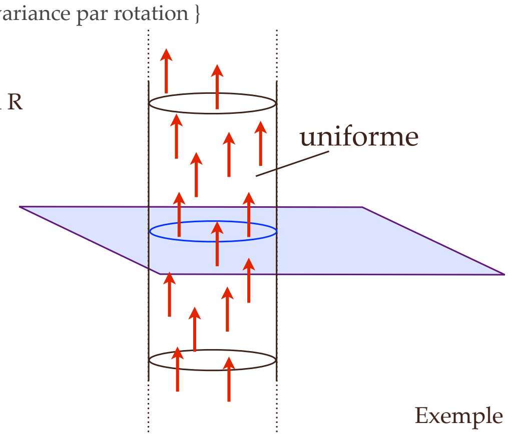
Notez bien que le **vecteur** $\vec{j}(r,\theta,z)$ reste bien pour autant fonction de θ. Seule les composantes **scalaires** n'en dépendent plus.

4 - Invariance par symétrie cylindrique

{ Invariance par translation + invariance par rotation }

Exemple 1 : fil infini de rayon R

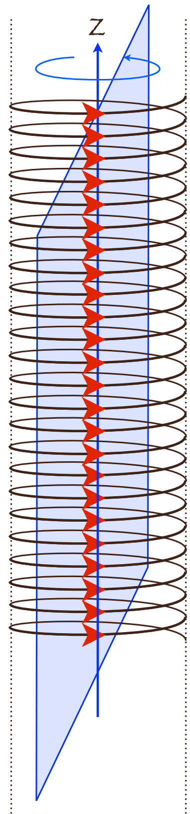
Ex 1 :



$$\vec{j}_{(M)} = \begin{bmatrix} j_r(r,\theta,z) \\ j_\theta(r,\theta,z) \\ j_z(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j_z(r) \end{bmatrix}$$

Exemple 2 : cylindre de courant

Ex 2 :



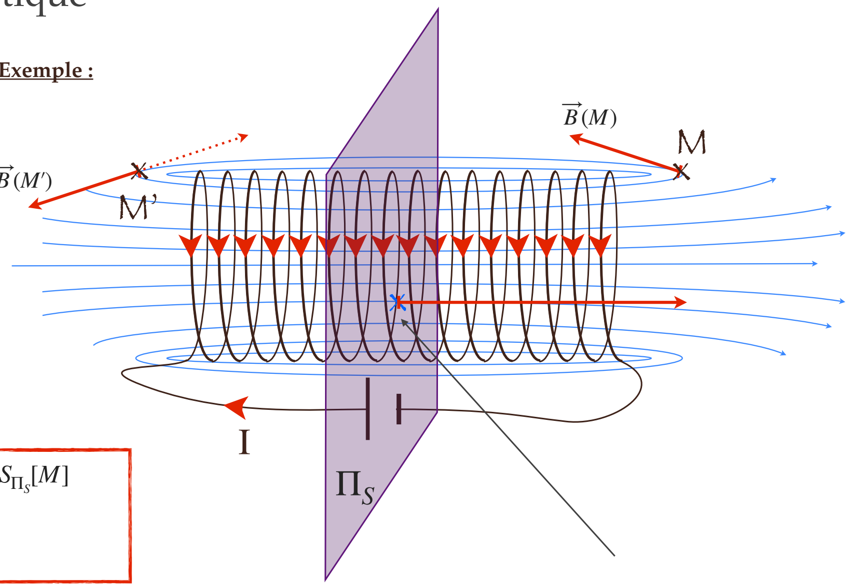
$$\vec{j}_{(M)} = \begin{bmatrix} j_r(r,\theta,z) \\ j_\theta(r,\theta,z) \\ j_z(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ j_\theta(r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

III - Les symétries du champ magnétique

Les symétries sur le champ $\vec{B}$ se déduisent des symétries sur la distribution de courant $\vec{j}$

=> ⚠️ Attention ⚠️ à ne pas confondre les deux.

