J.COURTIN

Electrostatique $\overrightarrow{E}(M)$

La charge et le champ

Objectifs :

- Topographie du champ $\overrightarrow{E}(M)$
- Densité de charge et distribution
- Symétrie et invariances
- Théorème de Gauss
- Potentiel et condensateurs

Révision SUP :

- Interaction électrostatique.
- Gradient et potentiel.
- Intégrale vectorielle (statique des fluides)

I Les distributions de charges

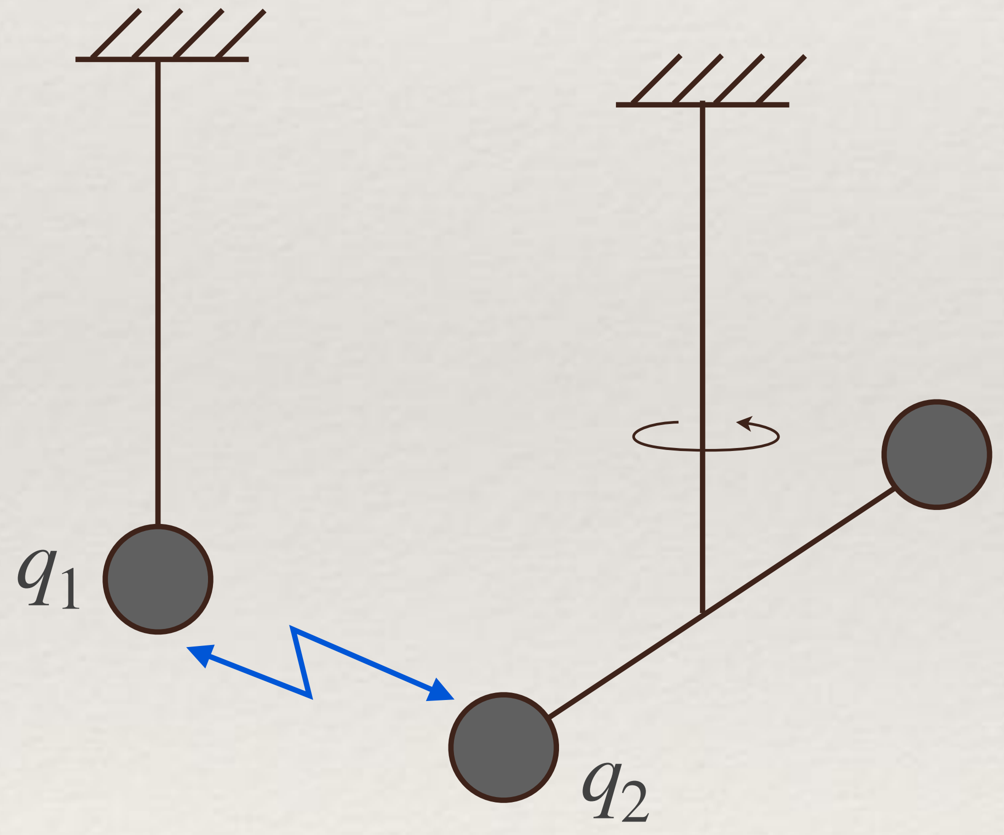
1 - Découvertes et quantification de la charge électrique

✳Exp. d'électrisation par Thales de Milet (Triboélectricité)

(~ 600 av JC)

Conclusion 1 : - **2 types de charges** + ou -
- **Les opposés s'attirent**.

✳Exp. de Coulomb (1785)



$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(d_{12})^2}\overrightarrow{u_{12}}}$$

Conclusion 2 : **L'interaction électrostatique est de type newtonienne :**

- Proportionnelle aux charges
- Inverse proportionnelle au carré de la distance
- Supposée instantanée.

Révisions SUP :

&

- Relations champ $\overrightarrow{E}(M)$ et potentiel V(M) $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\nabla}(V)$
- Champ de force $\overrightarrow{F}_{elec}(M)$ et énergie potentielle $E_p(M)$ $\overrightarrow{F}_{elec}(M) = q\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\nabla}(E_p)$

$E_p = qV$

✳ Exp. de Millikan (1913)

Chute d'une goutte d'huile chargée dans une champ E, avec frottements visqueux.

Conclusion 3 : **il existe une charge élémentaire** $e = 1.602\ 10^{-19}C$

✳ Théorie moderne : modèle standard de la physique des particules (XXème siècle)

La matière « tangible » est composée de deux types de particules chargées : des fermions

Hadrons : proton, neutron —> quark

Leptons : électron

Conclusion 4 : **les charges sont des entités matérielles.**

Propriétés :

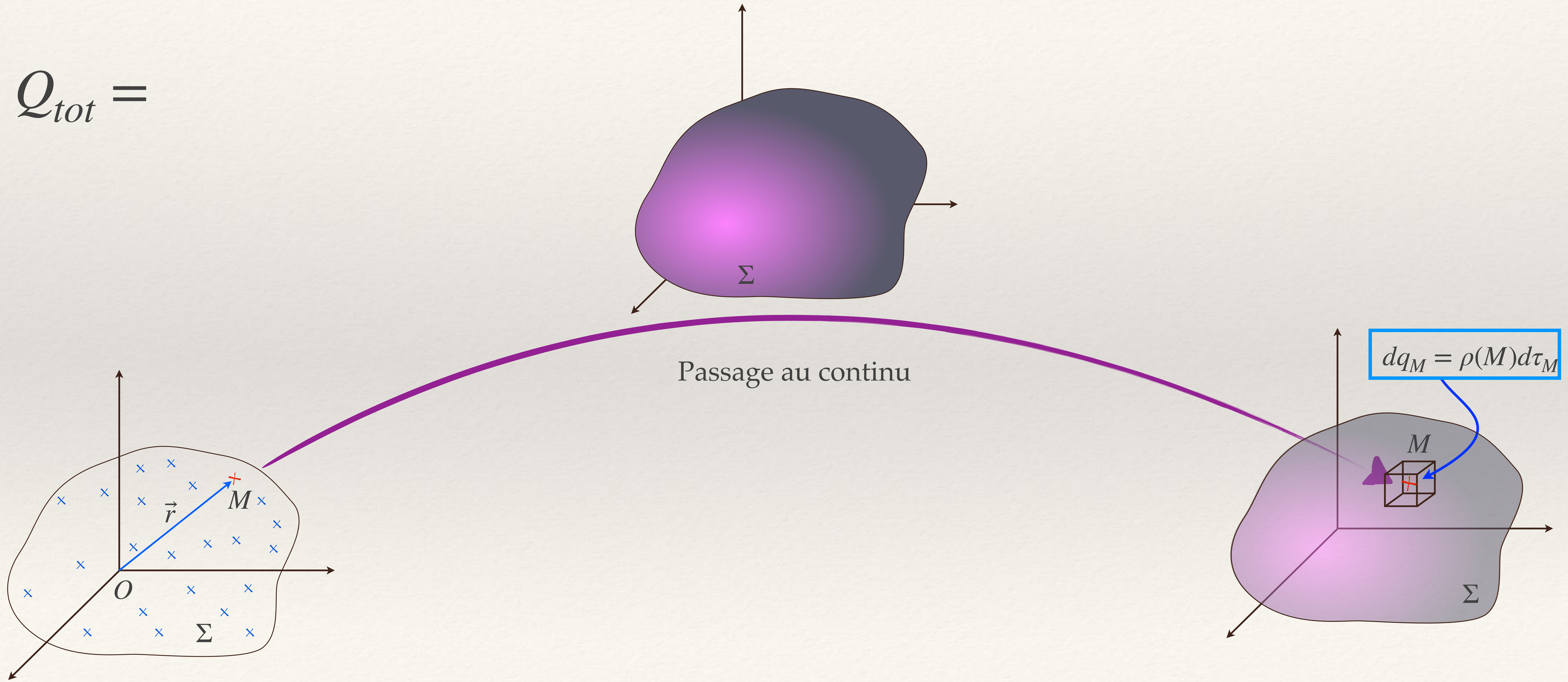
La charge électrique étant véhiculée par des entités matérielles, celle-ci se conserve au même titre que la matière :

- **Pour un système fermé : la charge électrique est conservée.**
- Le comptage des charges est le même pour tous les observateurs : la charge électrique ne dépend pas du référentiel.

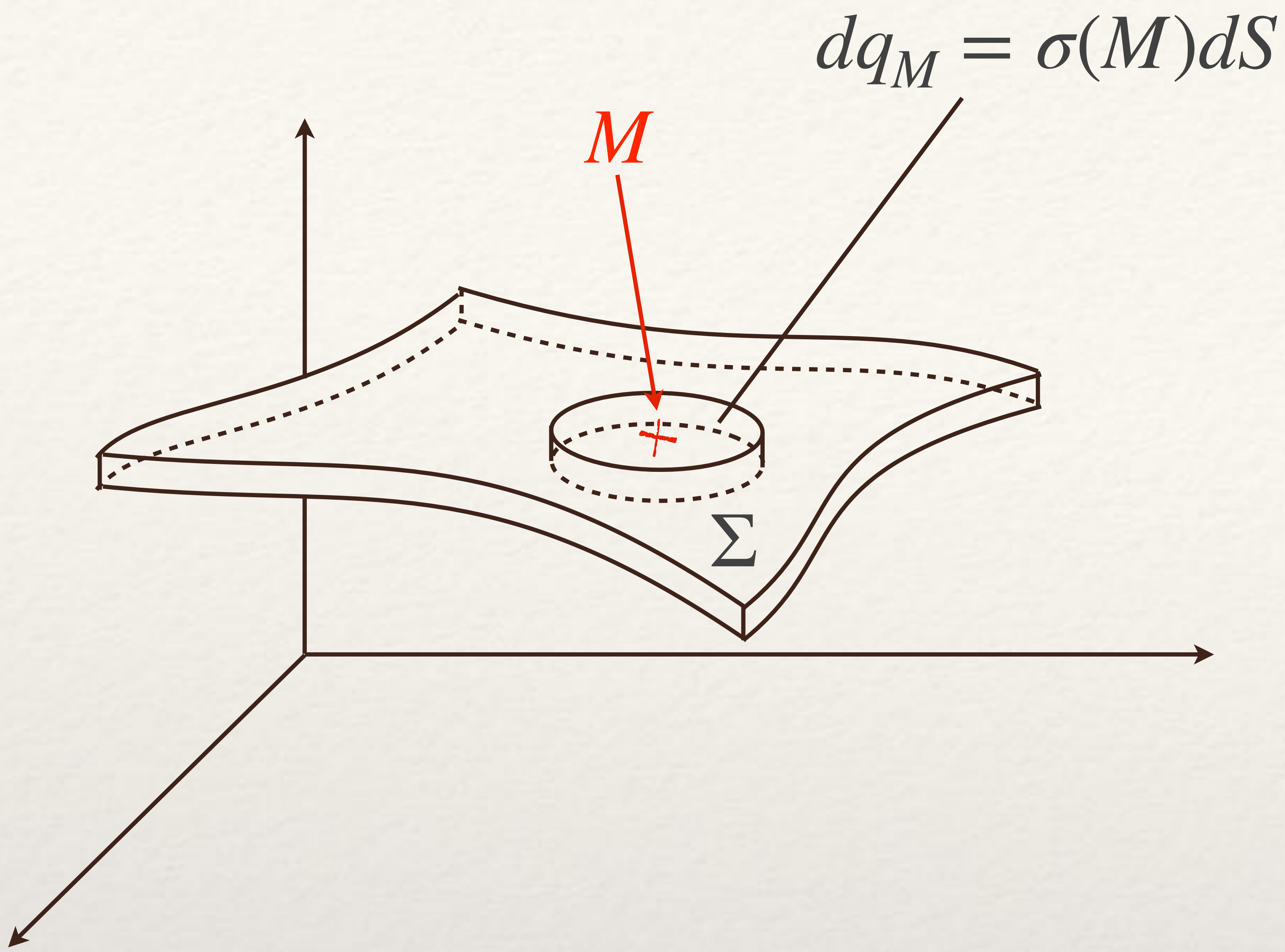
2 - Densité de charge

L 'ensemble des charges (électrons etc…) est une collection de points M_i et de charge q_i que l'on peut décrire par une représentation continue au moyen d'une fonction scalaire $\rho(M)$ ou **densité volumique de charge** telle que la charge dans un élément de volume $d\tau$ vaut : $dq = \rho(M)d\tau$

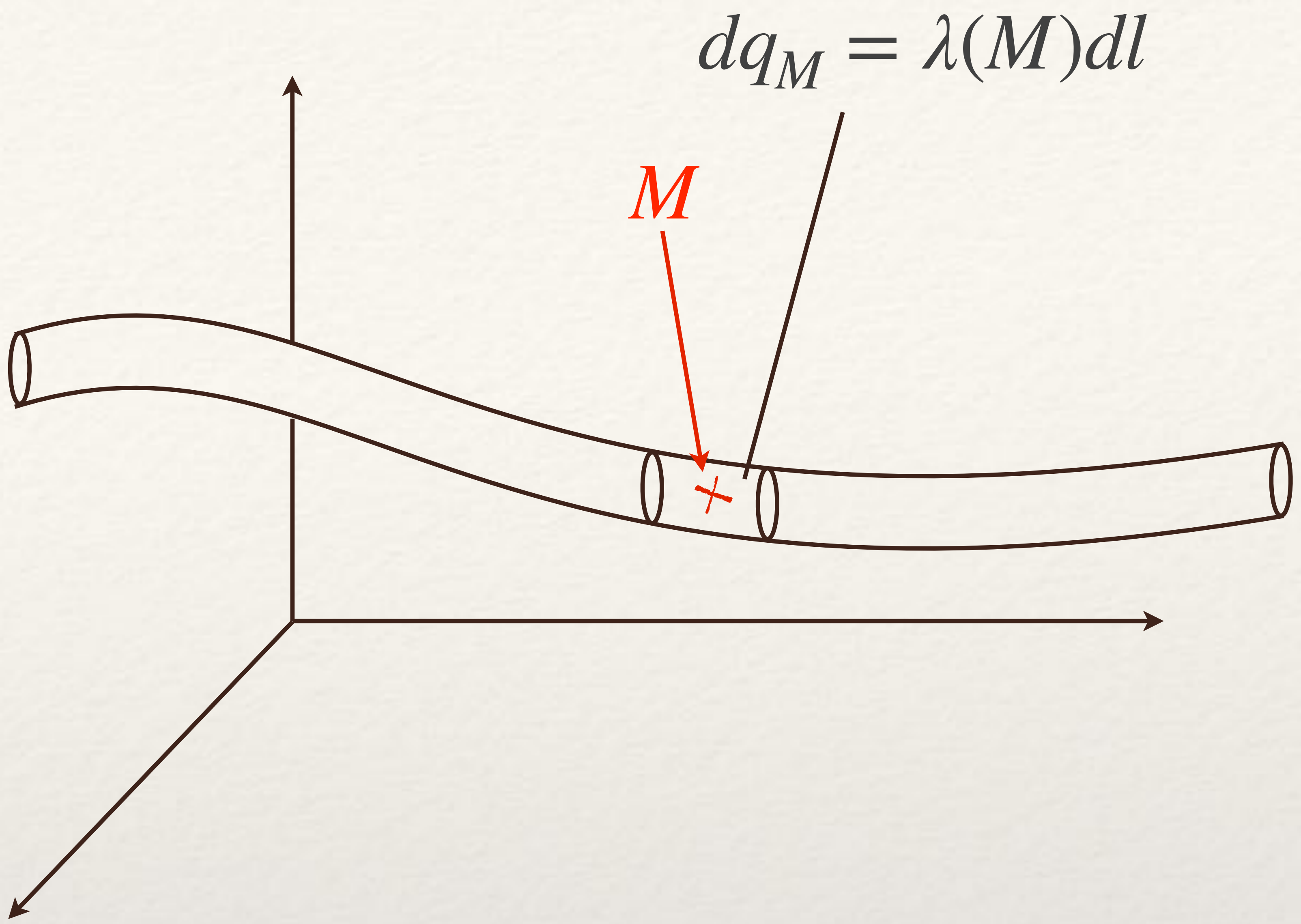
$$Q_{tot} =$$



Distribution surfacique



Distribution linéique



Passage d'une distribution à l'autre :

