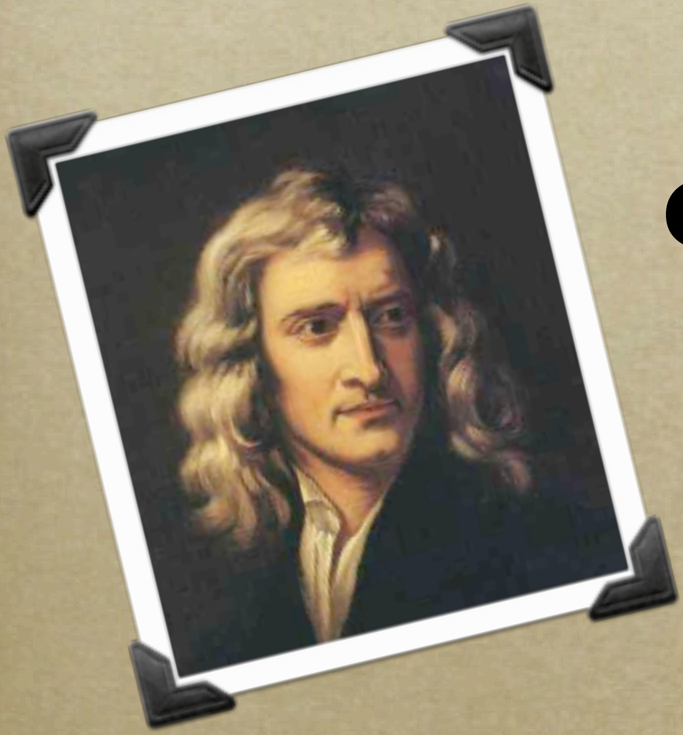
Calcul différentiel intégral

Les notations de la physique

Calcul différentiel



C’est le langage de la physique

Il a été inventé par Leibniz et Newton pour la mécanique, mais il est toujours utilisé dans tous les domaines de la physique moderne.

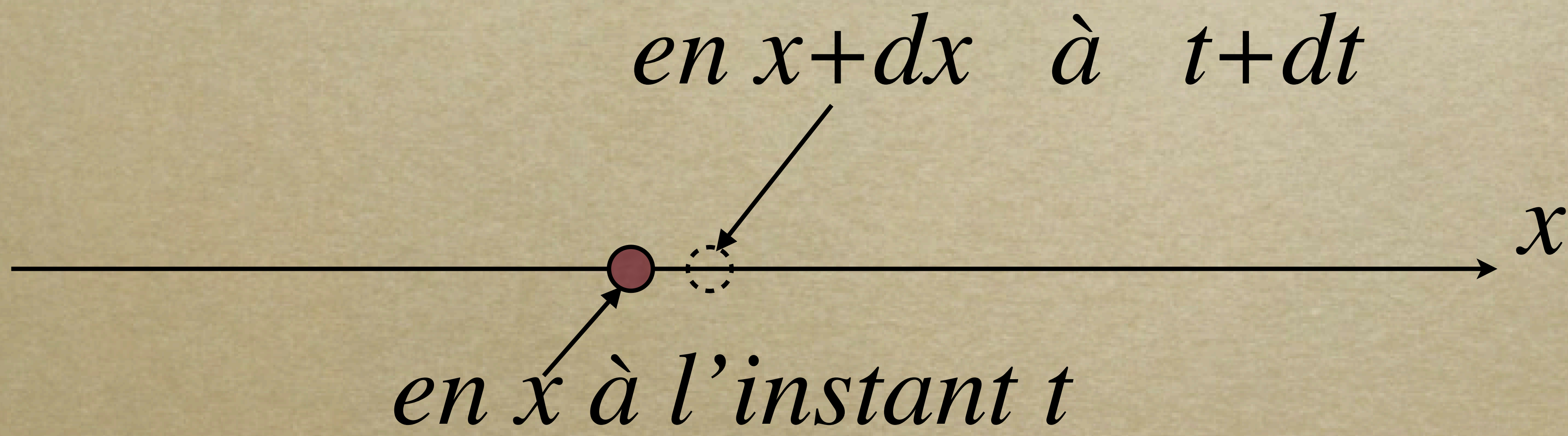
Tout est construit sur la notion d’élément différentiel, une variation infiniment petite d’une variable ou d’une fonction.