Exemple :



Propriétés des symétries planes :

Soit Π_S un plan de symétrie des courants tel que $M' = S_{\Pi_S}[M]$

Alors

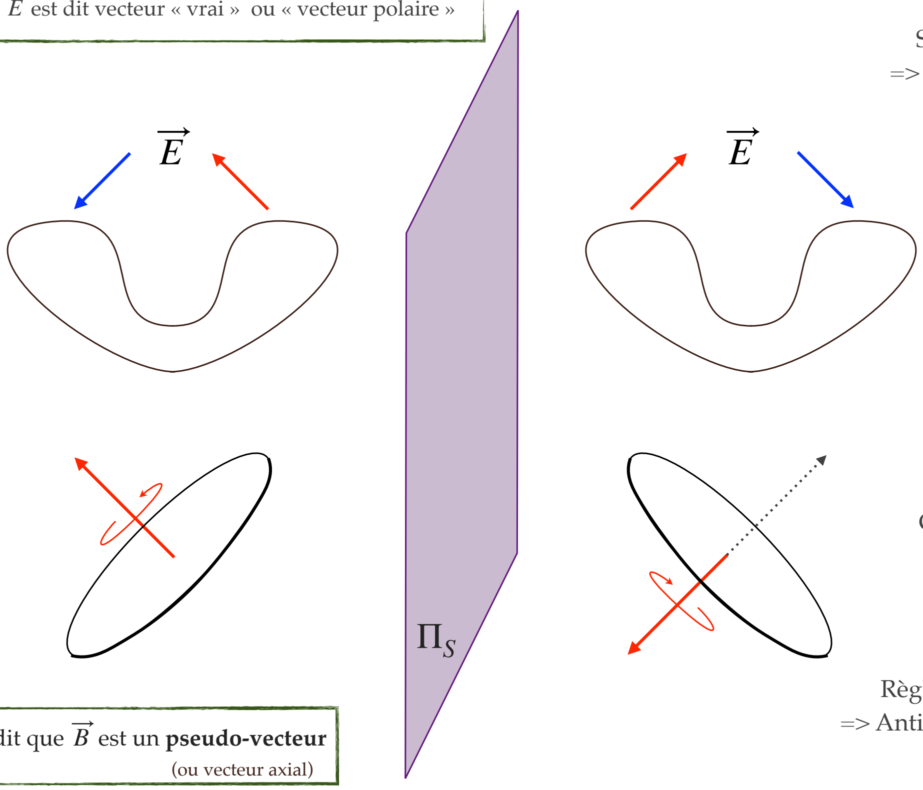
Définition : On dit que $\vec{B}$ est un **pseudo-vecteur** (ou vecteur axial)

Le champ $\vec{E}$ est un vecteur vrai (ou vecteur polaire)

Soit Π_S un plan de symétrie des courants tel que $M \in \Pi_S$

Alors

Définition : Le champ $\vec{E}$ est dit vecteur « vrai » ou « vecteur polaire »



Situation symétrique
=> Symétrie du champ $\vec{E}$

Circuit symétrique

+

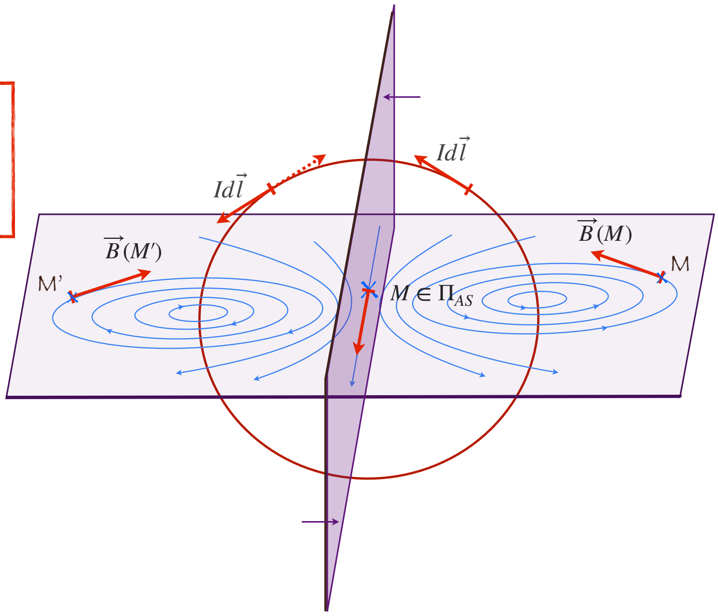
Règle de la main droite
=> Anti-symétrie du champ $\vec{B}$

Définition : On dit que $\vec{B}$ est un **pseudo-vecteur** (ou vecteur axial)

Propriétés des Anti-Symétries planes :