3 - Potentiel électrostatique

Nous avons vu en sup que le potentiel d'une **charge ponctuelle** s'obtient comme primitive de la loi de Coulomb :
Celui-ci s'exprime en Volt.

$$V(M) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

α - **Le potentiel électrostatique d'une distribution de charge** s'obtient à l'aide du principe de superposition (P.S) :

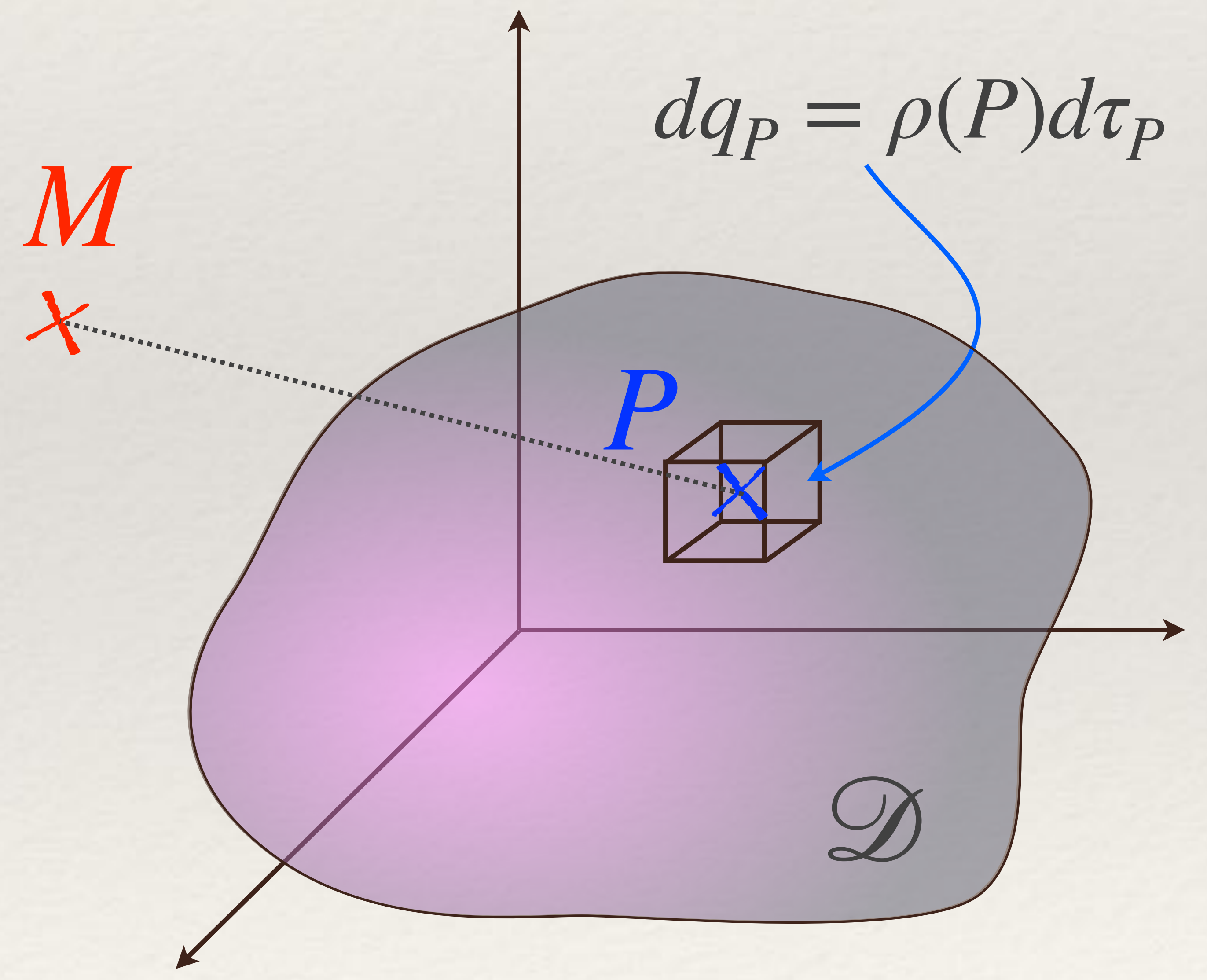
$$V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad V(M) = \iint_\Sigma \frac{\sigma(P)ds}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad V(M) = \int_\Gamma \frac{\sigma(P)dl}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Distribution volumique — Distribution surfacique — Distribution linéique

On additionne, à l'aide d'une intégrale sur toute la distribution, les contributions au potentiel en M de tous les éléments de charge dq_P des positions P.

M —> Point fixe où l'on veut calculer le potentiel $V(M)$

P —> Point « mobile » qui parcourt la distribution de charge : $dq_P = \rho(P)d\tau_P$
Comprendre : P est la variable d'intégration.

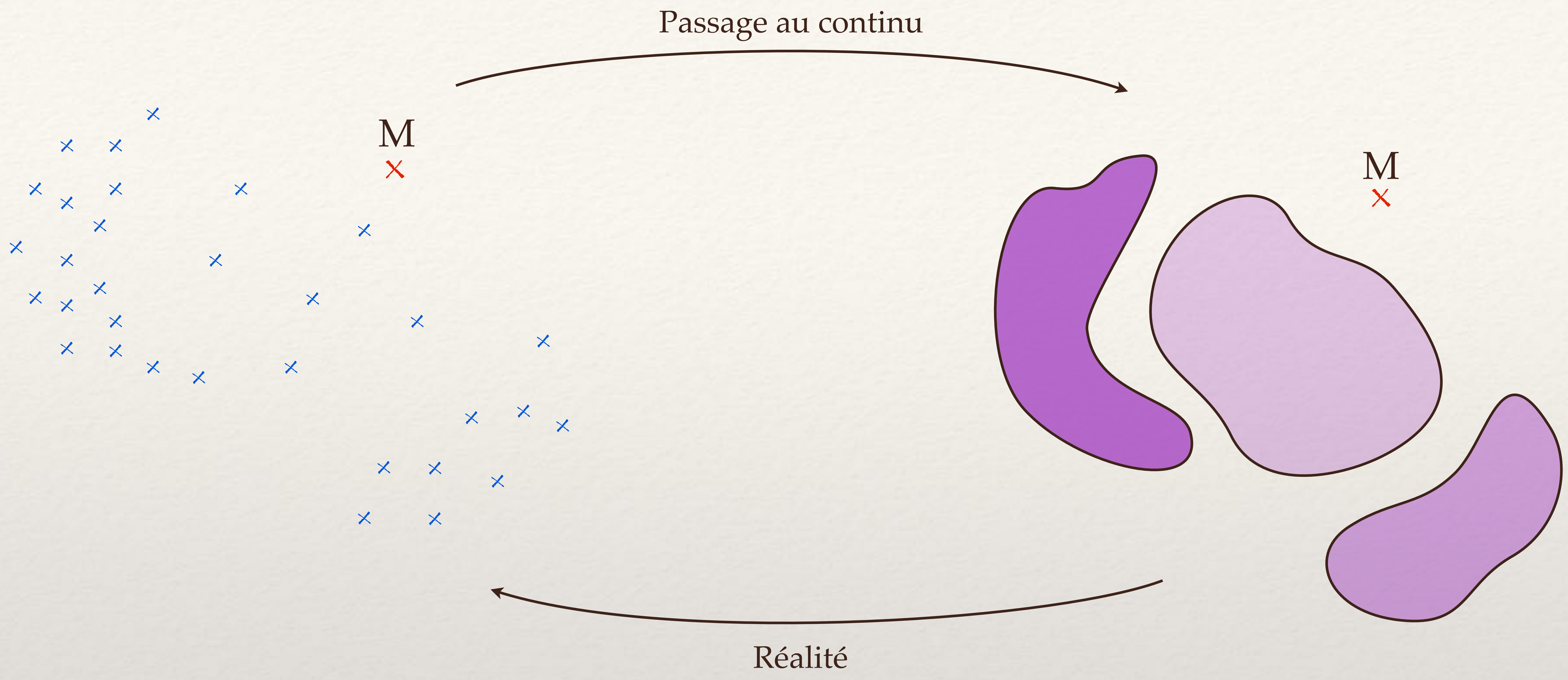


En pratique ces intégrales sont difficiles voire impossibles a mener. (HP)

β - **L'énergie potentielle** s'en déduit : $\boxed{Ep(M) = qV(M)}$

$Ep(M)$ est l'énergie potentielle électrostatique d'une « charge d'épreuve » q, plongée dans le champ électrostatique produit par la distribution de charge $\mathscr{D}$ de charge totale Q_{tot} . Cette énergie est en Joule (SI) ou en eV ($1eV = 1{,}602\ 10^{-19}J$)

Toute distribution de charges peut être ramenée à une distribution de charges ponctuelles :



$$V(M) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{||\overrightarrow{MP_i}||} \xrightarrow{\text{Passage au continu}} V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

γ - Relation champ - potentiel $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V)$

On peut construire une énergie potentielle en recherchant une primitive à partir du travail du champ électrostatique.

<u>**Révisions SUP :**</u>

Opérateur gradient
vu en statique des fluides

Propriété du gradient :

$$\boxed{dP = \vec{\nabla}(P) \cdot d\vec{l}}$$

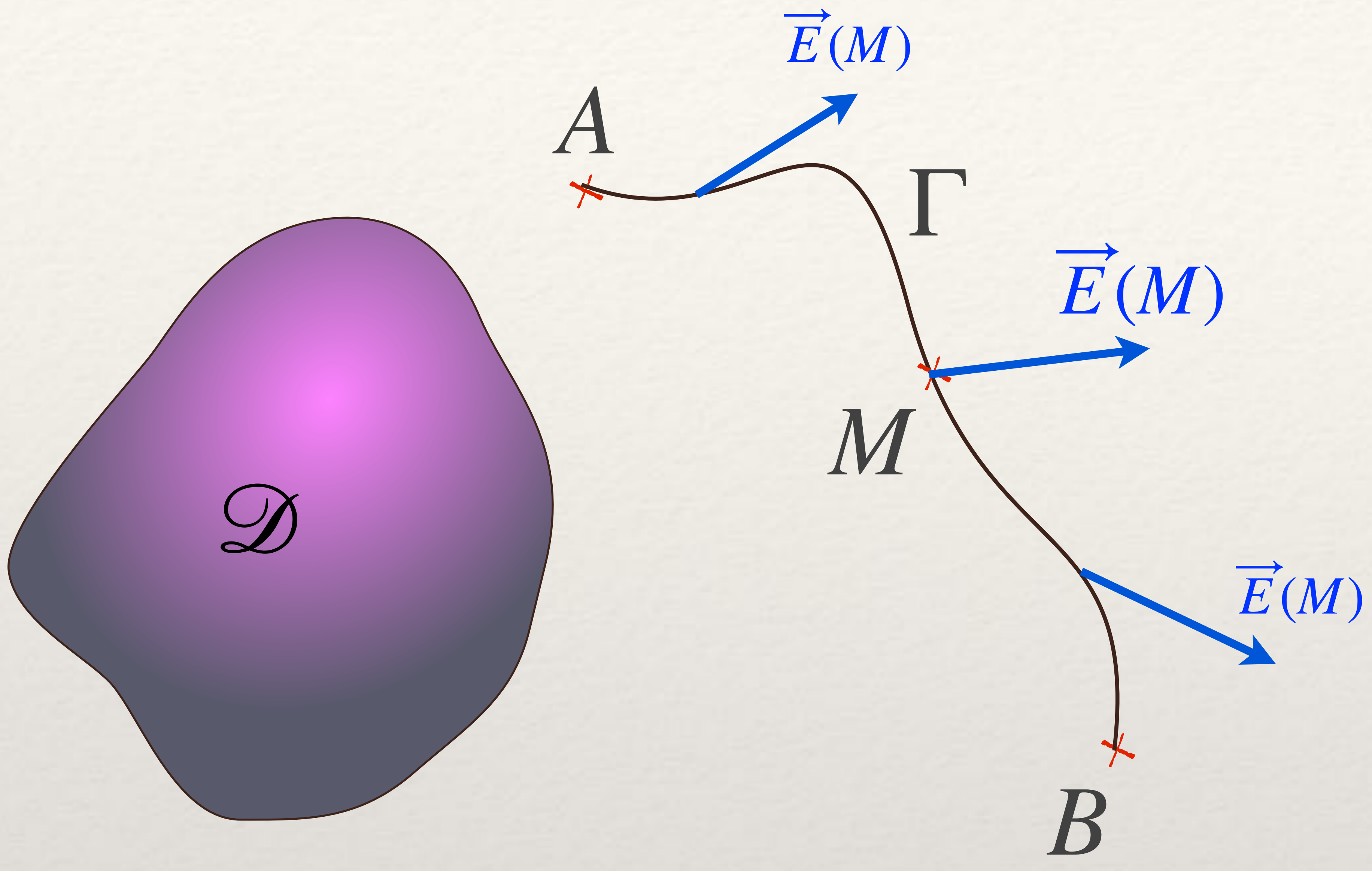
&

- Relations champ $\vec{E}(M)$ et potentiel V(M) $\qquad \vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V)$
- Champ de force $\vec{F}_{elec}(M)$ et énergie potentielle $E_p(M)$ $\qquad \vec{F}_{elec}(M) = q\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(E_p)$

Propriété du gradient : $\boxed{dV = \vec{\nabla}(V) \cdot d\vec{l}}$

δ - **Circulation du champ électrostatique**

La circulation du champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas du chemin suivi. En effet on a construit le potentiel électrostatique comme une primitive au sens vectoriel de $\vec{E}(M)$, ce que se traduit par la relation linéaire dite « relation champ-potentiel » de l'électrostatique : $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V)$



