MESURES ET INCERTITUDES

En travaux pratiques

I - Vocabulaire de base de la métrologie

Grandeur mesurable :

Objet physique qui peut se représenter par une ou plusieurs valeurs scalaires exprimées dans un système d'unités [Ex : température, longueur, vitesse, force]

Mesurage : Action de mesurer [C'est la mise en action d'un protocole précis]

Rq : Cette action perturbe le phénomène étudié

Valeur vraie : Valeur exacte qu'aurait la grandeur si il n'y avait pas d'incertitude

Rq : Notion abstraite => on ne la connaîtra jamais.

Valeur mesurée : Valeur que l'on garde comme résultat de notre mesure

(valeur retenue)

[En précisant son unité]

Grandeur d'influence :

Tout paramètre physique qui peut changer le résultat des mesures

[Ex : la longueur d'une règle/banc d'optique change très sensiblement avec la température]

Erreur de mesure : Différence entre la valeur retenue et la valeur vraie

[on ne la connait pas non plus]

Erreur aléatoire : Erreur dont la cause est imprévisible

[Ex : elle est régie par une distribution, que l'on détermine par des expériences répétées]

Erreur systématique : Erreur prévisible

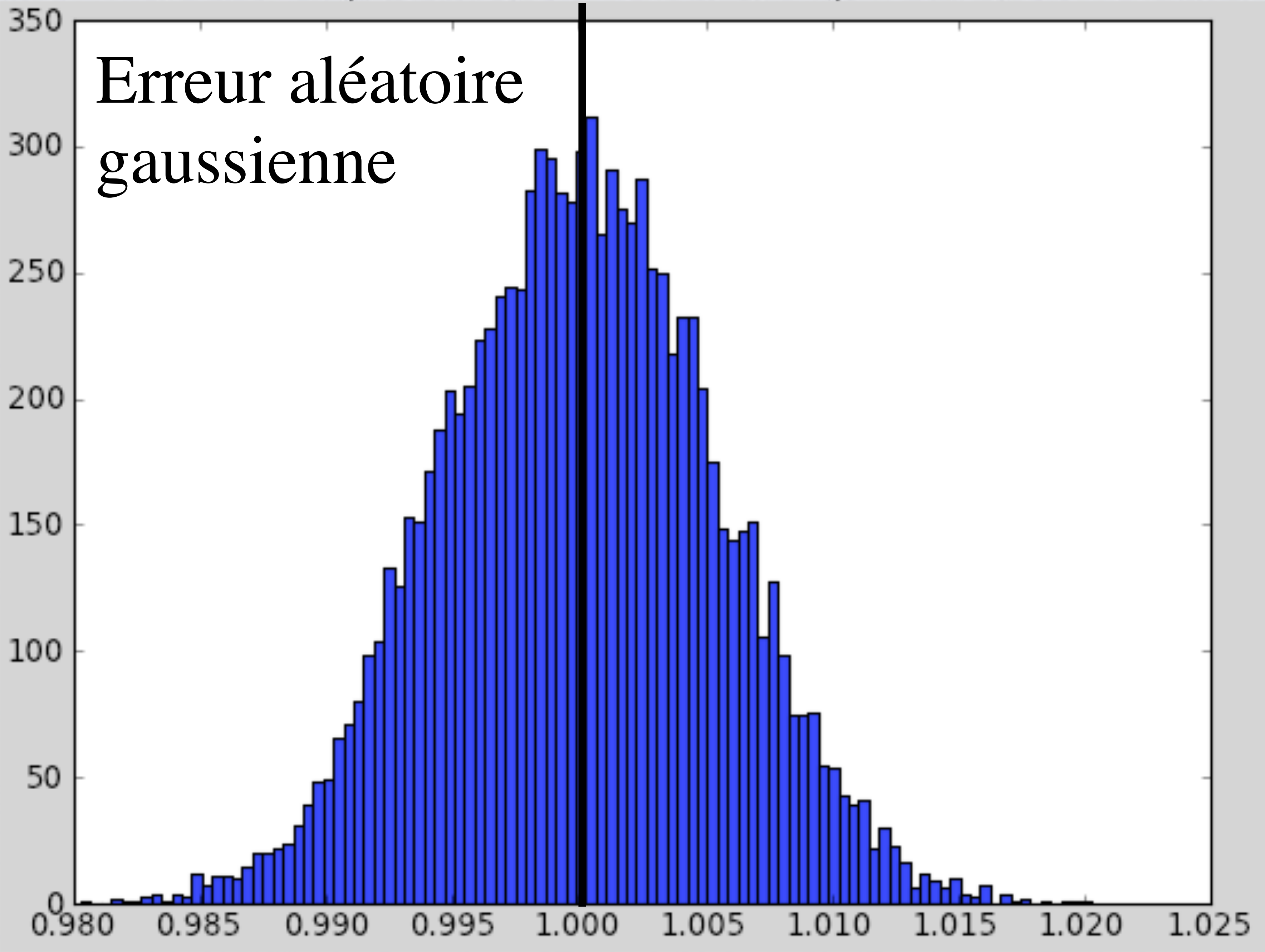
[Ex : mesure toujours trop faible, mesure constante !]

Incertitude : Evaluation théorique de l'erreur de mesure

[On peut **affirmer** que la valeur vraie est statistiquement dans un certain intervalle autour de la valeur retenue]

Exemple illustratif (simulation Python) :

Dans une usine on veut couper 10.000 de tiges d'un mètre par jour.