Soit Π_{AS} un plan d'Anti-Symétrie des courants tel que $M' = S_{\Pi_{AS}}[M]$

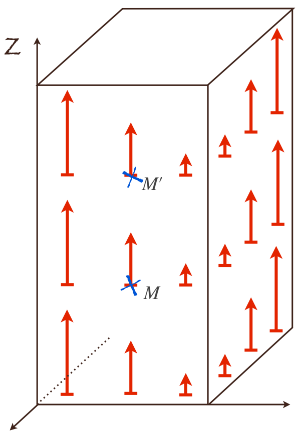
Alors



Soit Π_{AS} un plan de symétrie des courants tel que $M \in \Pi_{AS}$

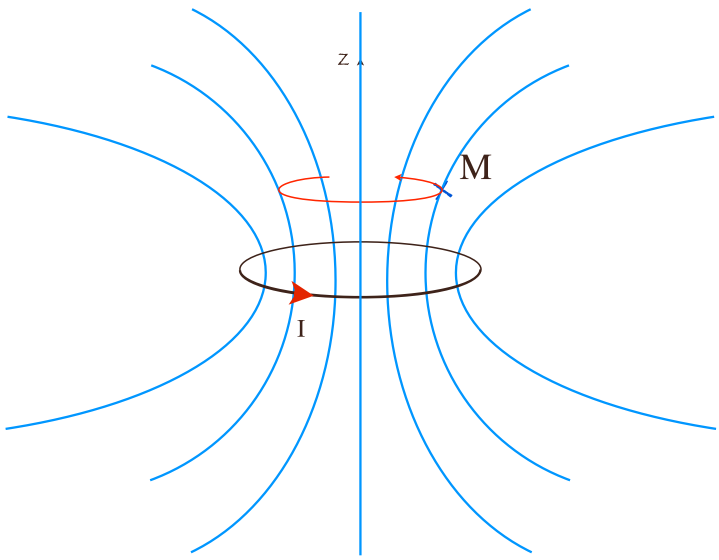
Alors

Invariance par translation :



$$\vec{B}_{(M)} = \begin{bmatrix} B_r(x,y,z) \\ B_\theta(x,y,z) \\ B_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r(x,y) \\ B_\theta(x,y) \\ B_z(x,y) \end{bmatrix}$$

Invariance par rotation :



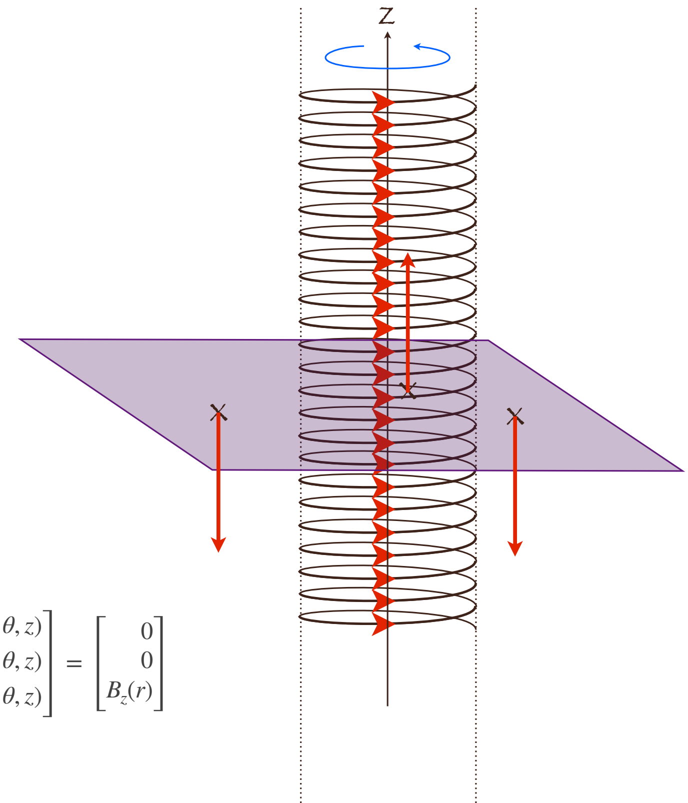
$$\vec{B}_{(M)} = \begin{bmatrix} B_r(r,\theta,z) \\ B_\theta(r,\theta,z) \\ B_z(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r(r,z) \\ B_\theta(r,z) \\ B_z(r,z) \end{bmatrix}$$