I - Propriétés de base des éléments différentiels

(dx, dt, etc)

Exemple :

Pendant un temps infiniment petit dt un point se déplace d'une longueur infiniment petite dx le long d'un axe :



Vitesse : $$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = x'(t)}$$

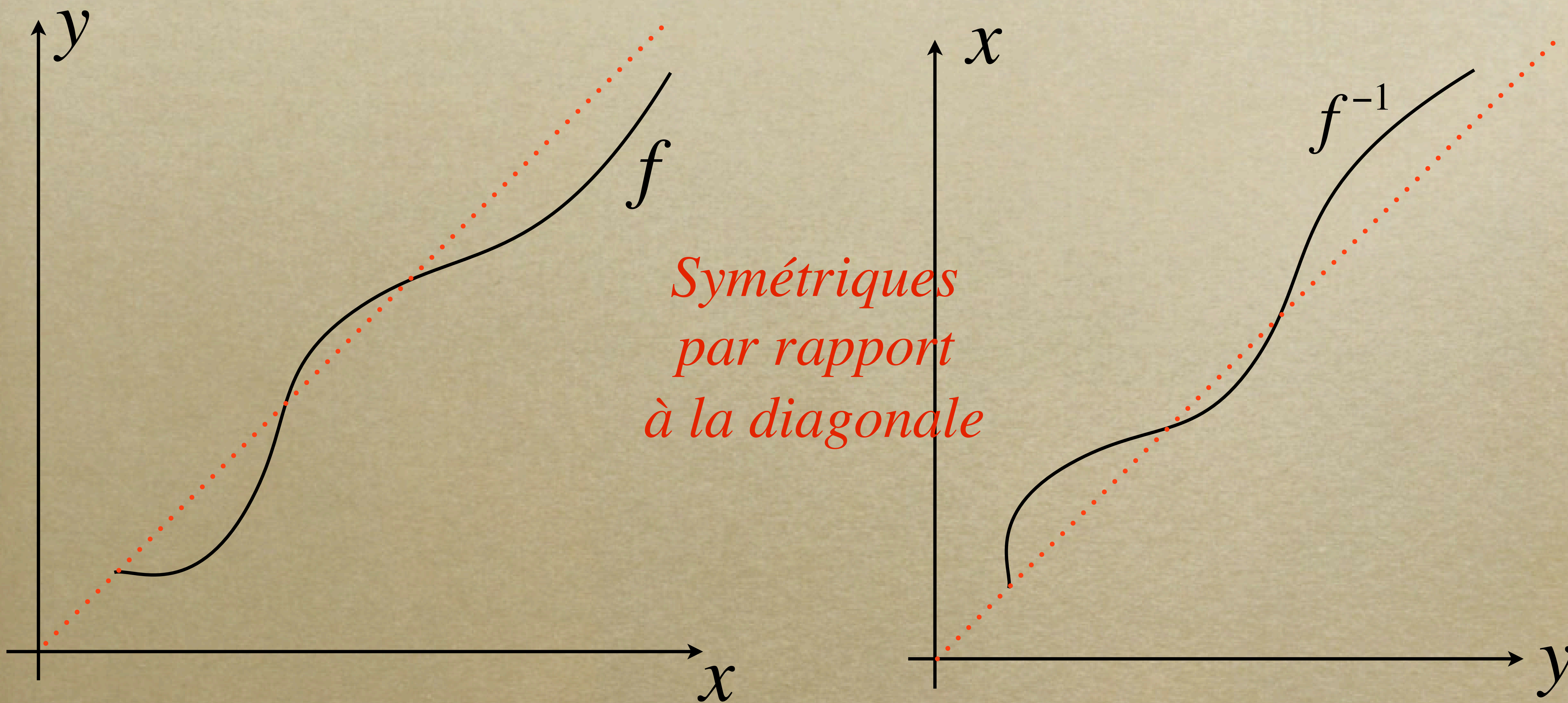
Fonctions et variables jouent le même rôle l'une vis-à-vis de l'autre :

-une fonction peut-être variable d'une autre fonction
-une variable peut-être fonction d'une autre variable

$$f(x) \quad \text{et} \quad x(t) \quad \to \quad f(x(t))$$

En pratique variables et fonctions seront traitées de la même façon.