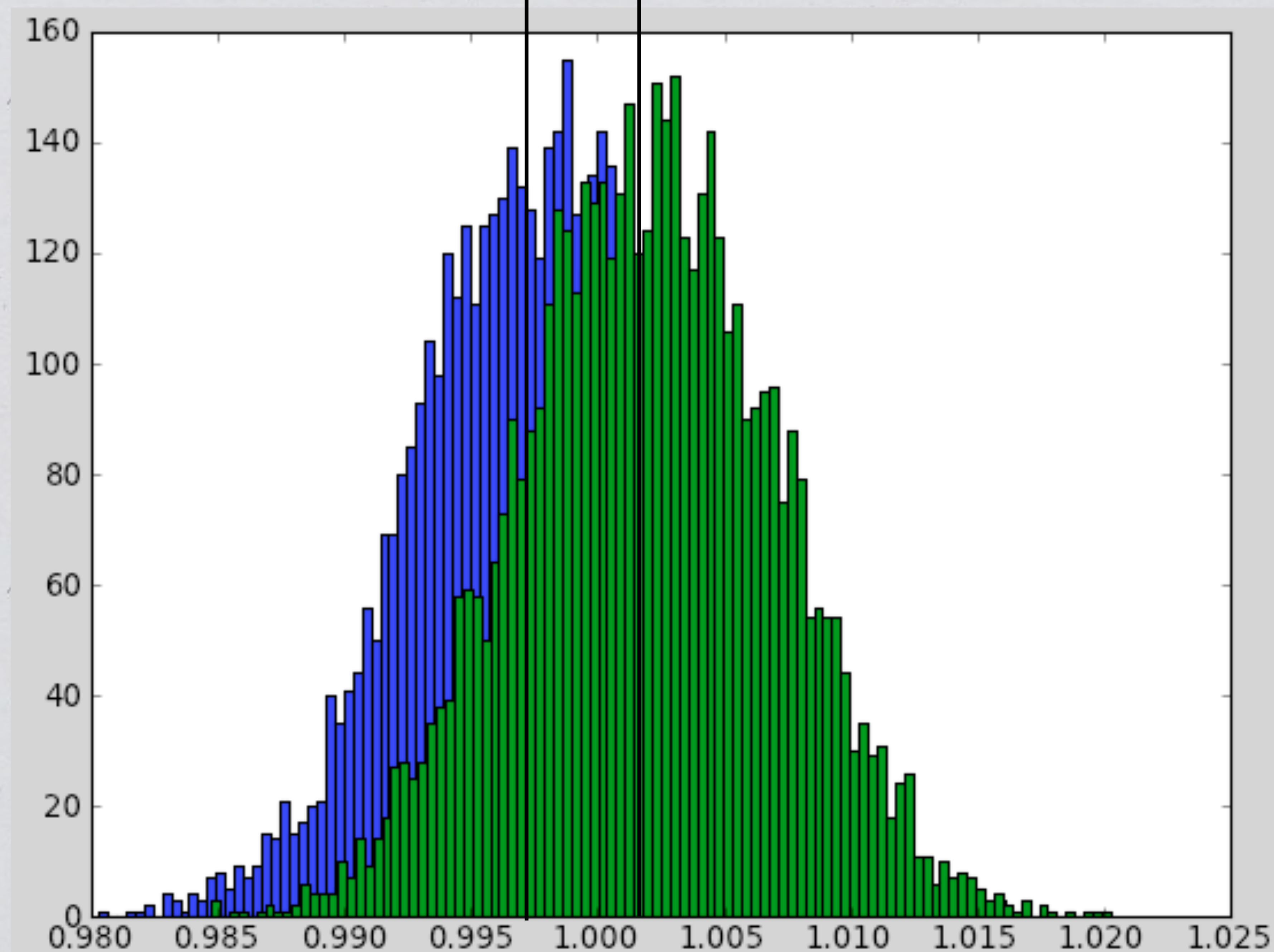


Erreurs systématiques

0.998 1.002

Tiges le matin

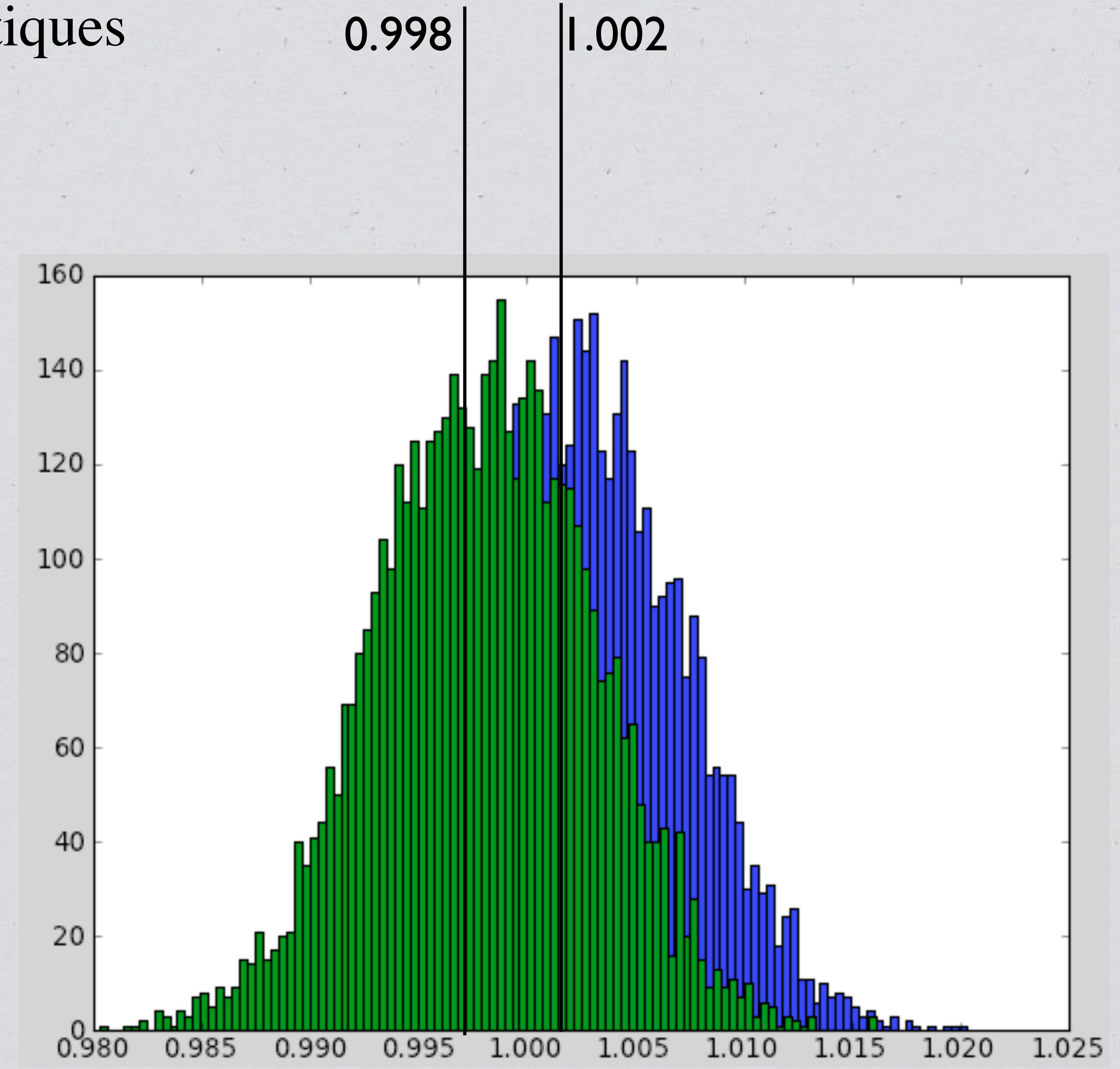
Tiges l’après-midi



Erreurs systématiques

Tiges le matin

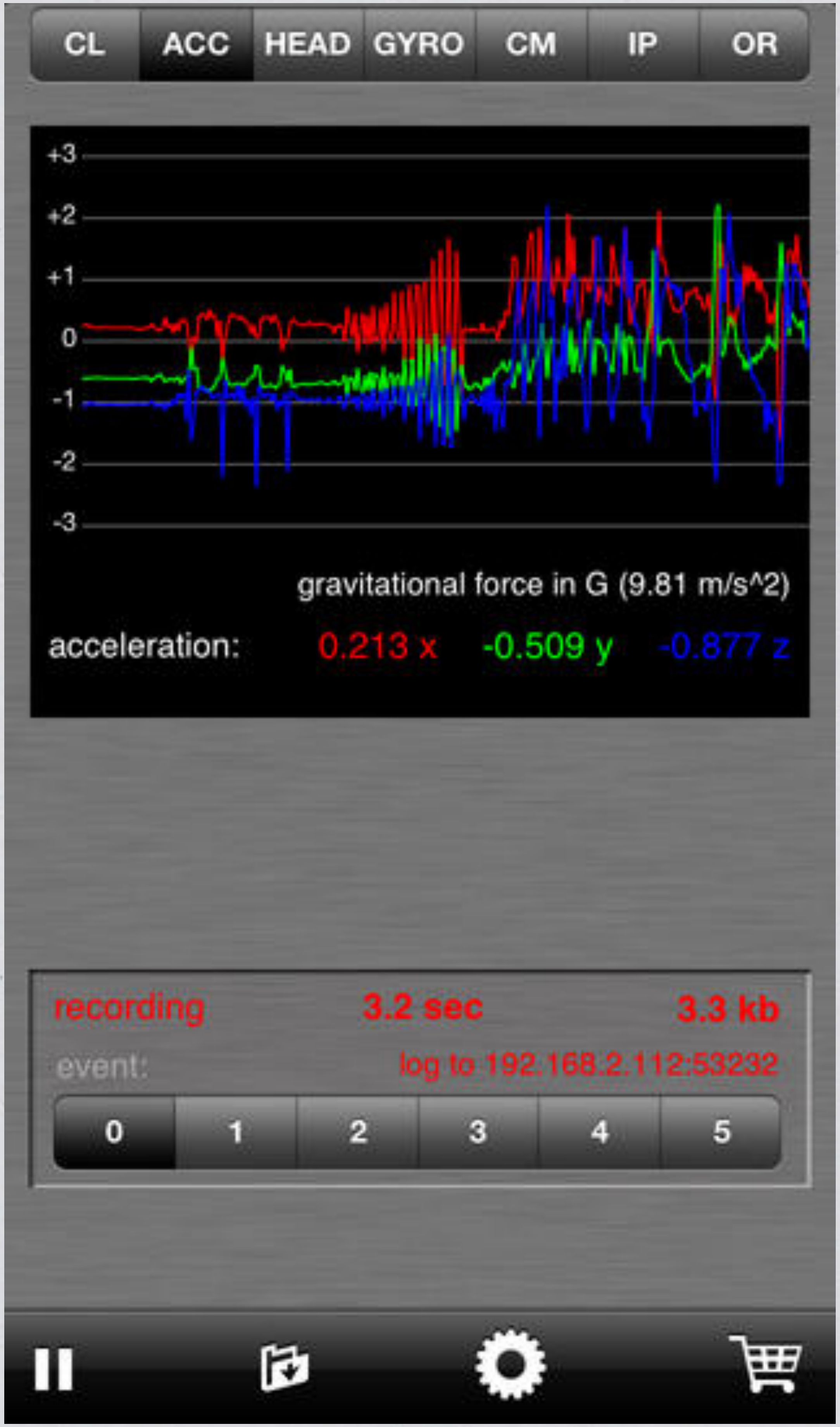
Tiges l'après-midi



Exemple concret :