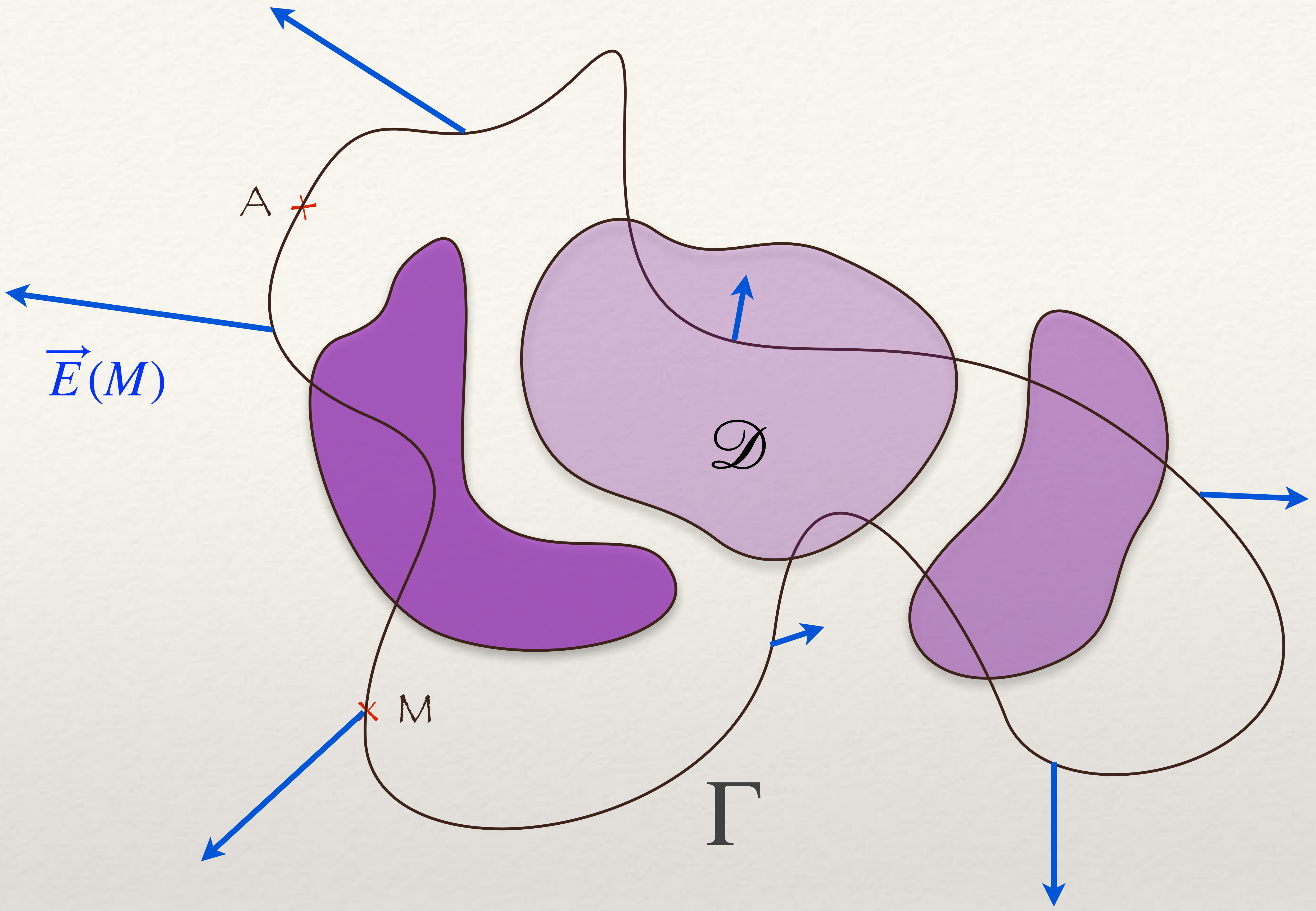
Propriété du gradient : $\boxed{dV = \vec{\nabla}(V) \cdot d\vec{l}}$

Montrer que : $\boxed{\int_\Gamma \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = U_{AB}}$

δ - **Application au canon à électron : tube cathodique**

La circulation du champ $\overrightarrow{E}(M)$ sur un chemin fermé est nulle :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{E}(M) \cdot d\vec{l} = V_A - V_A = 0$$



Le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ est dit « champ conservatif »

Propriété : (Admise)

L'existence d'un potentiel électrostatique scalaire $V(M)$ est aussi garantie par l'équation de Maxwell-Faraday :

En régime statique : $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{E}) = -\cancel{\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}} = \overrightarrow{0}$ et l'analyse vectorielle affirme que $\forall$ champ à rotationnel nul, il existe un champ scalaire dont le champ $\overrightarrow{E}$ est le gradient . On choisit ici de nommer ce champ scalaire potentiel électrostatique $-V(M)$, tel que : $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\nabla}(V)$ [«moins» car **le champ descend les potentiels**].

— A lire : topographie des champs $\overrightarrow{E}(M)$ et $V(M)$ —

Corollaire :

Ce champ est toujours défini à une constante près (choix de jauge) car $\overrightarrow{\nabla}(C^{te}) = \overrightarrow{0}$.

Ceci a pour conséquence de pouvoir choisir la masse. (origine des potentiels)

Maxwell-Gauss	$Div(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Thomson	$Div(\overrightarrow{B}) = 0$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

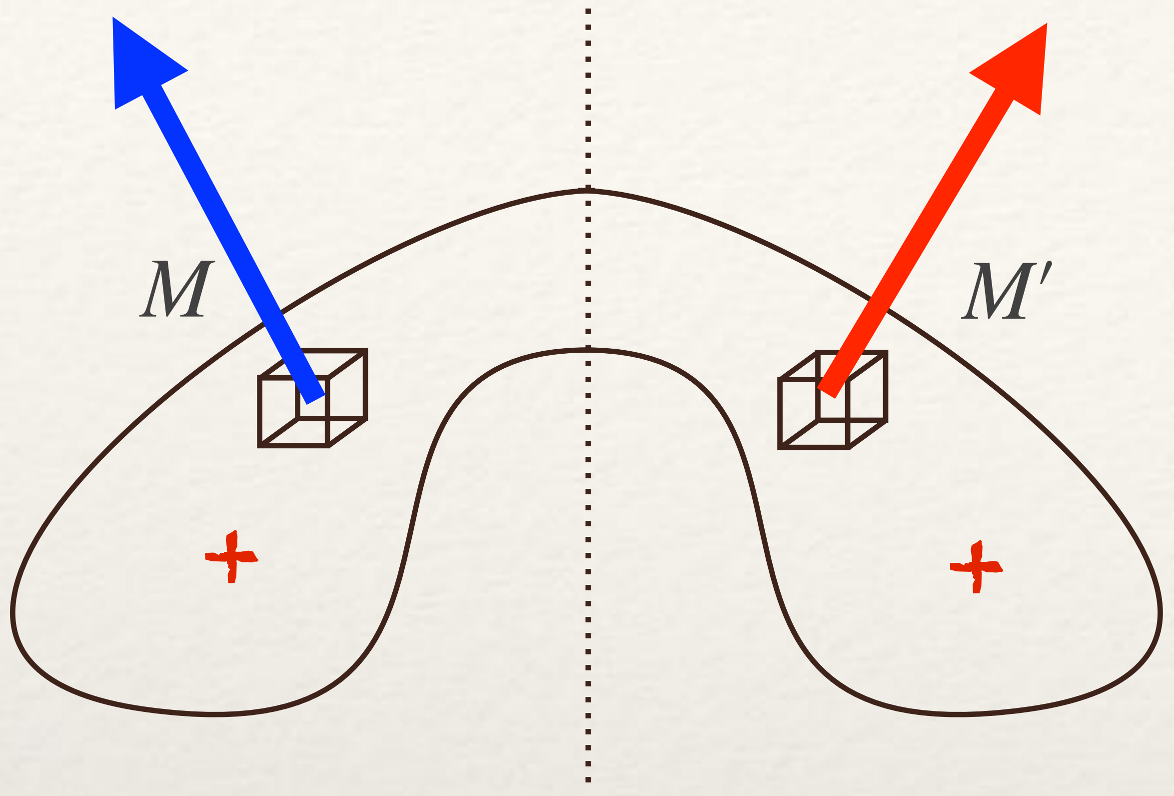
4 - Equation de Poisson

II - Symétries et invariances

- Csq sur la charge ?
- Csq sur le potentiel ?
- Csq sur le champ ?

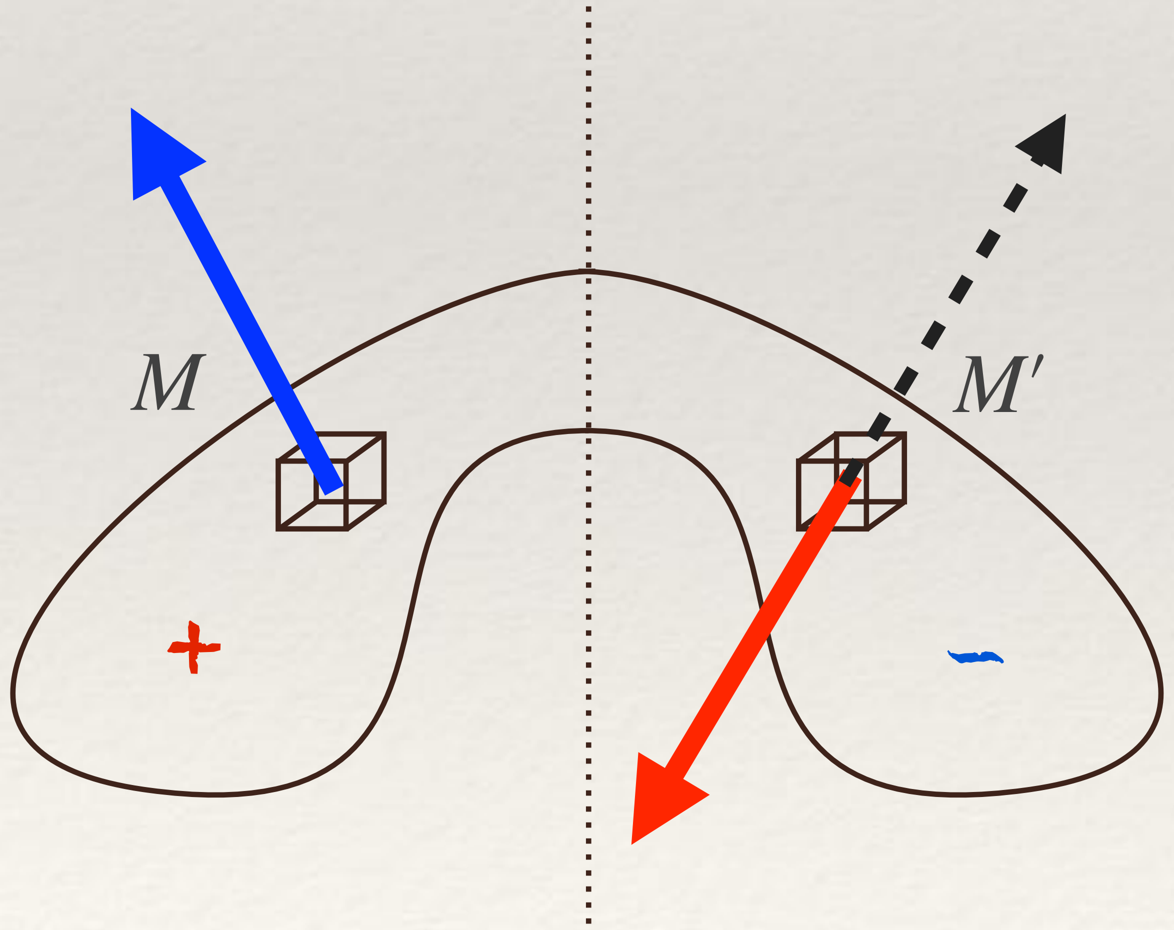
1 - Symétrie plane

Symétrie :



Π_S

Anti-Symétrie :