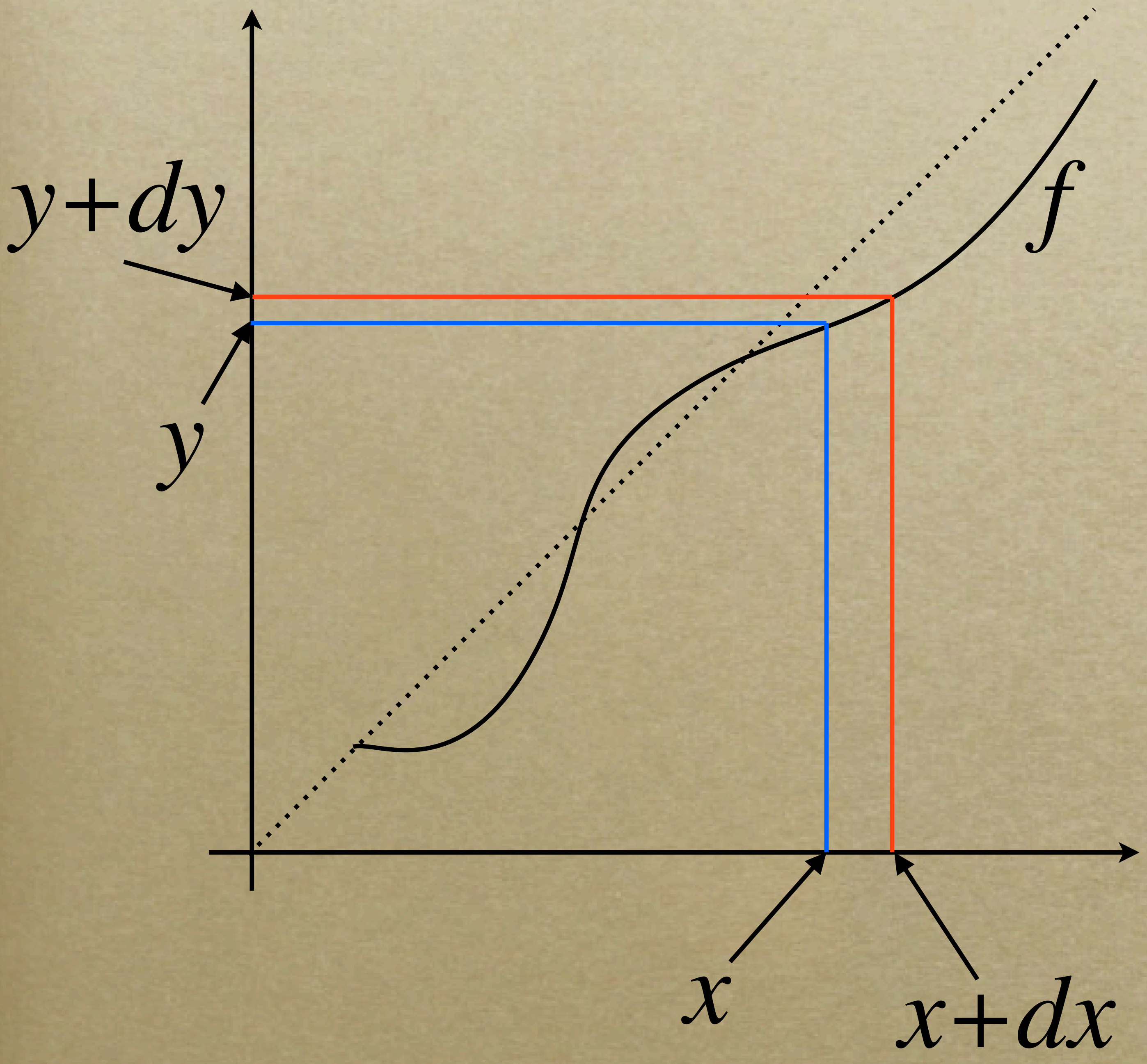
On peut de même inverser la relation fonctionnelle



$$y(x) = f(x)$$

$$x(y) = f^{-1}(y)$$

Première propriété : $\boxed{f(x+dx) = f(x) + df}$



$$\boxed{y = f(x) = f}$$

$$\boxed{f(x+dx) = y + dy}$$

Deux exemples simples :