Mesure de l'accélération de pesanteur par un accéléromètre de smartphone :

[Application SensorLog (ou équivalente)]



Exemple concret :

On mesure N = 9752 fois la pesanteur toutes les 50 ms :

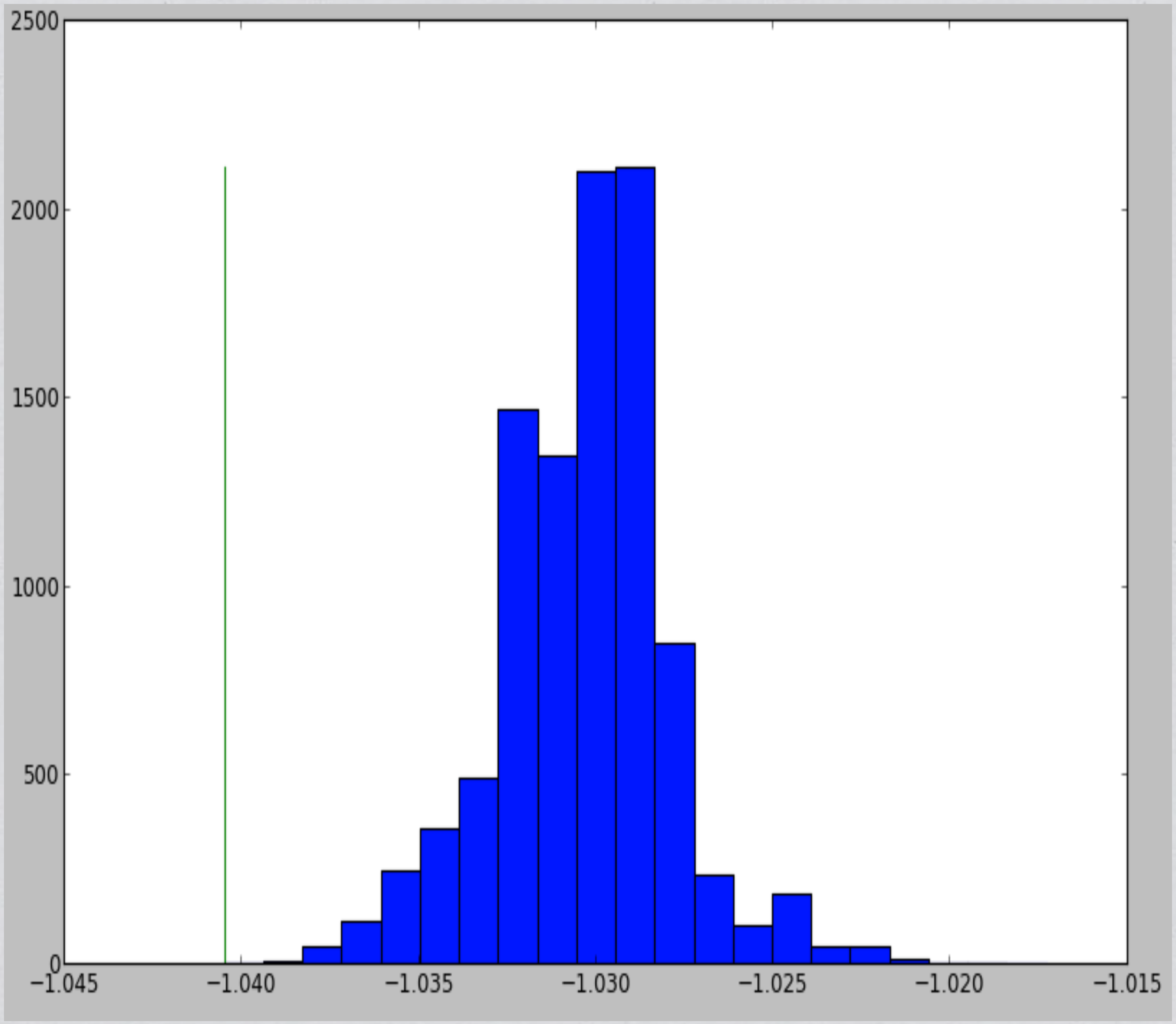
```
>>> len(az)
9752

>>> MinMax(az)
(-1.040222, -1.018631)
```