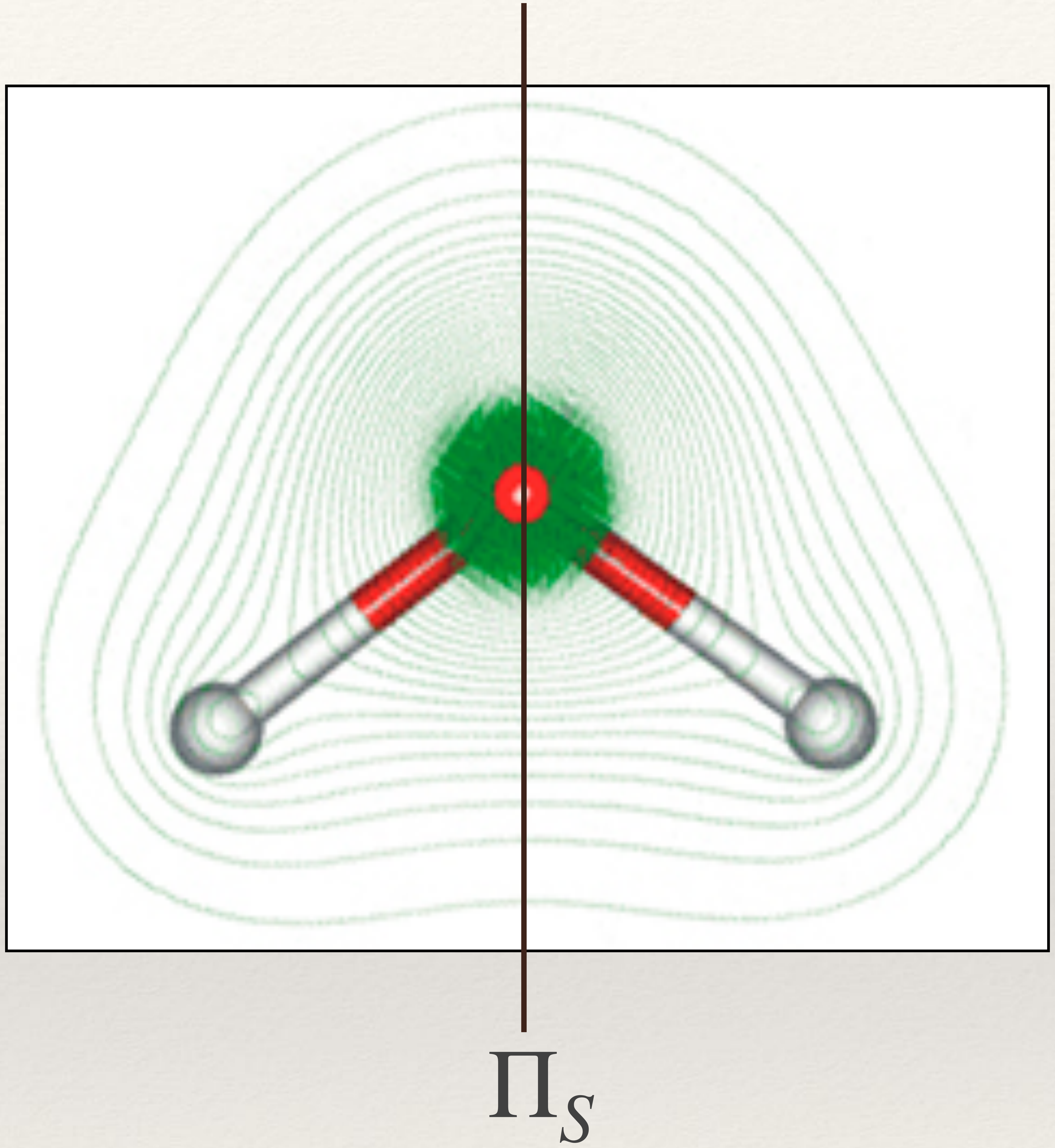


Π_{AS}

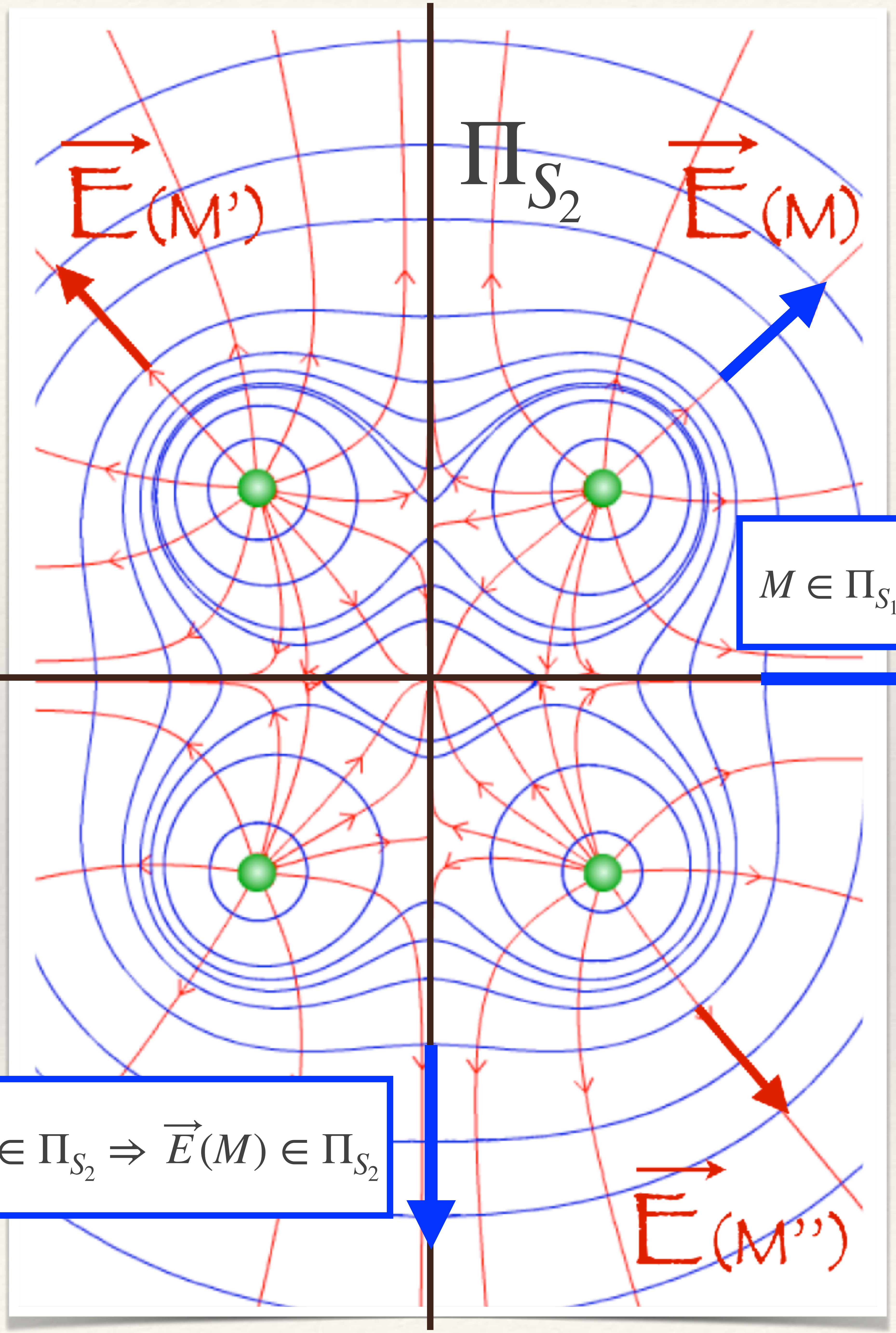
Définition : Le champ $\overrightarrow{E}$ est dit vecteur « vrai » ou « vecteur polaire »

Ne pas noter

Les lignes équipotentielles sont symétriques par rapport à Π_S



$$\vec{E}(M') = S_{\Pi_{S_2}}[\vec{E}(M)]$$

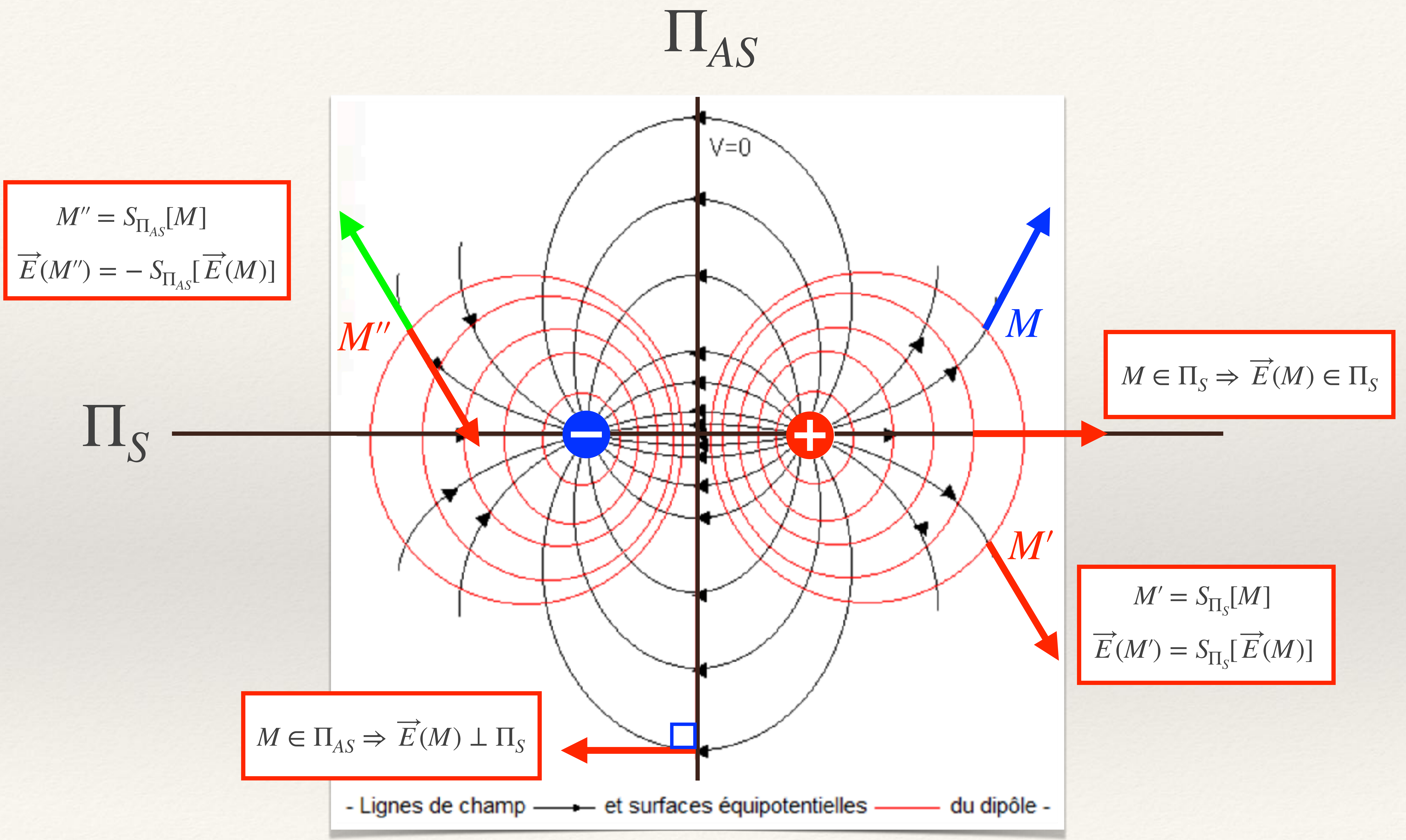


Π_{S_1}

$$M \in \Pi_{S_1} \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_{S_1}$$

$$M \in \Pi_{S_2} \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_{S_2}$$

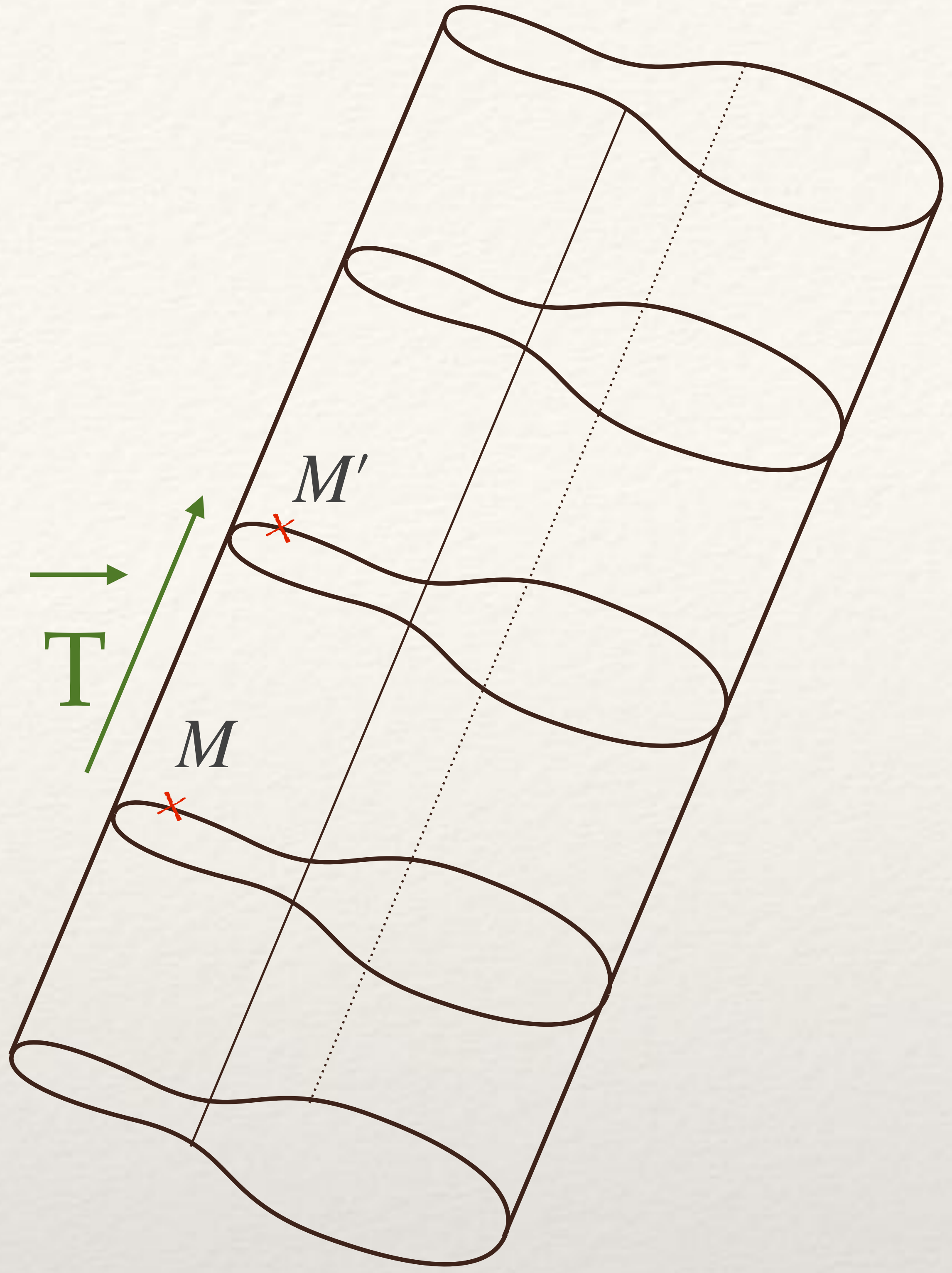
$$\vec{E}(M'') = S_{\Pi_{S_1}}[\vec{E}(M)]$$



Π_{AS}
$M'' = S_{\Pi_{AS}}[M]$
$\vec{E}(M'') = -\,S_{\Pi_{AS}}[\vec{E}(M)]$
V=0
M''
M
$M \in \Pi_S \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_S$
Π_S
M'
$M' = S_{\Pi_S}[M]$
$\vec{E}(M') = S_{\Pi_S}[\vec{E}(M)]$
$M \in \Pi_{AS} \Rightarrow \vec{E}(M) \perp \Pi_S$
- Lignes de champ et surfaces équipotentielles du dipôle -

2 - Invariance par translation

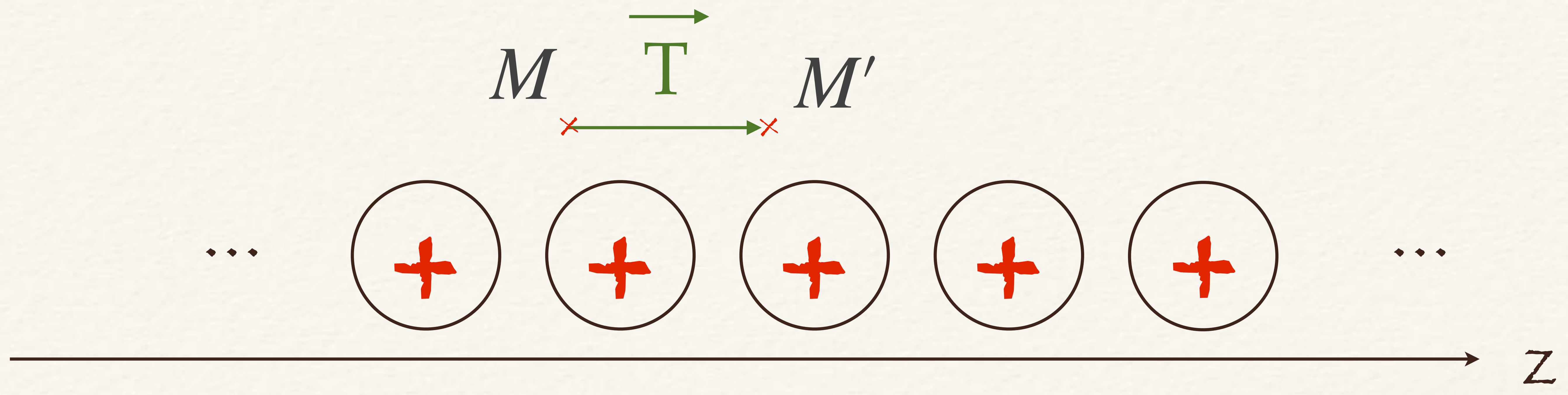
Translation continue



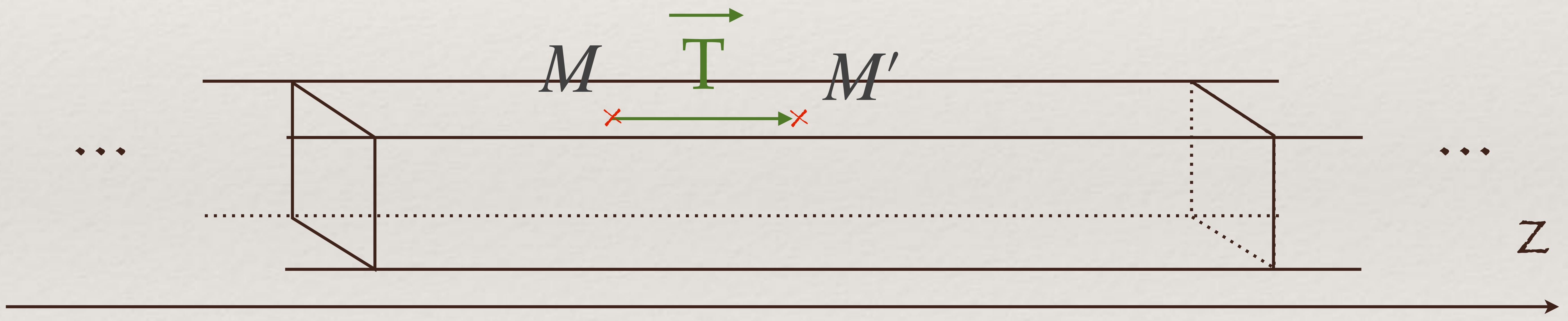
- Csq sur la charge ?
- Csq sur le potentiel ?
- Csq sur le champ ?