1 - En électrocinétique - évolution de la charge d'un condensateur :

$$q(t+dt) =$$

2 - *En optique géométrique - variation de l'angle d'incidence :*

$$\boxed{\sin(i) = n\sin(r)}$$

(Descartes)

Si i augmente de di
alors r augmente de dr :

$$\boxed{\sin(i + di) = n\sin(r + dr)}$$

(Descartes)

Soit :

Rq : ici n est envisagé comme une constante

- *Seconde propriété :* $\boxed{df = f'(x)\, dx}$

$$df = f(x+dx) - f(x)$$

(première propriété)

Soit :

On calculera les différentielles à l'aide des dérivées

Suite de notre exemple :

$$\boxed{df = f'(x)\,dx}$$

$$d\sin(i) = n \cdot d\sin(r)$$

Soit :

équation différentielle entre di et dr

Troisième propriété : $df(x(t)) = ?$

C'est la dérivation des fonctions composées :

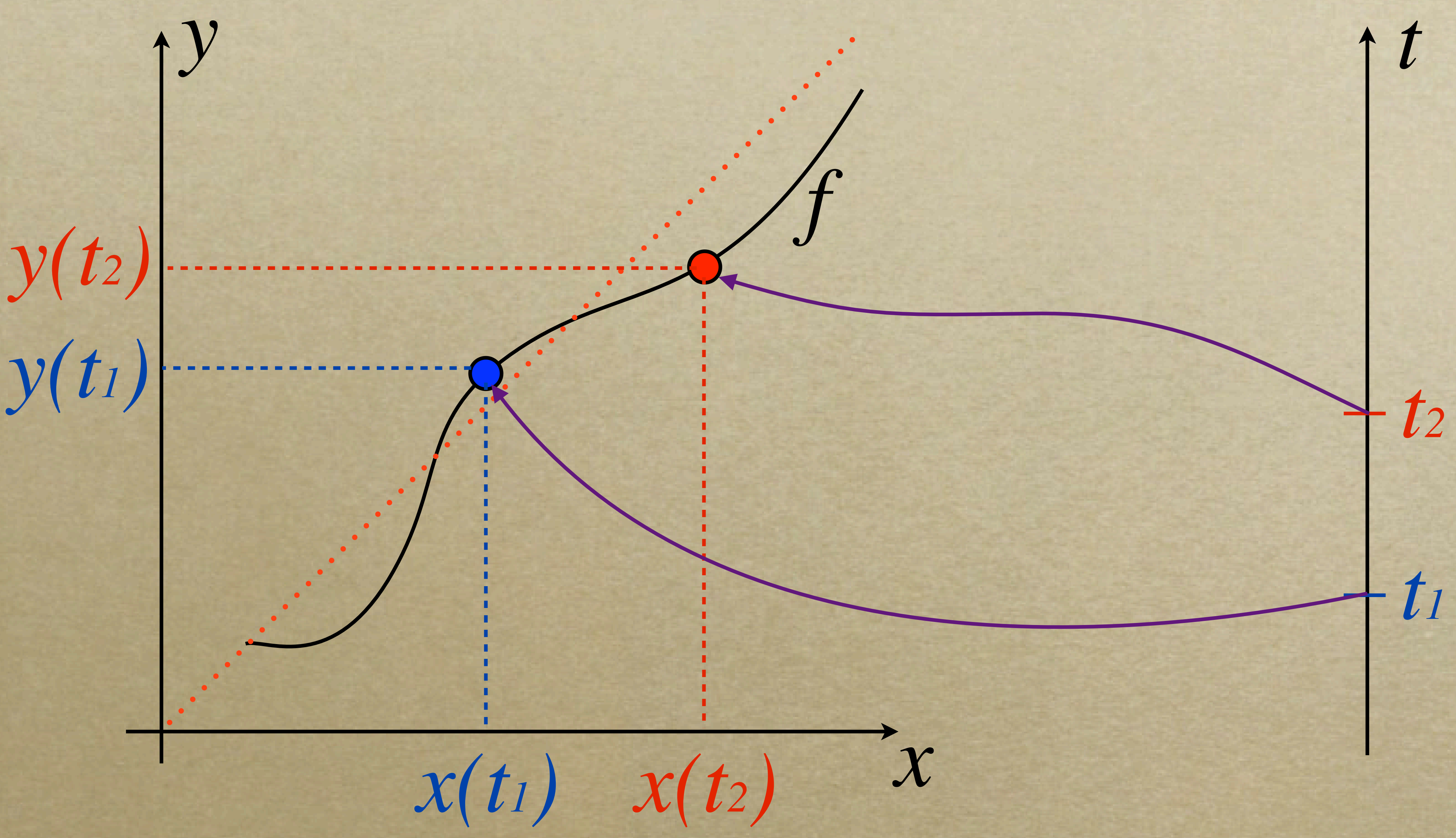
$$[f(x(t))]' = f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$(f \circ x)'(t) = (f' \circ x)(t) \cdot x'(t)$$