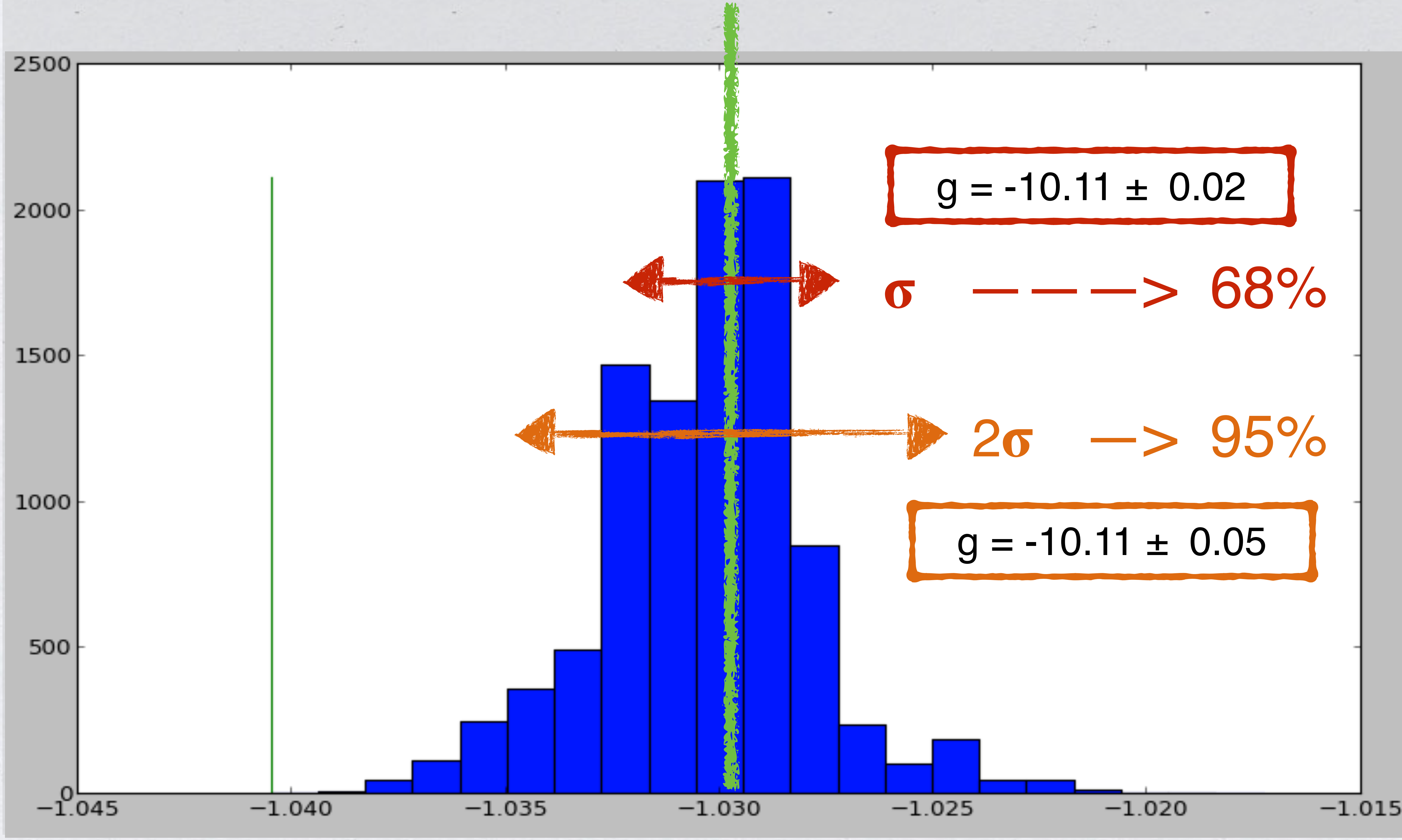
```
>>> mean(az)
-1.0303344826702154

>>> Sigma(az)
0.0025319933684980092
```

$g = -1.030 \pm 0.003$



g = -10.10758127.. ± 0.0248288..



Pourquoi la valeur n’est-elle pas compatible avec g = 9.81 à Paris ?

(Rq : mesures faites en Bretagne…..)

Pourquoi la valeur n'est-elle pas compatible avec g = 9.81 à Paris ?

[La valeur vraie doit être très proche de 9.81 ms^{-2}]

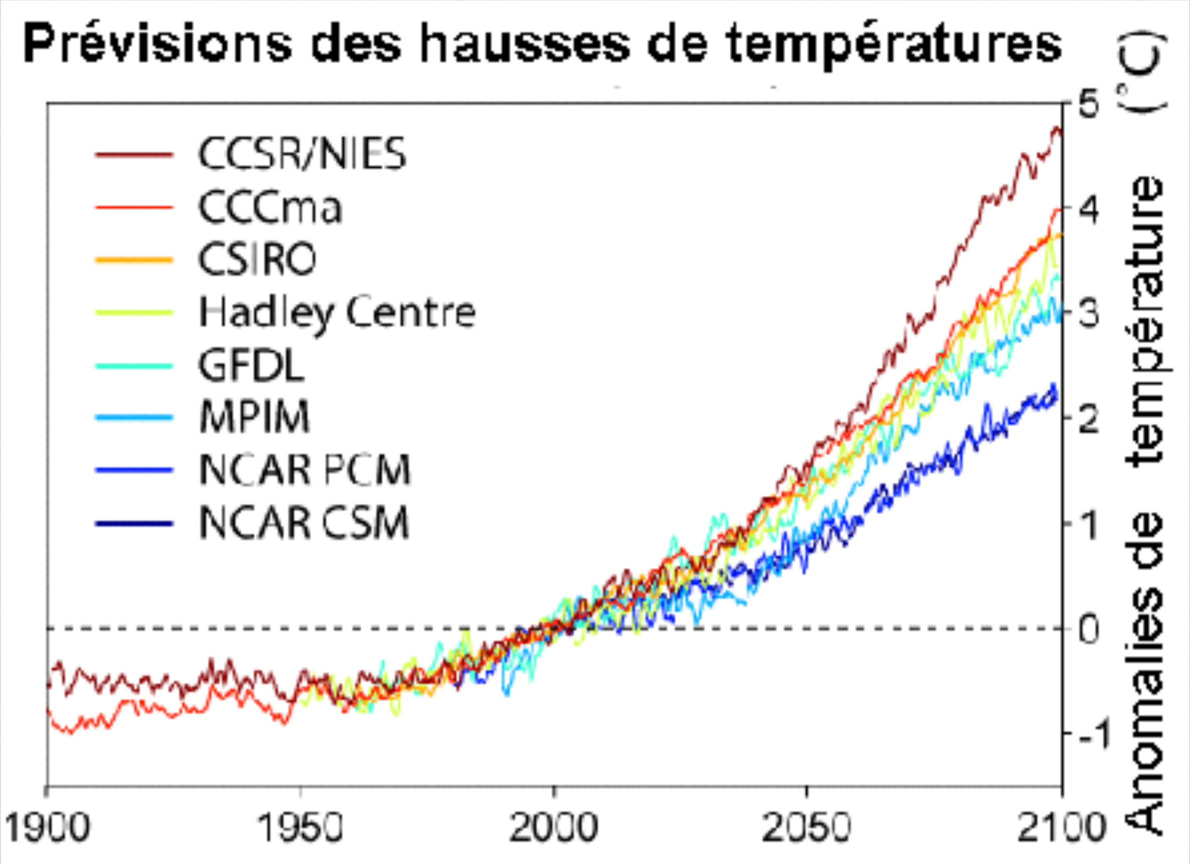
=> <u>Il y a des erreurs systématiques :</u>

- capteur pas parfaitement plat (==> g plus faible !!!)
- biais de mesure dû à la température du capteur.
- réglage des éléments périphériques au capteur (condensateur)
- autres pb. de réglages interne.
  (cf Datasheet)

Exercice :

« On ne sait déjà pas prévoir s'il va pleuvoir demain à Cherbourg à 15h00 …

….. alors comment pourrait-on prévoir que la température va augmenter de 1 à 6° dans un siècle ?? »



Global Warming Predictions fr

- Commenter. Quelle est la différence entre météorologie et climatologie ?
- En déduire <u>schématiquement</u> les conséquences en matière de prévision. (sur la base d'exemples)
- Les décideurs peuvent-ils se fier à ces affirmations ?