De telles symétries imposent de considérer un système illimité dans l'espace.

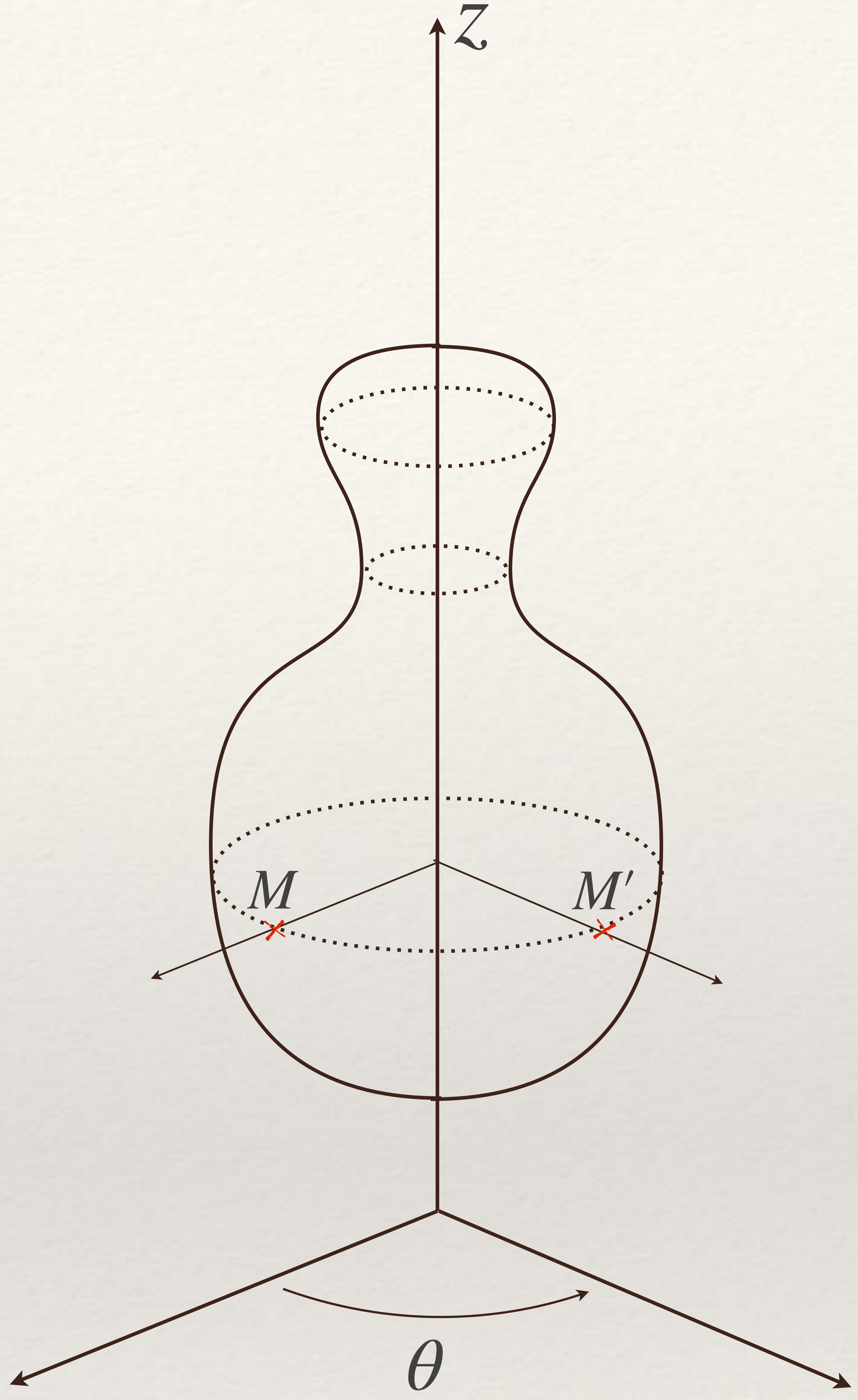
Translation discrète



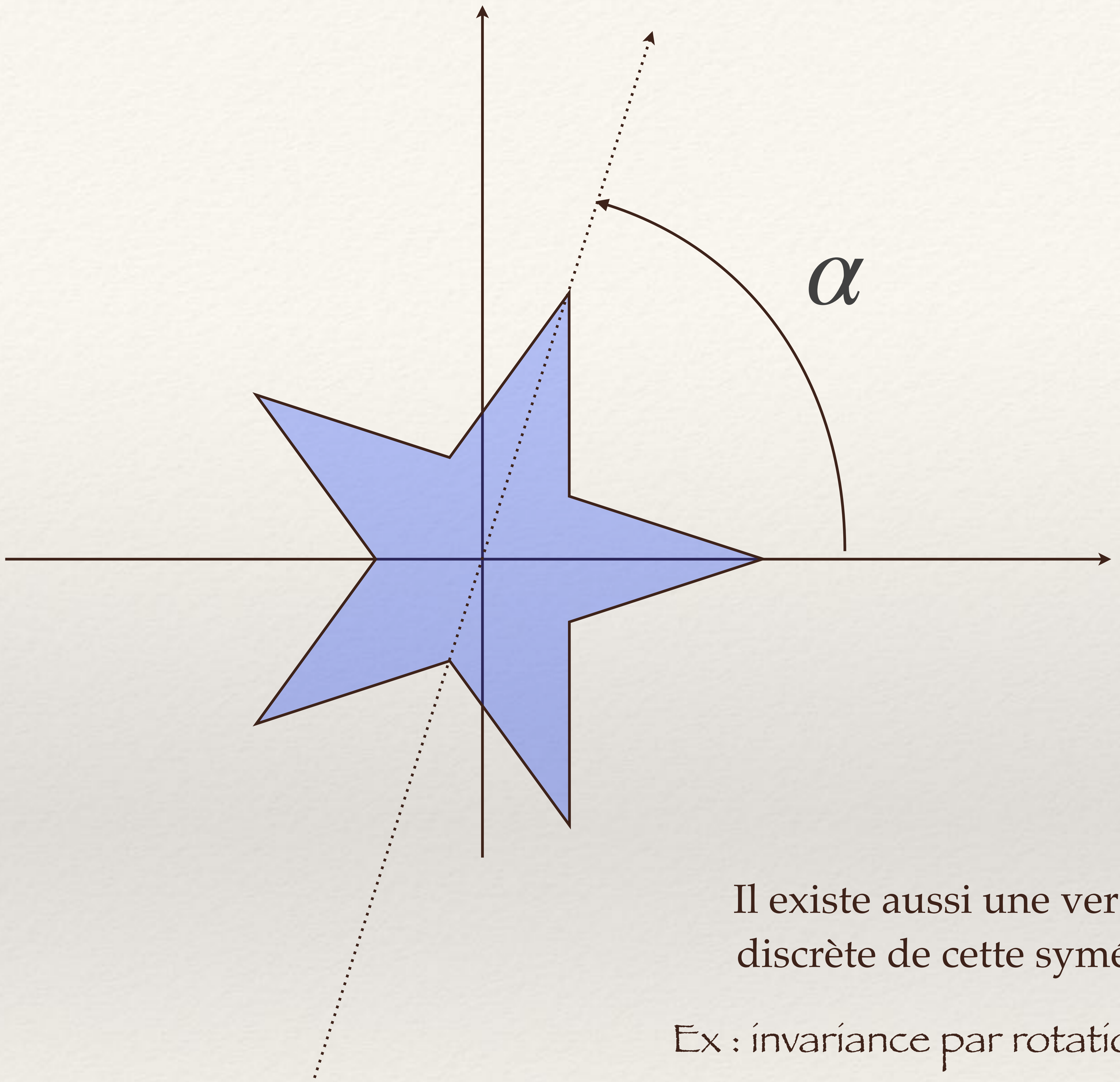
Translation continue



3 - Invariance par rotation autour d'un axe



- Csq sur la charge ?
- Csq sur le potentiel ?
- Csq sur le champ ?



Il existe aussi une version discrète de cette symétrie

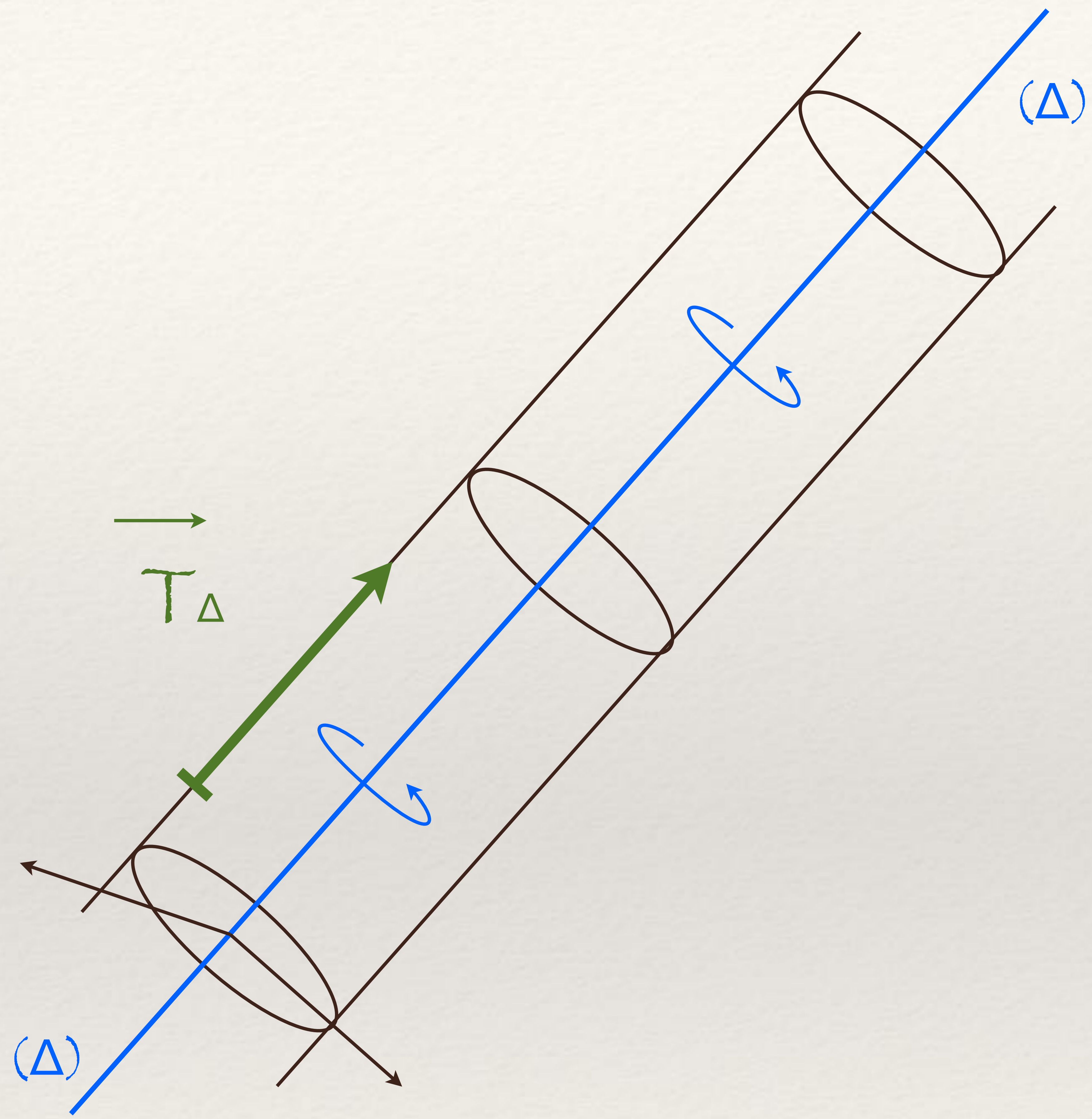
Ex : invariance par rotation de α

4 - Invariances combinées

- Csq sur la charge ?
- Csq sur le potentiel ?
- Csq sur le champ ?