Fonction de θ à travers $\vec{e}_r(\theta)$

Symétrie cylindrique :

- Invariance par translation selon $\vec{e}_z$
- Invariance par rotation d'angle θ $\forall\theta$

Sim & Inv :



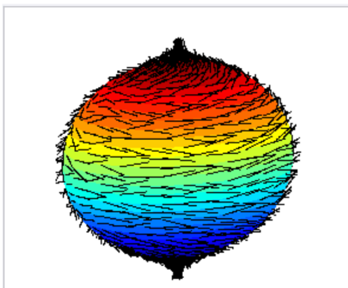
$$\vec{B}_{(M)} = \begin{bmatrix} B_r(r,\theta,z) \\ B_\theta(r,\theta,z) \\ B_z(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(r) \end{bmatrix}$$

Et l'invariance par symétrie sphérique ???

→ Problème de topologie !!!

On ne peut pas peigner une boule !!!

Sans faire un épi ….



Si un champ de vecteurs tangents sur une sphère est symbolisé par des cheveux de longueur constante, le **théorème de la boule chevelue** stipule que la sphère contient au moins un épi. La figure en contient deux, un sur chaque pôle.

On aurait donc : $\vec{j}_{(M)} = \begin{bmatrix} j_r(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ mais alors il y aurait non conservation de la charge en r = 0 !

IV - Les équations de Maxwell en magnétostatique

1 - Équations de Maxwell

On suppose ici des conducteurs électriquement neutres [comme des fils électriques] mais parcourus par des courants constants dans le temps. En toute rigueur, on peut inclure des charges et un champ électrostatique tant qu'il n'y a pas de variation champ électrique dans le temps.

On se focalise ici sur les équations de :

- Maxwell-Thomson —>

- Maxwell-Ampère —>

Maxwell-Gauss	$Div(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Thomson	$\boxed{Div(\overrightarrow{B}) = 0}$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{Rot}\,(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\boxed{\overrightarrow{Rot}\,(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}$

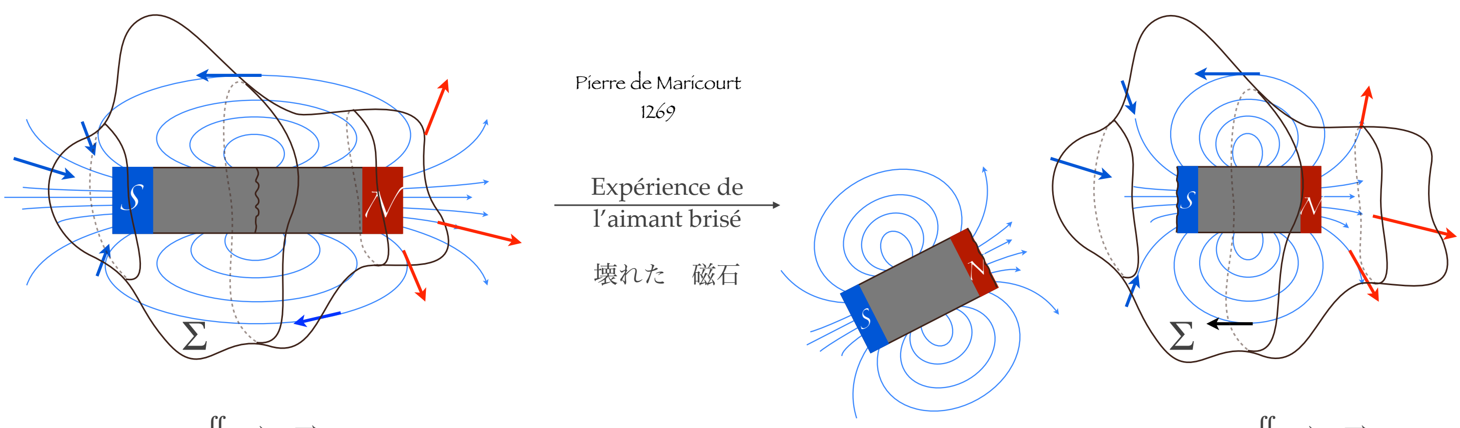
Maxwell-Gauss	$Div(\overrightarrow{E}) = 0$
Maxwell-Thomson	$\boxed{Div(\overrightarrow{B}) = 0}$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{Rot}\,(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$
Maxwell-Ampère	$\boxed{\overrightarrow{Rot}\,(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j}}$

2 - Conservation du flux

La conservation du flux provient à l'origine du **constat empirique** que contrairement aux charges électriques que l'on sait séparer par électrisation (Machine de Wimshurst), on ne parvient jamais à isoler le pôle nord et le pole sud d'un aimant ou d'un circuit.