(Proposer des arguments simples de natures statistiques ; ne pas rentrer dans les détails de ces recherches)

II - Arrondis & Chiffres significatifs

On donnera toujours le résultat sous la forme :

$$\boxed{x = \text{valeur retenue} \pm \text{incertitude}}$$

Une valeur retenue n'est pas la valeur vraie (inaccessible à l'expérimentateur)

=> **sans son incertitude elle ne sert à rien !**

$x = 1.234$

« +/- j'en sait rien »

$x = \cancel{1.234} \pm 5$

$$\Downarrow$$

$$-4 < x < 6$$

Le nombre de chiffres significatifs résulte de deux contraintes antagonistes :

- Donner un encadrement qui soit «exact»
- Obtenir le plus petit possible pour valoriser notre mesure

Chiffres incertains → $0.734 < x < 1.734$

$$x = 1.234 \pm 0.5$$ → Incertitude au premier chiffre après la virgule

=> on garde un chiffres après la virgule.

$$x = 1.234 \xrightarrow{\text{arrondi}} x = 1.2$$

Soit $$\boxed{x = 1.2 \pm 0.5}$$

<u>Méthode :</u>

On arrondit la valeur retenue avec autant de décimale(s) que l'incertitude

Chiffres incertains $1.187 < x < 1.287$

$$x = \underline{1.2\overline{37}} \pm \underline{0.05}$$

Incertitude au deuxième chiffre après la virgule

=> on garde deux chiffres après la virgule.

$$x = 1.237 \xrightarrow{\text{arrondi}} x = 1.24$$

Soit $\boxed{x = 1.24 \pm 0.05}$

A vous de jouer :

1- La calculatrice nous donne :

Valeur : $x = 24.386$

incertitude : $\Delta x = 0.0273$

2 - Une balance électronique indique le poids : 63.534 kg

Que pensez vous de de l'affichage de cette information ?

Erreur relative :

Soit x une valeur retenue et Δx son incertitude, on obtient l'erreur relative par la formule :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$$

(On multiplie par 100 pour l'avoir en pour-cents %)

Opérations de base

<u>On retiendra les «règles d’usage» suivantes :</u>

Le résultat d’une addition ou d’une soustraction <u>a autant de décimales</u> que la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Le résultat d'une multiplication ou d'une division a autant de <u>chiffres significatifs</u> que la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Dans tous les autres cas, c-à-d toute formule combinant les opérations [+, -, *, /] l’incertitude nécessite un calcul théorique. [Cf calcul des incertitudes]

Lecture d'un afficheur digital :

La précision est celle du dernier chiffre affiché :

1, 82 V ⟶ 1, 82 +/- 0.01 V

-54, 3 V ⟶ -54,3 +/- 0.1 V

Lecture d'un énoncé :

La précision est celle du dernier chiffre écrit : [idem]

200 cm ⟶ 200 +/- 1 cm

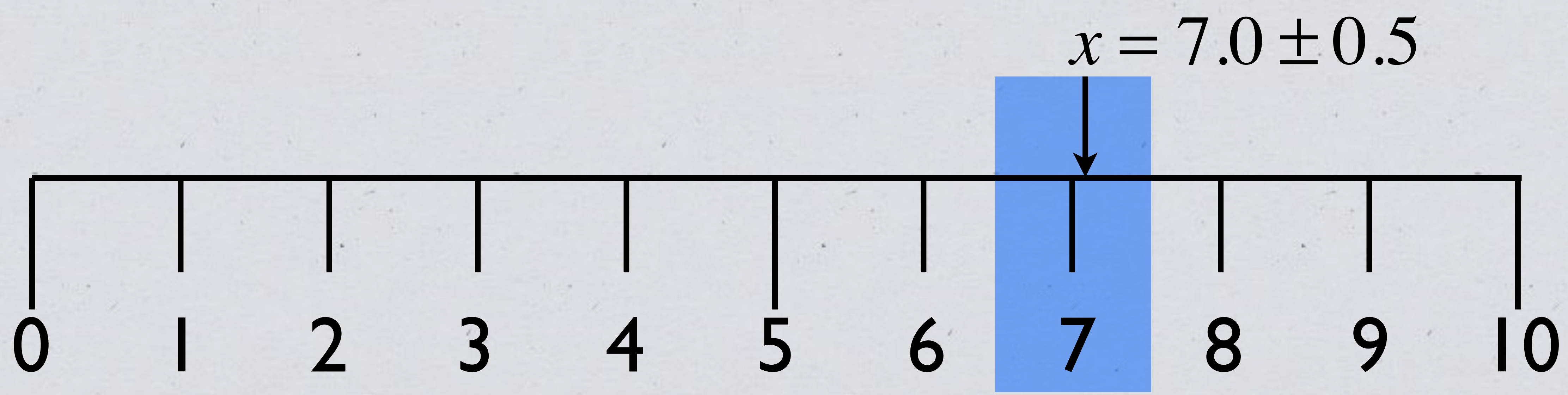
2E2 cm ⟶ 2E2 +/- 1E2 cm

2 m ⟶ 2 +/- 1 m

0,00040 m ⟶ 4,0E-4 +/- 0,1E-4 m

non significatifs

Lecture d'une graduation : La précision est de +/- une demi-graduation

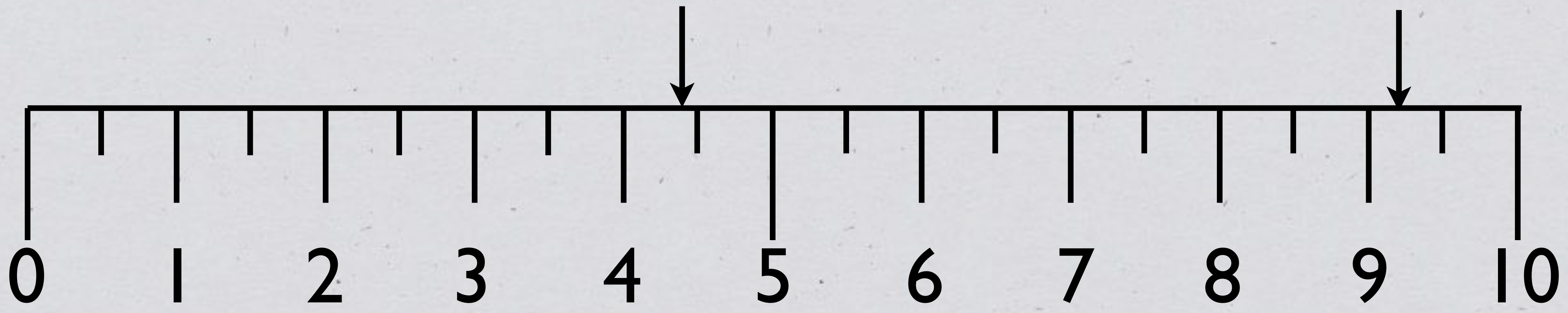


Situation de mesure considérée identique :

(Zone bleue => même information)

RQ : notre instrument n'a pas d' «affichage» 7.1 7.2 ..... 7.5 etc => c'est 7.0000 ou 8.0000 !!!

A vous de jouer :



Applications

Mesures à la règle

Mesures au Vernier

1 - Mesure sur le banc d’optique :

2 - Présentation du Vernier :

Cf - Appliquette

3 - Mesure au vernier : calcul d’un volume

III - Evaluation de l'incertitude de mesure

Elle est souvent plus difficile que l'évaluation de la valeur retenue elle-même.
Mais la valeur retenue ne veut rien dire sans son incertitude.