α - Symétrie cylindrique :

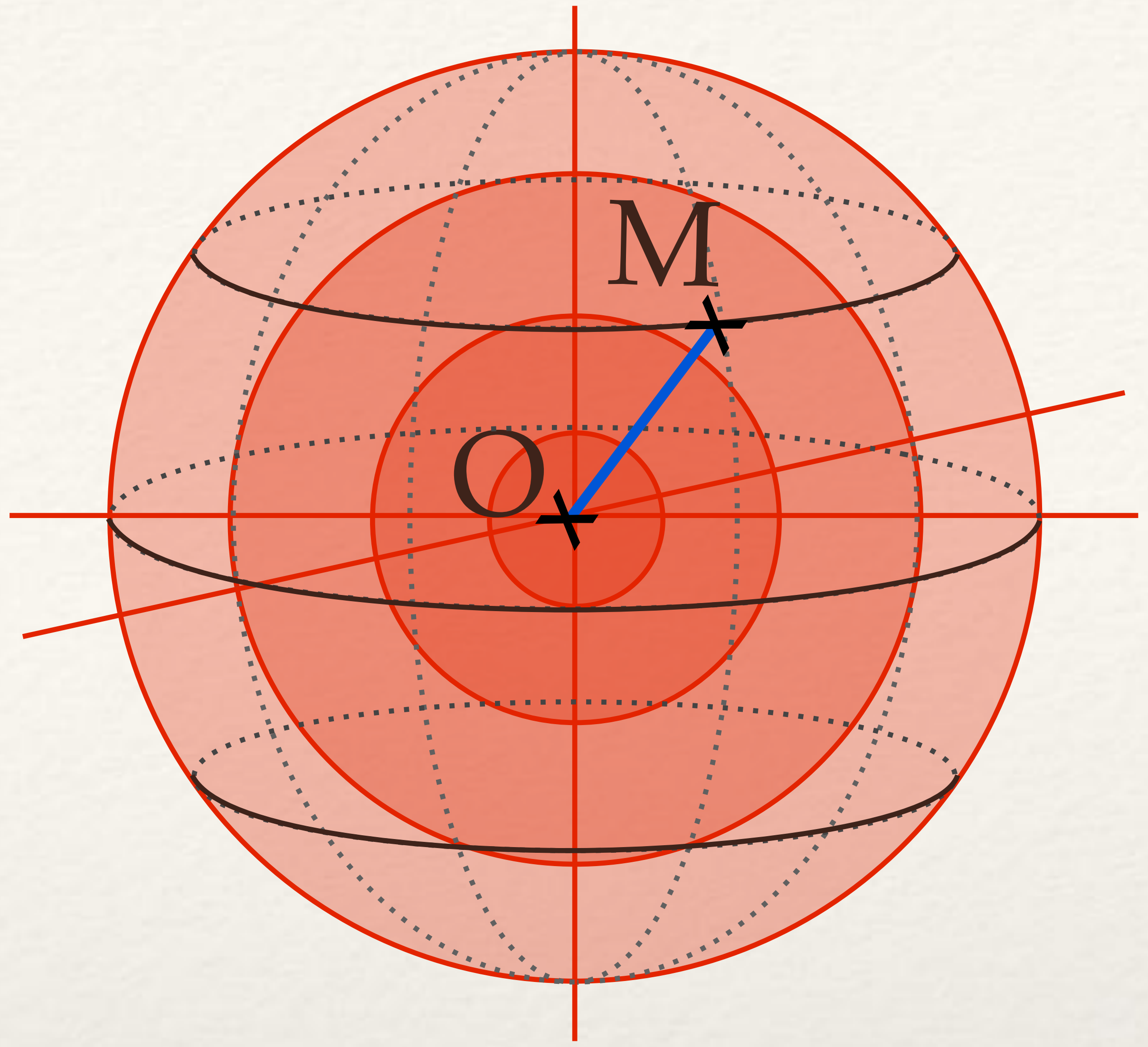
symétrie cylindrique $\{$ Invariance par translation + invariance par rotation $\}$



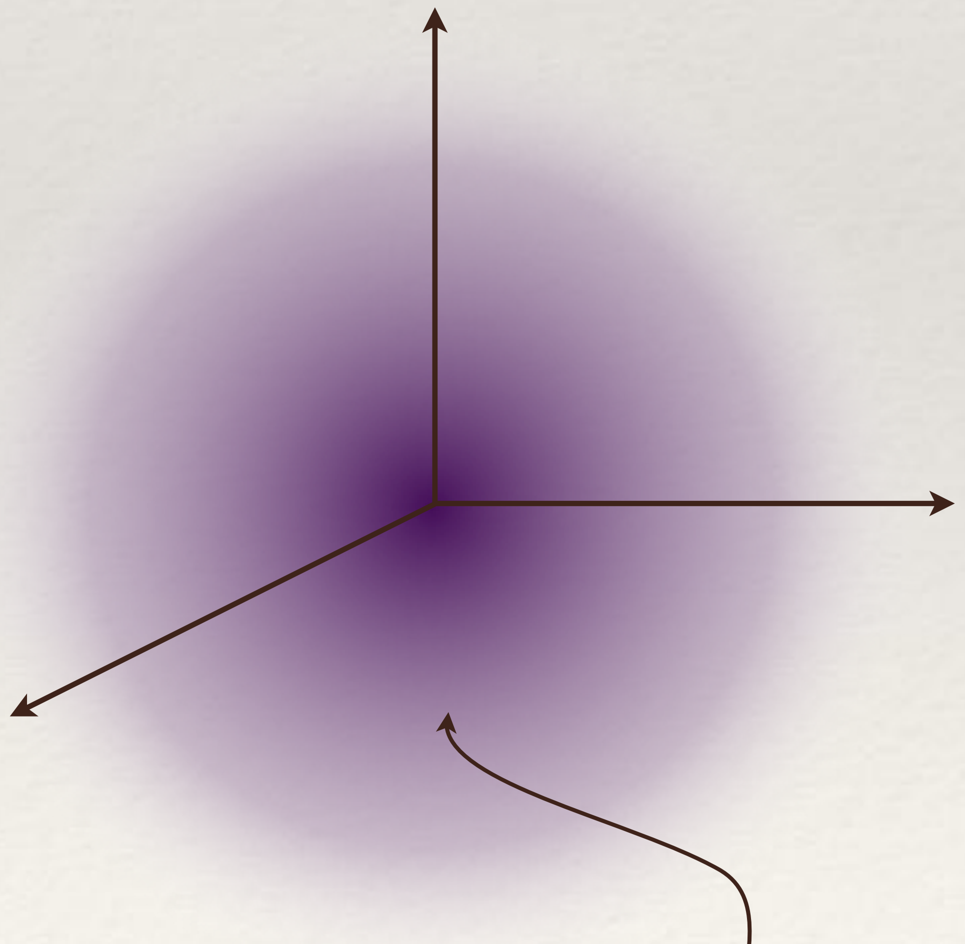
β - Symétrie sphérique :

On peut donner deux formulations équivalentes de la symétrie sphérique :

$$\boxed{\begin{gathered}\left\{\text{Symétrie par rapport à tout plan passant par O}\right\} = \text{symétrie sphérique} \\ \Updownarrow \\ \left\{\text{Symétrie de rotation autour de tout axe passant par O}\right\} = \text{symétrie sphérique}\end{gathered}}$$

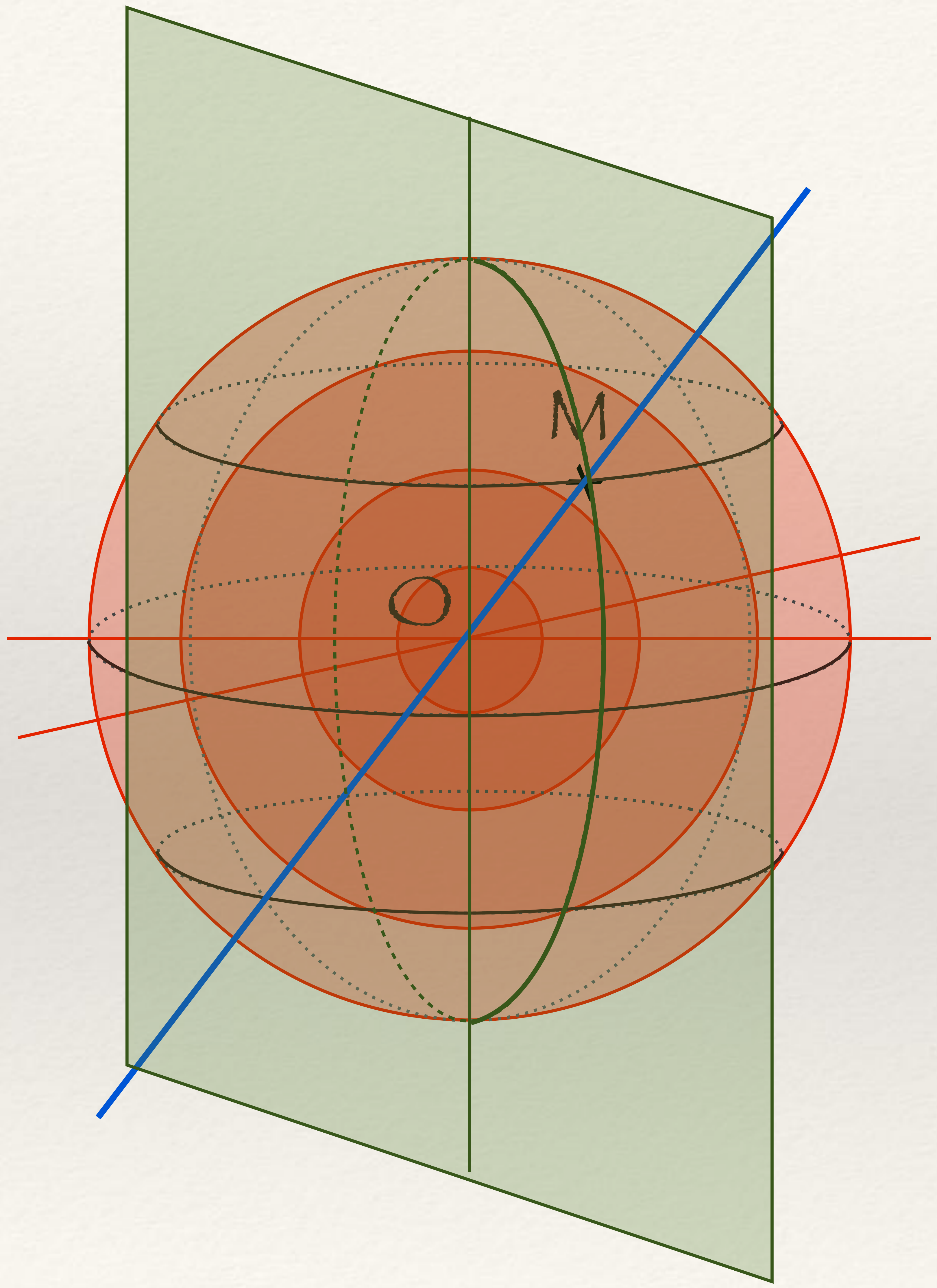


- Csq sur la charge ?
- Csq sur le potentiel ?
- Csq sur le champ ?