En effet puisque les lignes de champ magnétique sortent du pôle nord, si l'on isolait ce dernier au sein d'une surface fermée Σ le flux devrait être strictement positif. La conservation du flux garantie ainsi la **non-existence de monopôle magnétique**. Rq : certains les cherchent toujours ….

En corollaire, **toute ligne de champ magnétique se referme sur elle-même** : si elle sort de Σ quelque part , elle doit y rentrer ailleurs (ci-dessous).



$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = 0 \qquad\qquad \Phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

Formulation : quelle que soit une distribution de courants et quelle que soit une surface fermée Σ :

La formule de Green-Ostrogradsky permet une écriture locale de cette propriété,

qui devient l'équation de Maxwell-Thonson ou Maxwell-Flux :

Le champ magnétique est à flux conservatif

Démo :

On retrouve le même formalisme que pour Maxwell-Gauss : $Div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ mais en affirmant qu'il n'y JAMAIS de « charge » magnétique.

Corollaire : Les lignes de champ $\vec{B}$ se referment sur elles-memes : **le champ magnétique est non-conservatif**

Soit Γ un contour fermé : la circulation $\mathscr{C}_\Gamma$ du champ $\vec{B}$ sur ce contour fermé est non nulle a priori. Soit :

- Si je fais 2 tours la circulation sera doublée, etc ….
- Si je tourne à l'envers on obtient la valeur opposée.

Amuses tes amis : 🤓
Que faire si vous êtes passé sous une échelle ?

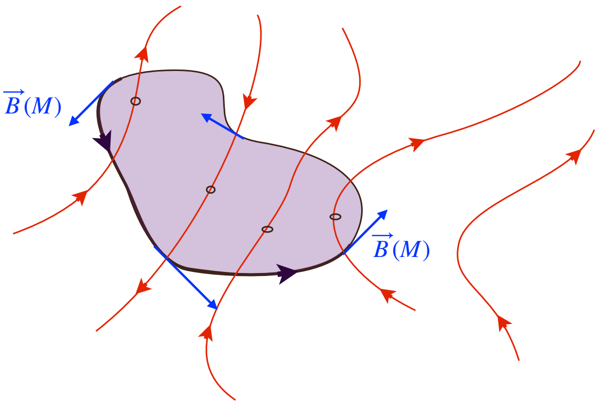
Cette circulation peut être calculée à l'aide du **théorème d'Ampère** ci-après.

3 - Théorème d'Ampère

Ce résultat a été établi de façon purement empirique suite à une série d'Expériences menées par A.M. Ampère. Les équations locales ont été déduite (et complétées) plus tardivement par Maxwell.

André-Marie Ampère
1775 - 1836

Formulation :



Avec I_Γ « le » courant enlacé par Γ

Exemple ici :

La formulation locale s'en déduit :

Maxwell - Ampère
(Statique)

Le rotationnel étant « la circulation sur un contour élémentaire » par unité de surface, vaut le courant qui la traverse.

Démo :

V - Le Théorème d'Ampère

Méthode type : #parCoeur

1 - Utilisation des symétries pour se ramener à un champ simple :
{ une seule composante, fonction d'une seule variable }

2 - Choisir un contour fermé judicieux contenant le point M et possédant la même symétrie que la distribution de courants.

3 - Appliquer le théorème d'Ampère

La méthode ci-dessus à appliquer de façon systématique à l'oral comme à l'écrit.

VI - Forces de Laplace

RÉVISION DES COURS DE SUP SUR : —> **Colles**

- **LES DIFFÉRENTS RAILS DE LAPLACE**
  Avec générateur de courant, générateur de tension.
  Avec action d'un opérateur extérieur de force constante.
  Conversion électromécanique.

- **Le Haut Parleur :**
  Voir mes notes de SUP pour la version en coordonnées cylindrique.

- **Revoir le Moteur à Courant Continu :**
  Calcul de la force de Laplace
  Calcul du moment ⇒ Couple moteur

Bien revoir toutes les conventions d'orientation
- Vecteur surface & fem e [toujours dans le même sens ⚠]
- CG et CR
  Etc ….