On distingue deux types de situations expérimentales :

Incertitude de Type A : Une détermination statistique est possible

ex : n-mesures successives et indépendantes !

Incertitude de Type B : Détermination statistique impossible (mesure unique)

ex : le système / les cond° exp. évoluent dans le temps

Incertitude de Type A

Soient n observations m_i indépendantes régies par une loi de distribution inconnue. La théorie statistique nous donne les caractéristiques suivantes :

Moyenne :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{n}\sum_i x_i}$$

Valeur retenue pour la variable aléatoire : $\boxed{x_e = \frac{1}{n}\sum_i x_i}$

Ecart-type :
(déviation std.)

Ecart-type d'échantillon :
(n variables aléatoires xi)

$$\sigma_{\exp} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n-1}}$$

Ecart-type :
(de la distribution inconnue associée à xe)

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_{\exp}}{\sqrt{n}}}$$

(Théorème central limite)

(porte sur la valeur moyenne retenue)

Exemple :

Essai	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5
m (g)	22,85	22,87	22,81	22,79	22,84

$$\mu = \frac{22.85 + 22.87 + 22.81 + 22.79 + 22.84}{5} = 22.832 \ g$$

$$\sigma_{\exp} = \sqrt{\frac{(22.85-22.832)^2 + (22.87-22.832)^2 + (22.81-22.832)^2 + (22.79-22.832)^2 + (22.84-22.832)^2}{5-1}}$$

$$\sigma_{\exp} = 0.033541 \ g$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\exp}}{\sqrt{5}} = \frac{0.033541}{\sqrt{5}} = 0.015 \ g$$

On notera finalement :

$$\boxed{m = 22.83 \pm 0.02 g}$$

Exemple :

Essai	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5
m (g)	22,85	22,87	22,81	22,79	22,84

L'incertitude ne suffit pas elle-même a obtenir une marge de confiance :

Celle-ci est donnée par la table des coefficients de Student pour N mesures et x % de confiance :

exemple ici : t(5, 95%) = 2.78 et t(5, 99.9%) = 4.6

$$m = 22.83 \pm 0.038g \qquad 2.78\sigma \Rightarrow avec\ 95\%\ de\ confiance$$

$$m = 22.8 \pm 0.103g \qquad 4.6\sigma \Rightarrow avec\ 99.9\%\ de\ confiance$$

Lorsque N > 30 on peut raisonnablement considérer que la distribution est gaussienne :

$1\sigma \Rightarrow avec\ 68.3\%\ de\ confiance$ $\quad 2\sigma \Rightarrow avec\ 95.4\%\ de\ confiance$ $\quad 3\sigma \Rightarrow avec\ 99.7\%\ de\ confiance$

Incertitude de Type B

L'incertitude résulte du processus de mesure réalisé par l'appareil de mesure lui-même : différents cas sont possibles

1 - l'incertitude est fournie par le constructeur (assez rare).

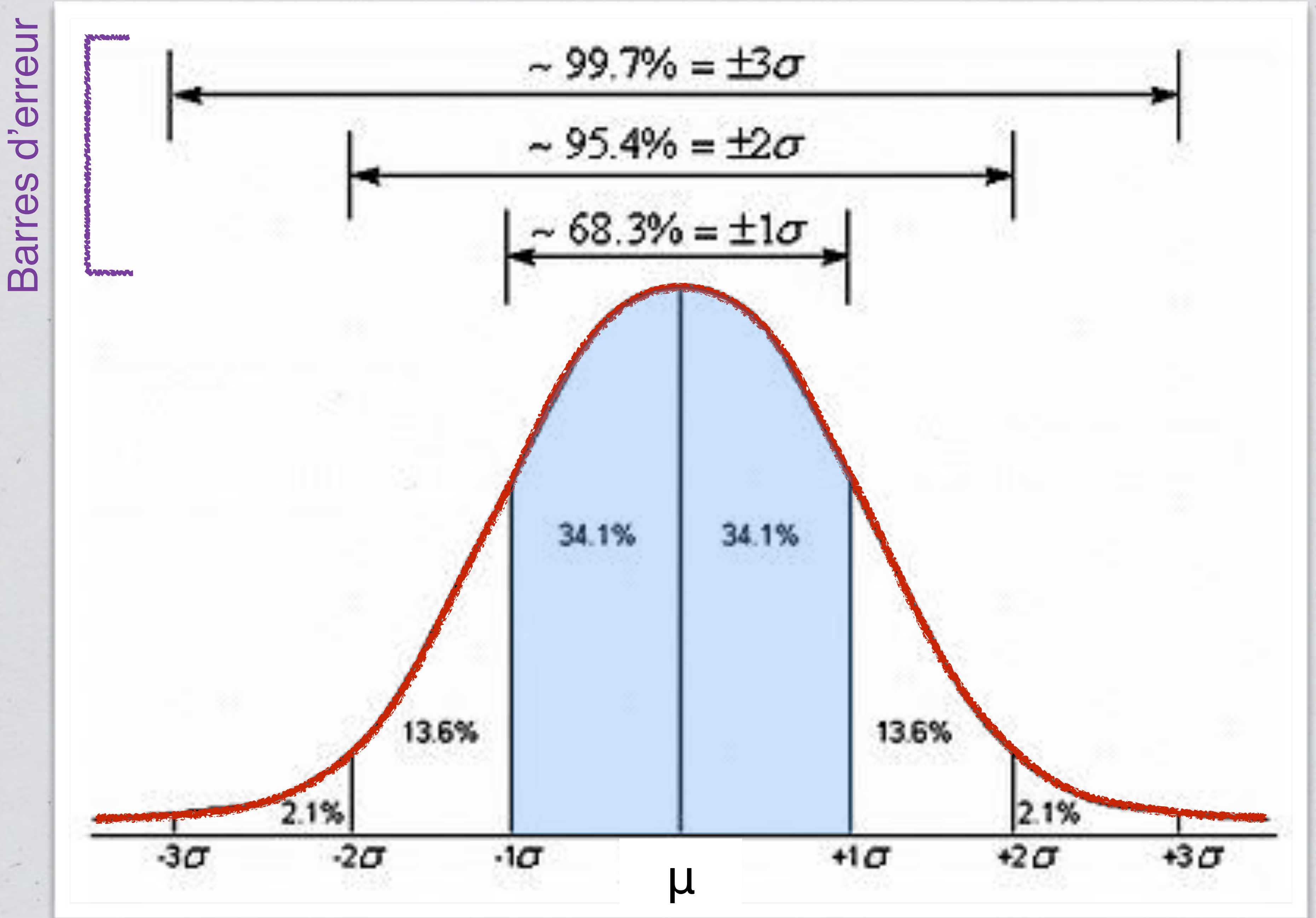
On applique alors la consigne
(cf documentation)

2 - Le plus souvent on peut supposer que **la distribution est une loi normale**

C'est le cas lorsque l'incertitude est causée par :
- une multitudes d'effets indépendants
- et faibles individuellement

Propriété de la distribution normale

On retiendra les valeurs pour les niveaux de confiance suivants :



On parle alors d'incertitudes élargies (c-à-d incertitude à 2σ ou à 3σ etc…)

Exemple : mesures de poids avec N > 30 avec :

$$\mu = 22.832 \ \ g \qquad\qquad \sigma = 0.015 \ \ g$$

$$m = 22.83 \pm 0.015 g \qquad 1\sigma \Rightarrow avec \ 68.3\% \ de \ confiance$$

$$m = 22.83 \pm 0.03 g \qquad 2\sigma \Rightarrow avec \ 95.4\% \ de \ confiance$$

$$m = 22.83 \pm 0.045 g \qquad 3\sigma \Rightarrow avec \ 99.7\% \ de \ confiance$$

3 - En l’absence d’information on applique une règle d’usage [Rule of thumb]

Recommandée par l’AFNOR !!!