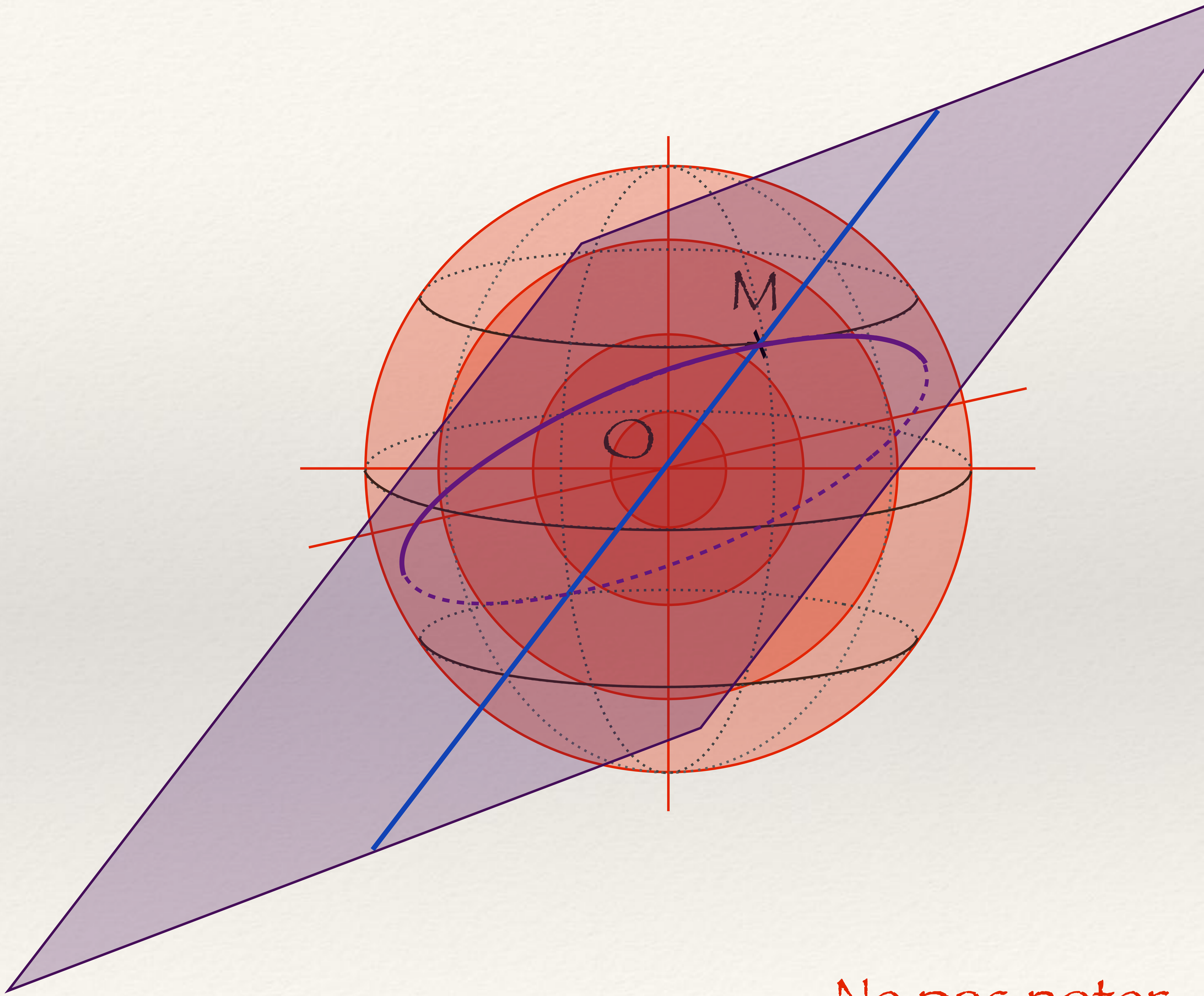


Distribution électronique dans l'atome d'hydrogène

{ Symétrie par rapport à tout plan passant par O } ≈ symétrie sphérique

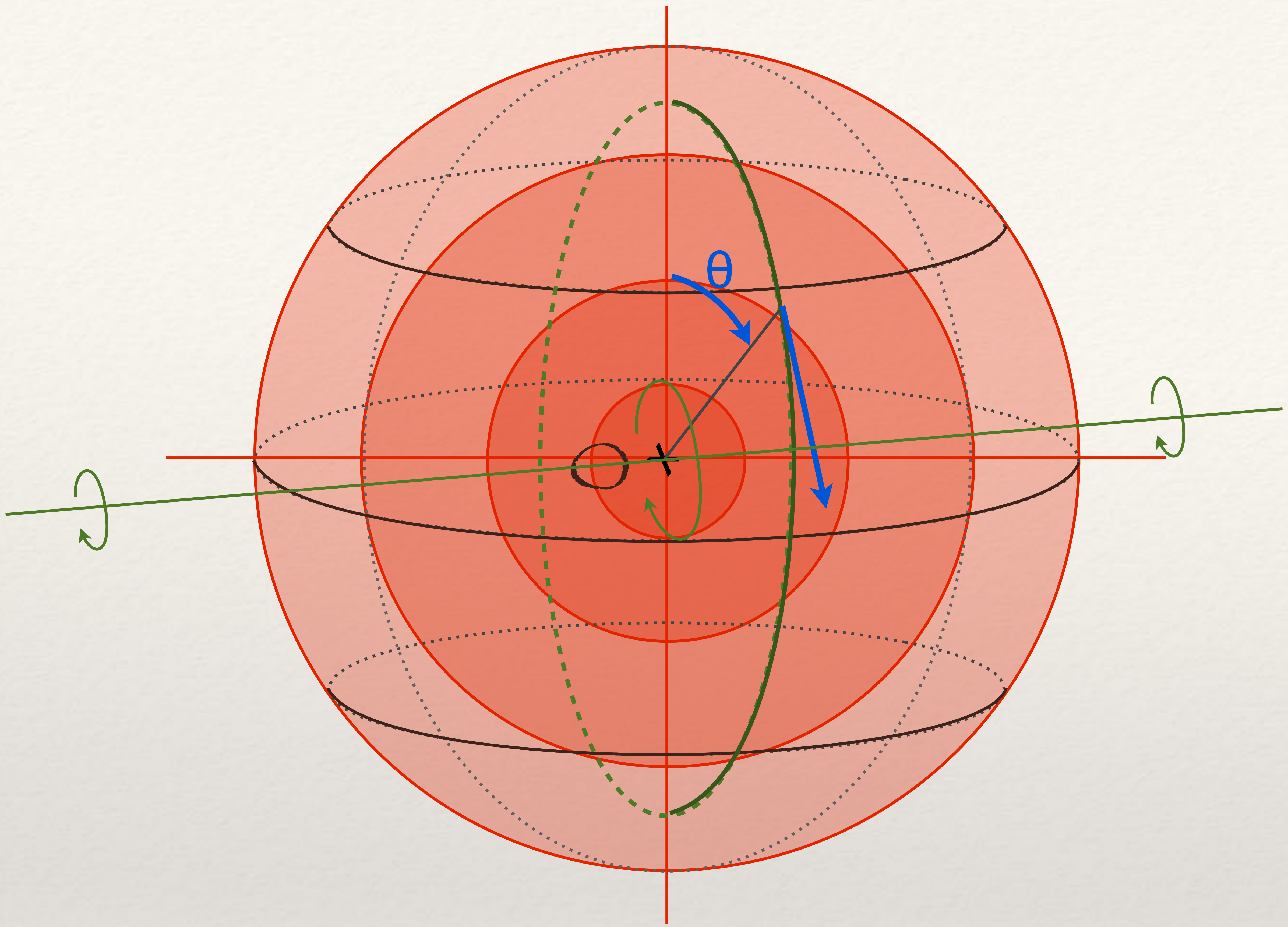


{ Symétrie par rapport à tout plan passant par O } ≈ symétrie sphérique



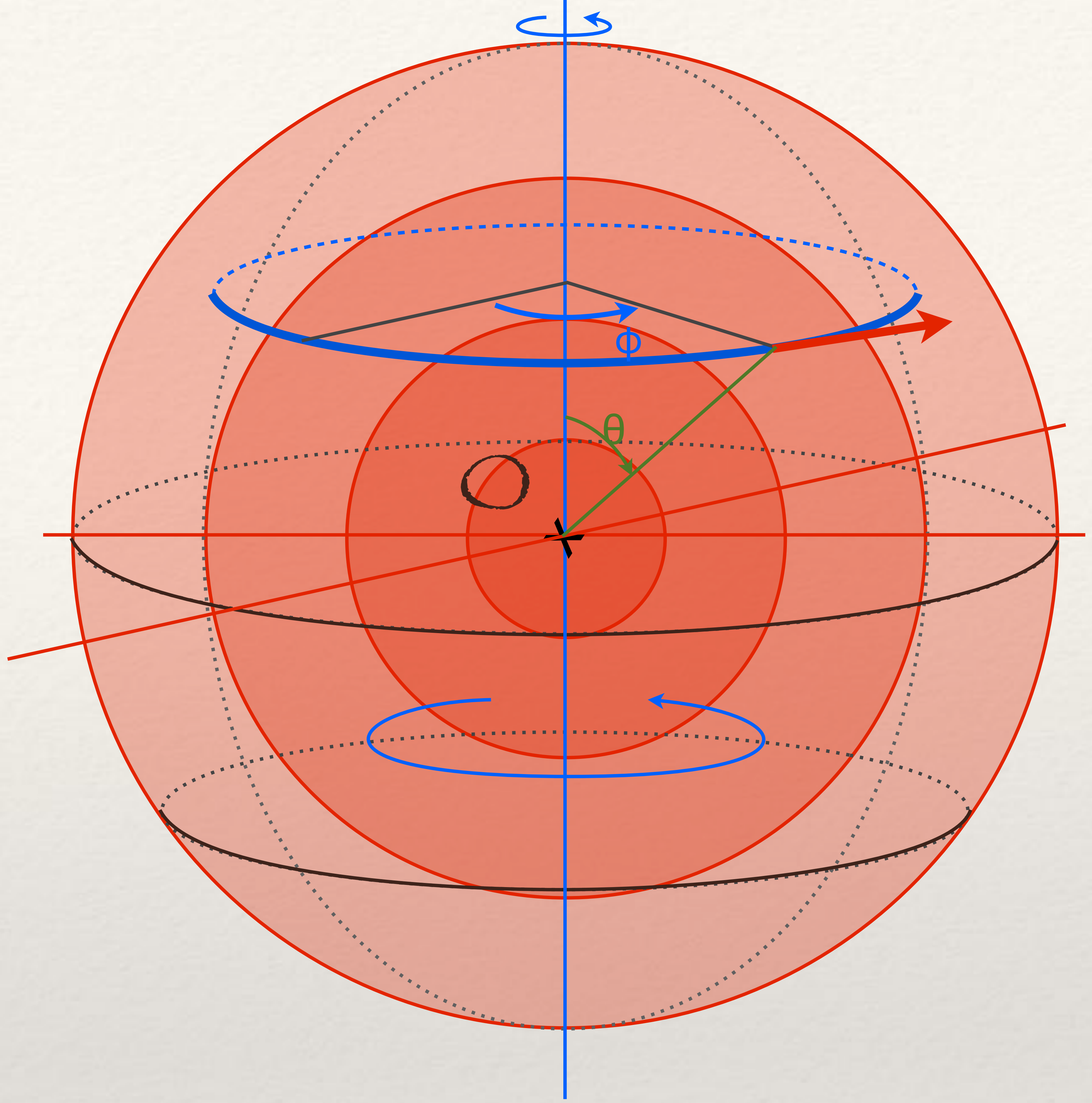
Ne pas noter

{ Symétrie de rotation autour de tout axe passant par O } ≈ symétrie sphérique



Conséquence :

{ Symétrie de rotation autour de tout axe passant par O } ≈ symétrie sphérique



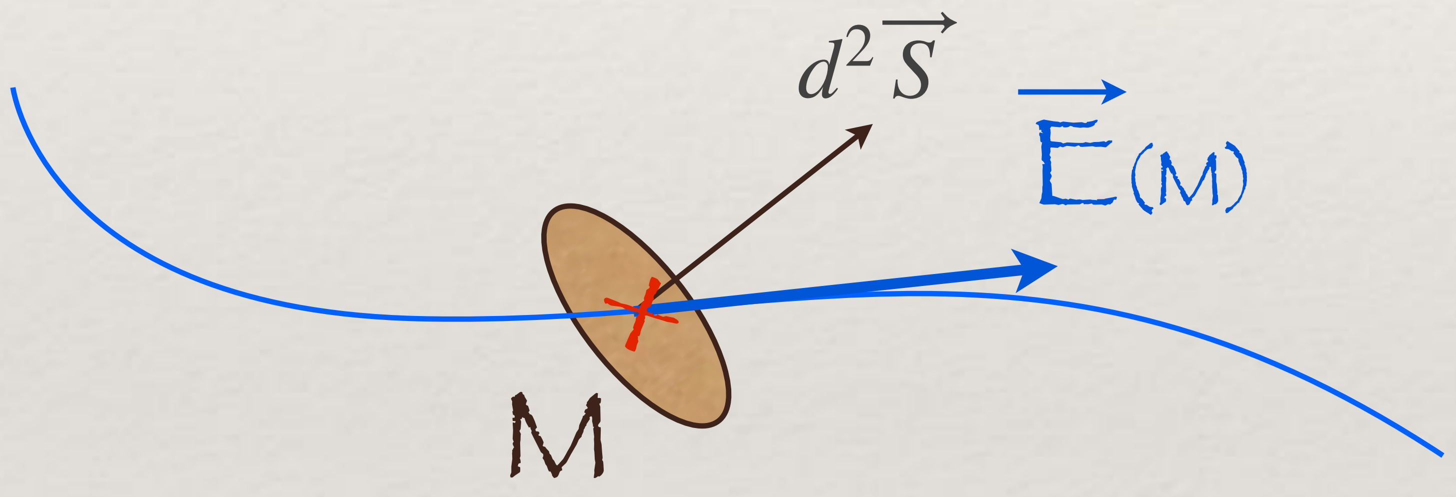
Conséquence :

III - Théorème de Gauss

Objectif :

Avoir un outil puissant pour simplifier les calculs dans les cas présentant un haut degré de symétrie.

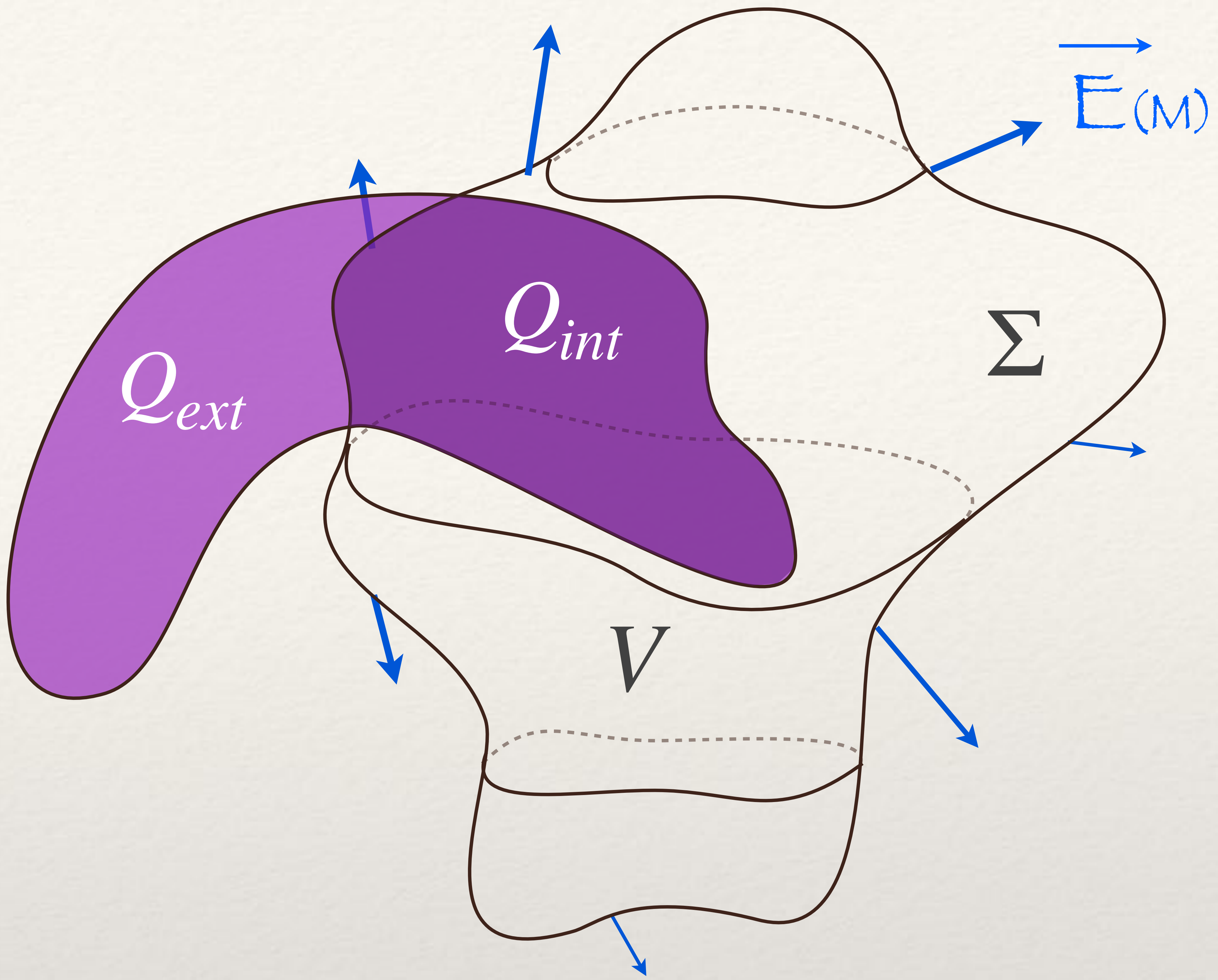
Révision : Notion de **flux élémentaire**



1 - Le Théorème de Gauss

Le flux du champ $\overrightarrow{E}$ sortant d'une surface fermée est égal à la charge contenue au sein de cette surface divisée par ε_0

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$



C'est une conséquence directe du champ en $\dfrac{1}{r^2}$ pour la charge ponctuelle [Démo HP sur polycopié manuscrit].

Idée physique :

- Si une charge positive seule est à l'intérieur ses lignes de champ vont sortir à travers Σ
- Si une charge positive seule est à l'extérieur, une ligne rentrant dans Σ devra ressortir car la surface est fermée

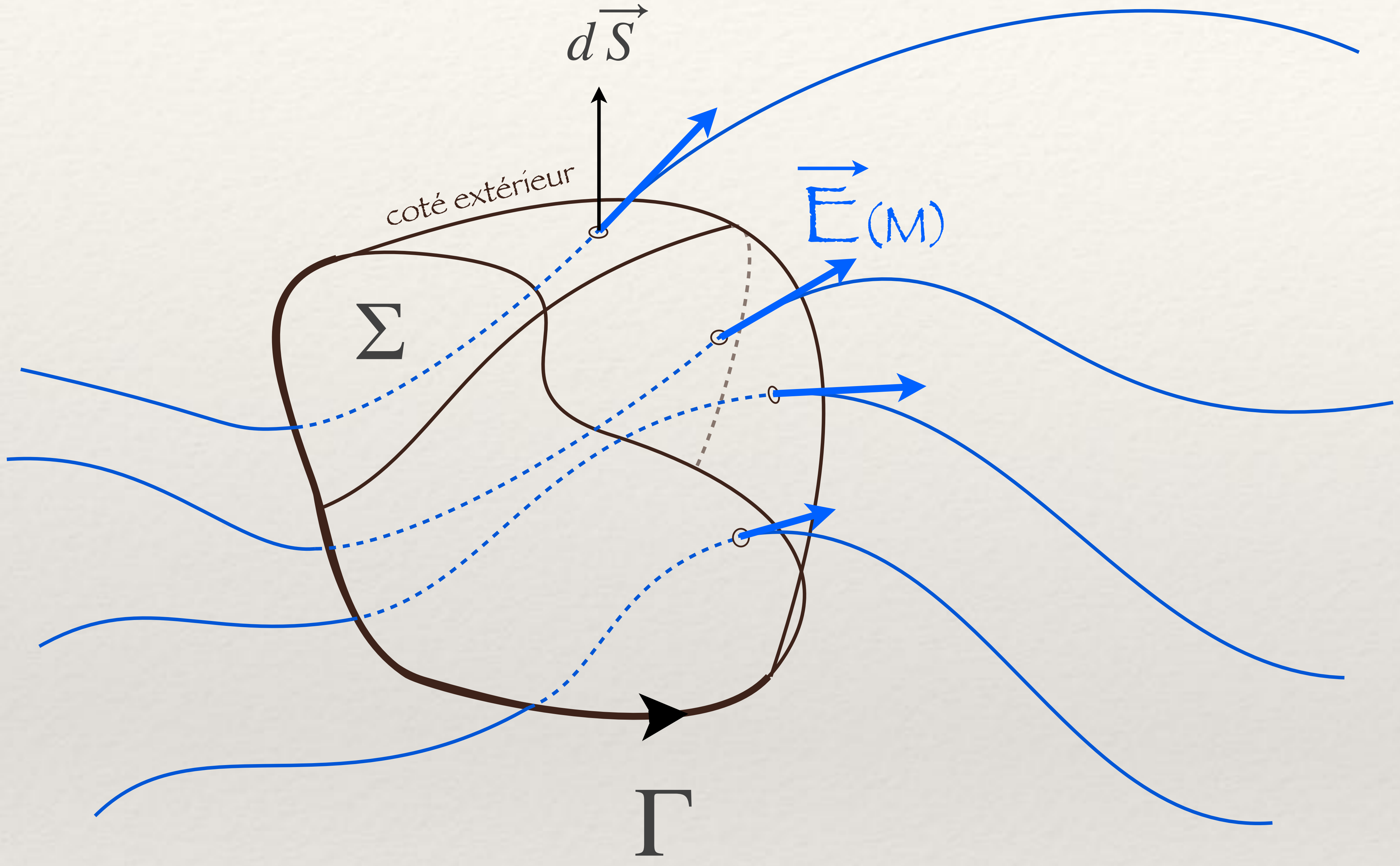
=> Le flux sortant de Σ comptabilise ainsi algébriquement les charges qui sont à l'intérieur de Σ

Maxwell-Gauss $\quad Div(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Ecriture locale)

RQ : L'écriture locale se démontre à partir de la forme intégrale et non l'inverse

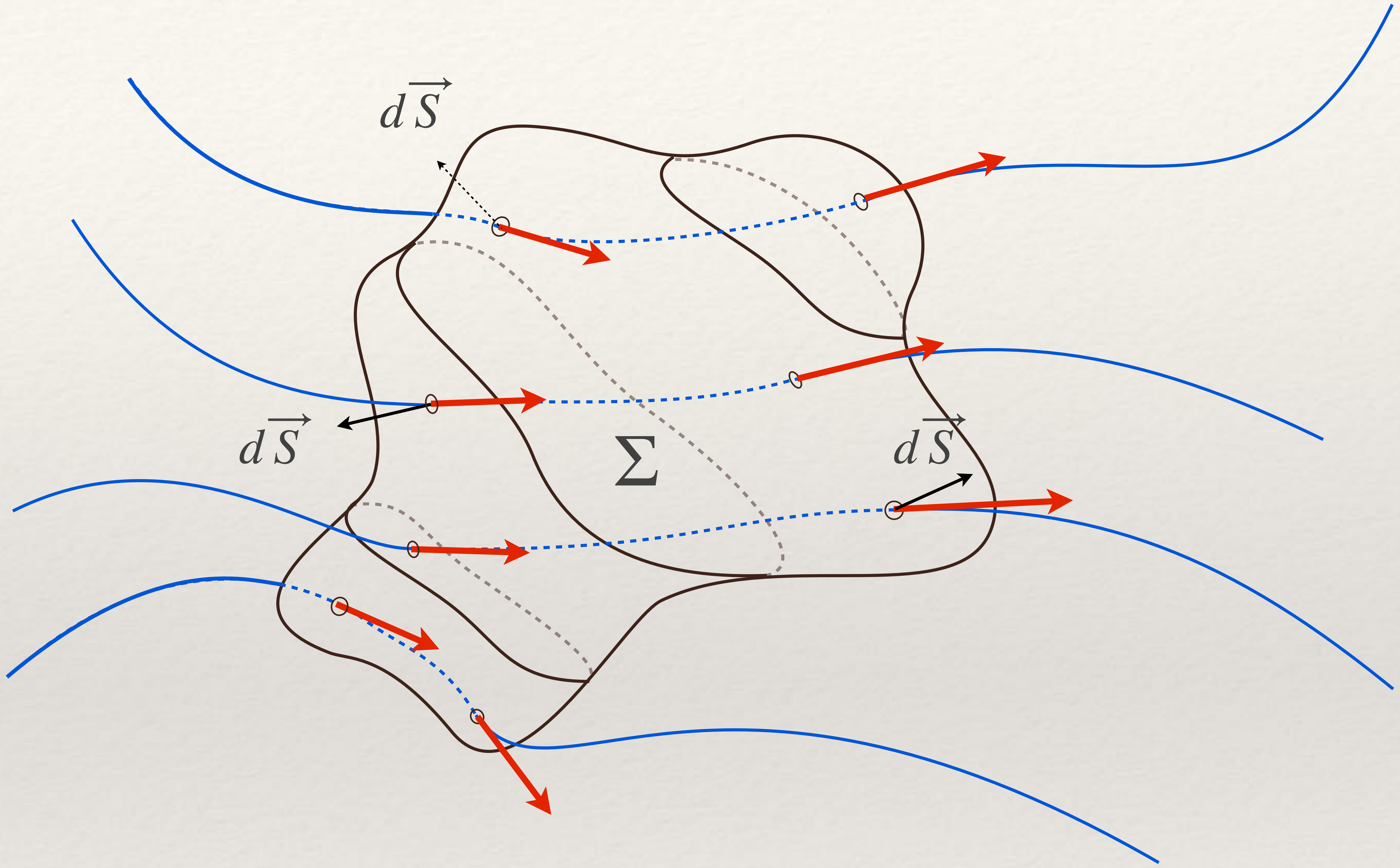
2 - Retour sur la notion de flux

Flux à travers une surface qui s'appuie sur un contour Γ



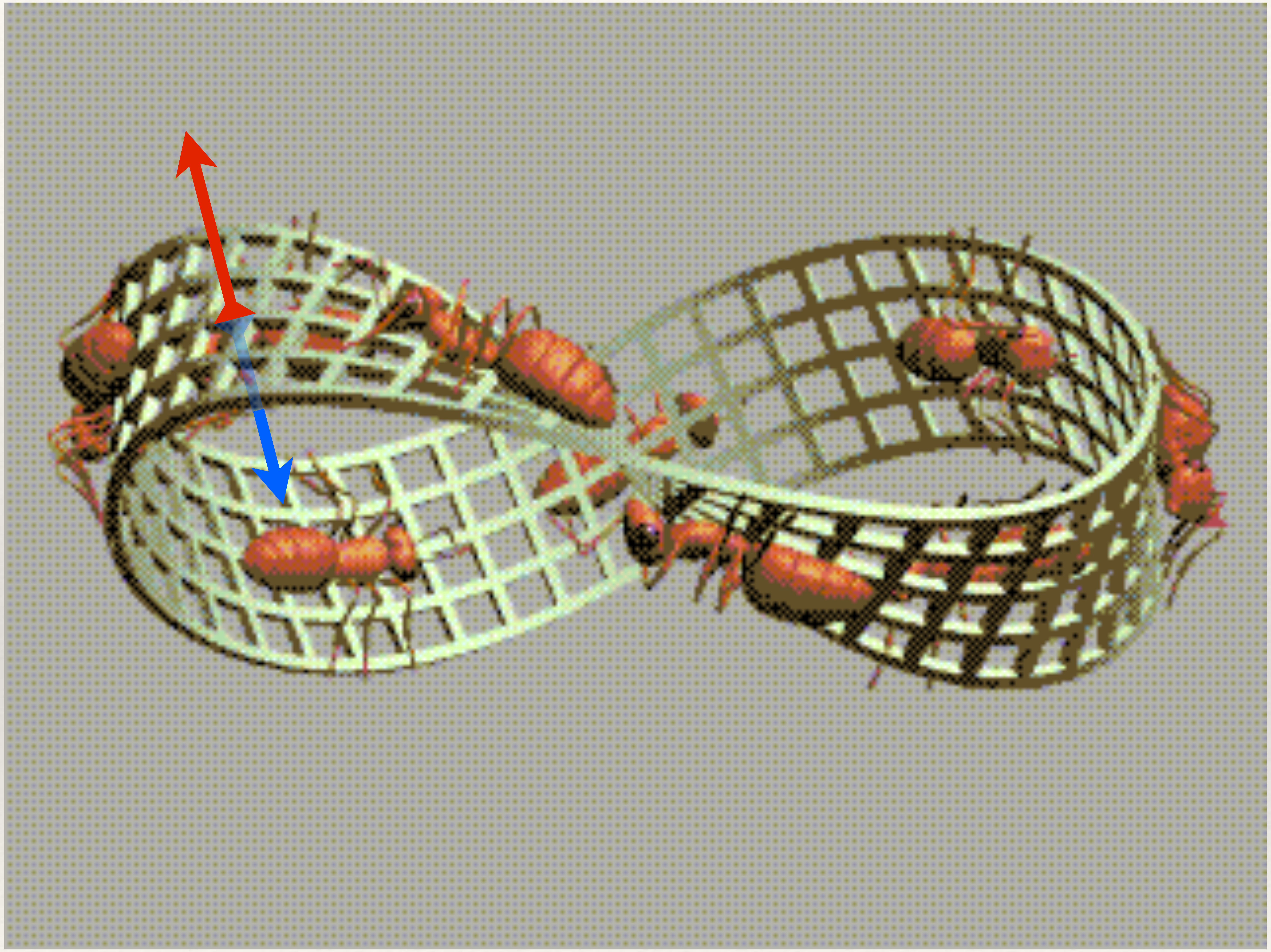
Le flux dépend de Γ et non de la surface elle-même Σ :
- toute ligne qui passe dans Γ va traverser Σ

Flux à travers une surface fermée (sans bord)



Sans charge interne le flux sortant est nul :
- toute ligne qui rentre doit ressortir

Une surface sans bord mais non fermée

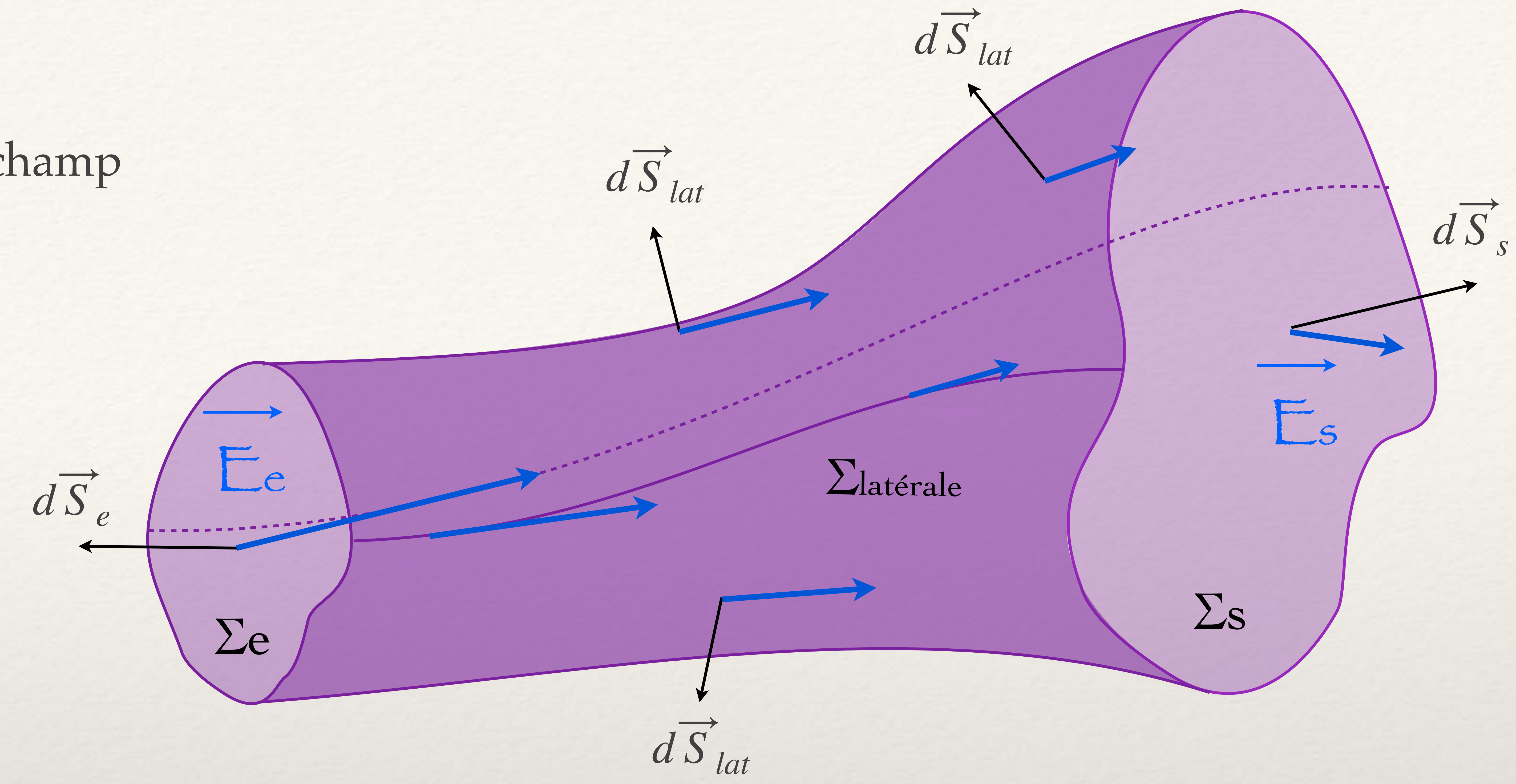


Le ruban de Moebius

3 - Application au tube de champ :

Le champ électrique diminue lorsque les lignes de champ s'écartent et augmente lorsqu'elles se resserrent.

Démo : bilan de flux en l'absence de charge.



4 - Analogie avec la gravitation

Electrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$
q	m
$\vec{E}$	$\vec{\mathcal{G}}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$
$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$-4\pi G$
$V = \frac{E_{pe}}{q}$	$\frac{E_p}{m}$
$\oiint_\Sigma \vec{E}(M).\overrightarrow{d^2S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_\Sigma \vec{\mathcal{G}}(M).\overrightarrow{d^2S} = -4\pi G m_{int}$

Démo :

IV - Application du théorème de Gauss —> Sur copie Double

Le théorème de Gauss est toujours valide, mais **n'a que peu d'intérêt** en pratique **si l'on a pas suffisamment de symétries** pour que le calcul des intégrales soit réalisable.

Son utilisation ne repose donc que sur une bonne utilisation des symétries et invariances

⇒ **Soit la méthode ci-dessous à appliquer de façon systématique à l'oral comme à l'écrit.**

Méthode type :

#parCoeur

1 - Utilisation des symétries pour se ramener à un champ simple :
{ une seule composante, fonction d'une seule variable }

2 - Choisir une surface judicieuse contenant le point M et possédant la même symétrie que la distribution de charge —> Surface de Gauss.

3 - Appliquer le théorème de Gauss

Situations classiques :

- Cylindre infini de rayon R densité de charge volumique uniforme $\rho(M) = \rho_0$
- Boule de rayon R densité de charge volumique uniforme $\rho(M) = \rho_0$
- Plan infini de densité surfacique de charge $\sigma(M) = \sigma_0$

IV - Applications : Partie condensateur

- Condensateur plan
- Densité d'énergie électrostatique
- Effet d'influence
- Câble coaxial
- La terre comme un condensateur sphérique