Idée à retenir :

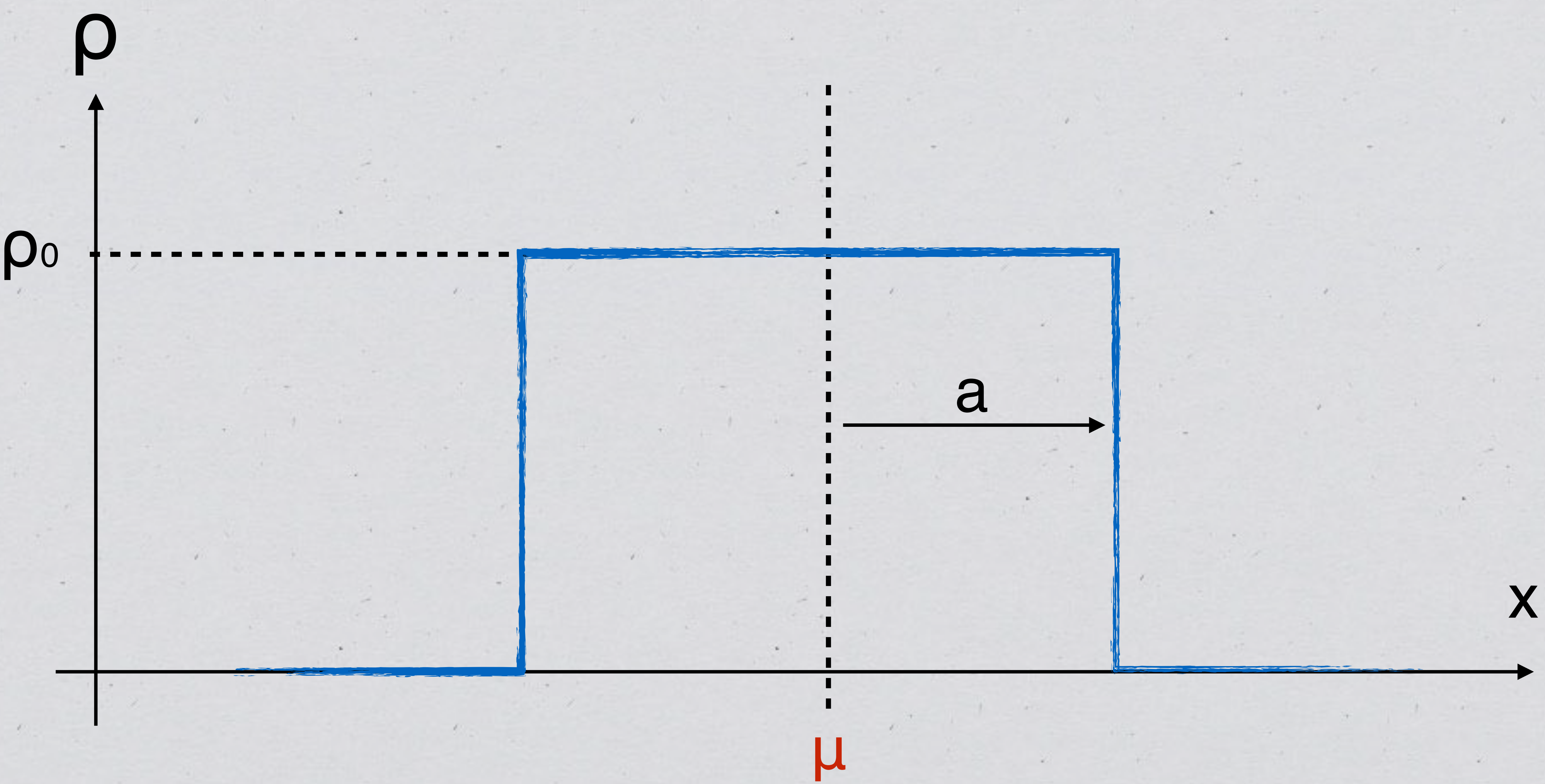
On considère que l’on a affaire a une distribution de probabilité uniforme de largeur égale à une graduation : même probabilité d’être n’importe où entre les deux graduations successives.

Règle générale :

On peut appliquer la même règle d’usage pour un grand nombre d’instruments :

- Règle, éprouvette graduée, thermomètre mercure, appareil analogique à aiguille
  => tout ce qui a une lecture sur une graduation
- Afficheur digital (multimètre, chronomètre, voltmètre, etc…)
- Plage de mise au point entre deux valeurs retenues.

Loi de distribution : fonction « porte »



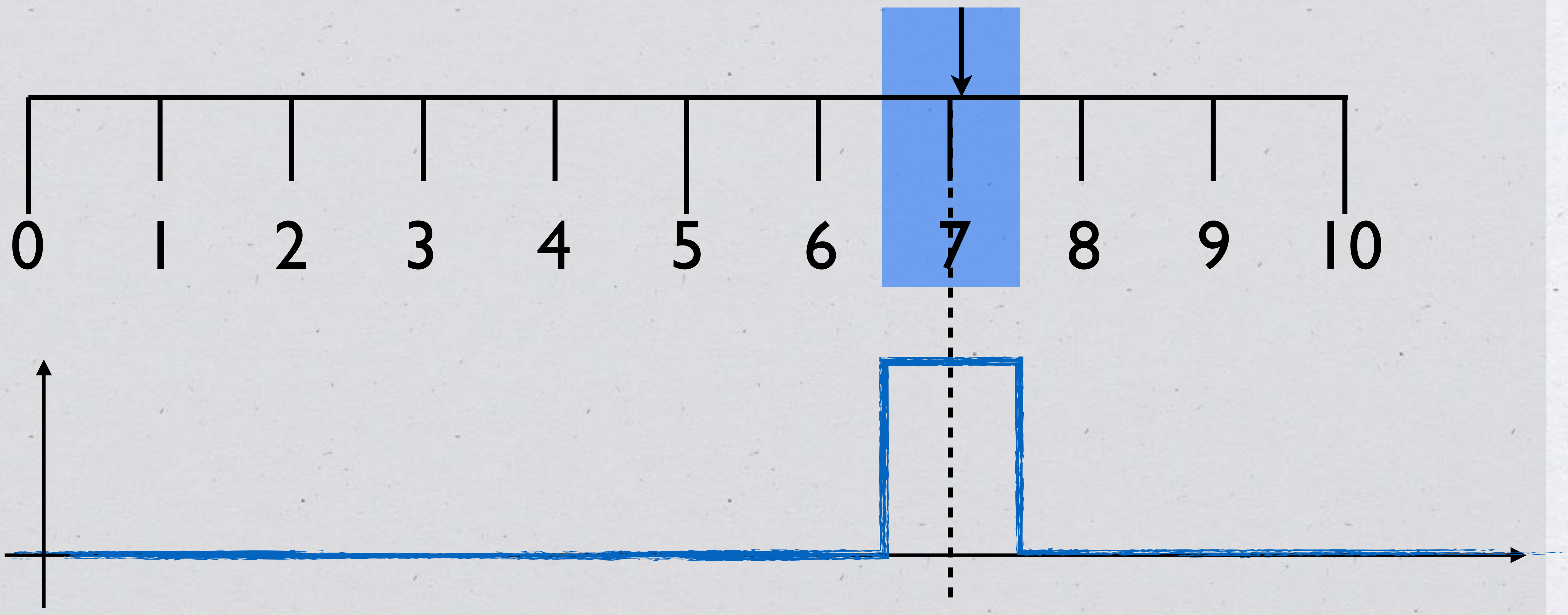
$\rho_0 =$

ATTENTION à ne pas confondre
largeur : 2a et demi-largeur : a

Exemple :

Evaluation à 1/2 graduation près :

$$\boxed{x = 7.0 \pm 0.5}$$



Evaluation à 1σ près :

$$\Delta x = \frac{0.5}{\sqrt{3}} = 0.289$$

$$\boxed{x = 7.0 \pm 0.3}$$ ~ 57.7%

Incertitudes combinées

Plusieurs paramètres peuvent être impliqués dans le calcul d'incertitude :
Lorsque les deux types (A et B) amènes des incertitudes de niveaux comparables,

[c-à-d que l'on ne peut pas négliger l'une devant l'autre]

On est amené à cumuler les variances, soit :

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}}$$

Table des coefficients de Student

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
t95%	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,13	2,09	2,06	2,04
t99%	63.7	9,93	5,84	4,6	4,03	3,71	3,5	3,36	3.25	2,95	2,86	2,79	2,76

IV - Régression linéaire : approche graphique

On considère deux séries de mesures indépendantes : xi et yi,
mais qui ne sont pas indépendantes entre elles :

On envisage que les valeurs yi soient obtenues par une relation linéaire, de type yi = a.xi + b à partir des valeurs xi.

Cette relation est en général suggérée par la théorie :

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f'} \longrightarrow y = v - x$$

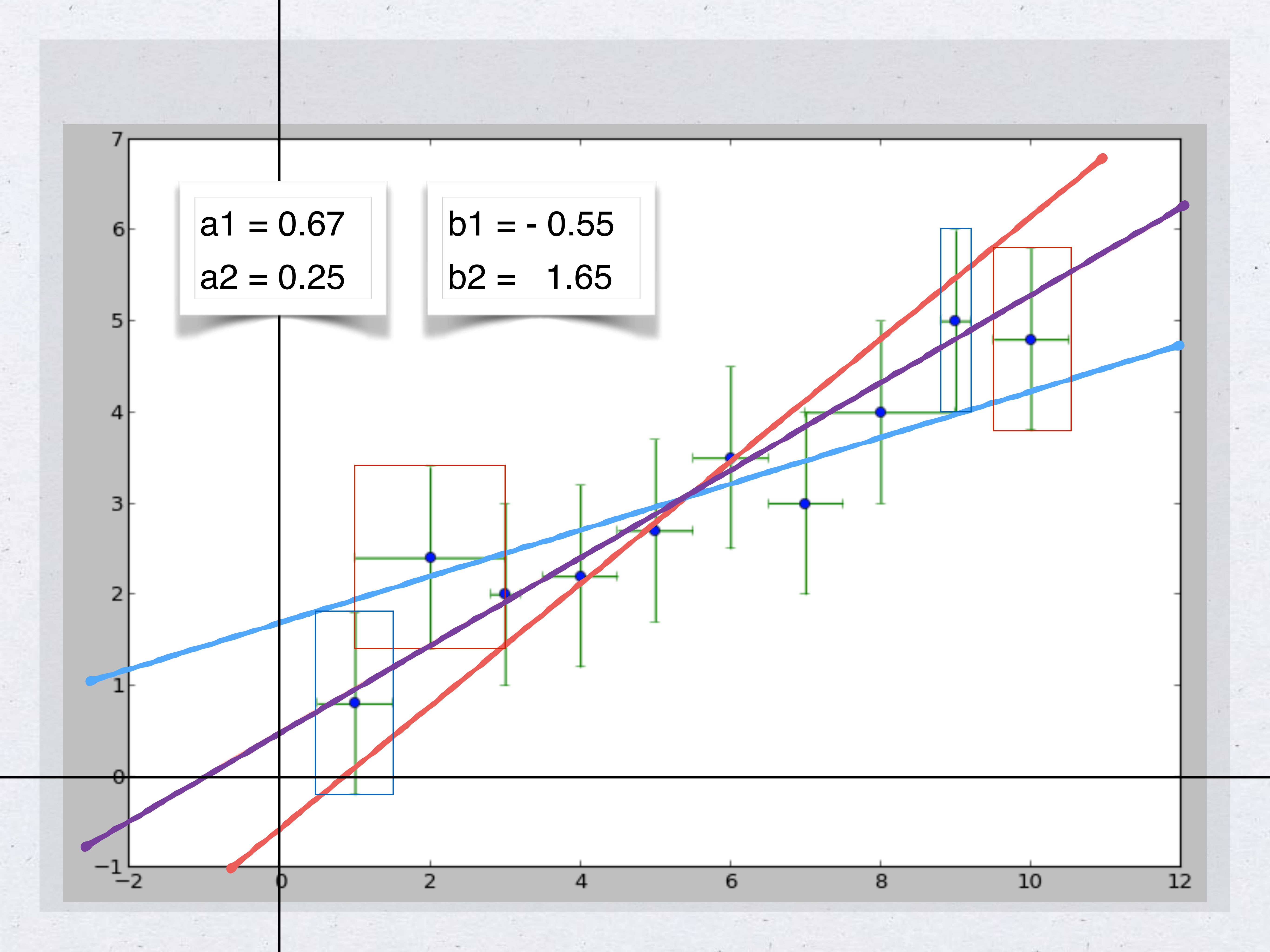
$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \longrightarrow y = B + A\ x$$

Soient les deux séries de mesures suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.8	2.4	2.0	2.2	2.7	3.5	3.0	4.0	5.0	4.8
Δx	0.5	1.0	.02	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	0.2	0.5
Δy	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Δx et Δy sont les écart-types associés à x et y respectivement :
le rectangle représente ainsi l'incertitude sur le point à 1 sigma.

=> Pour chaque point de mesure on peut ainsi représenter l'incertitude à l'aide d'un rectangle de base Δx et de hauteur Δy.


a1 = 0.67
a2 = 0.25
b1 = - 0.55
b2 = 1.65
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
0
2
4
6
8
10
12

*** Méthode de construction ***

La droite de régression linéaire est obtenue par la procédure suivante :

1 - On trace la droite de pente maximale passant à travers tous les rectangles.
On en calcule la pente Pmax = a1 et l'ordonnée à l'origine b1.

2 - On trace la droite de pente minimale passant à travers tous les rectangles.
On en calcule la pente Pmin = a2 et l'ordonnée à l'origine b2.

3 - La droite de régression linéaire est la moyenne de ces deux droite.
Sa pente vaut : $a = [a1 + a2] / 2$ son ordonnée $b = [b1 + b2] / 2$.

Rq : de même $\Delta a = | a1 - a2 | / 2$ et $\Delta b = | b1 - b2 | / 2$

<u>Mesures :</u>

a = 0.4583 +/- 0.208

b = 0.55 +/- 1.1

<u>Analyse numérique :</u>

a = 0.48 +/- 0.04

b = 0.5 +/- 0.3