Démo :

Cette formule est obtenue très naturellement par une simple manipulation algébrique.

Représentation paramétrique : $\{x(t), y(t)\}$



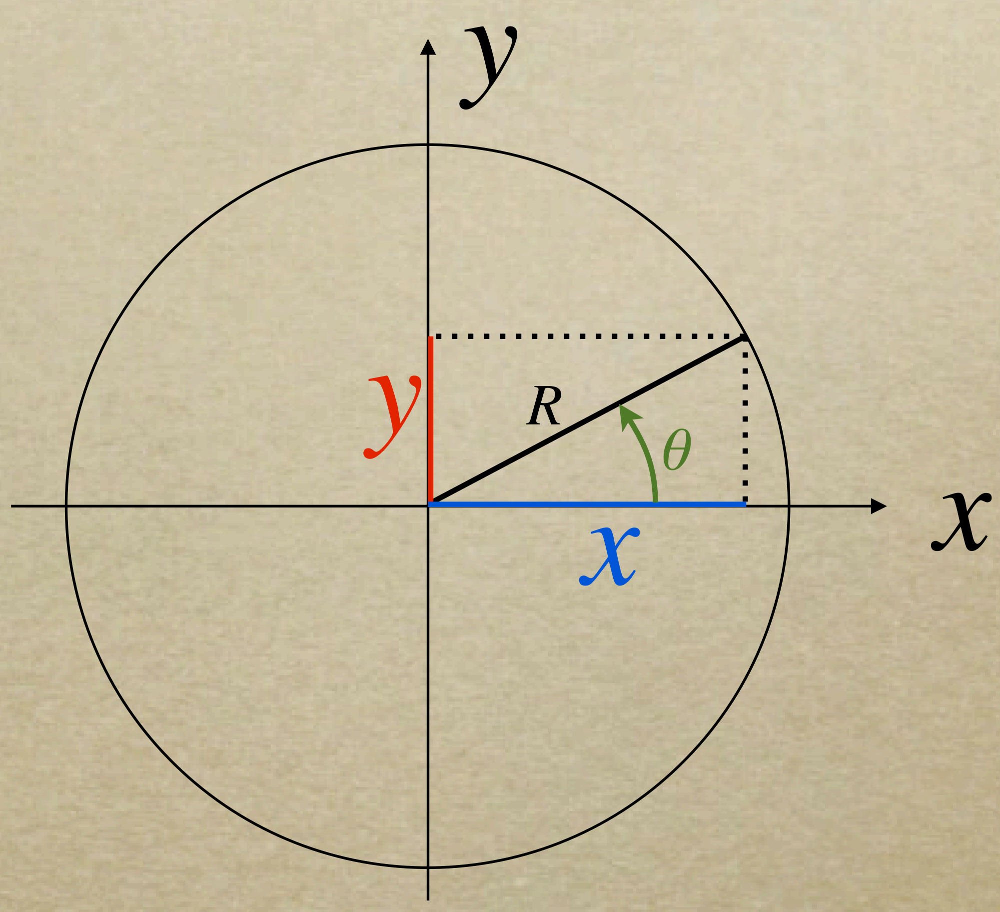
x et y sont envisagées comme deux fonctions du temps t indépendantes :
$x(t)$ *et* $y(t)$

Exemple : le cercle

$\theta = \omega t$

$$x(t) =$$

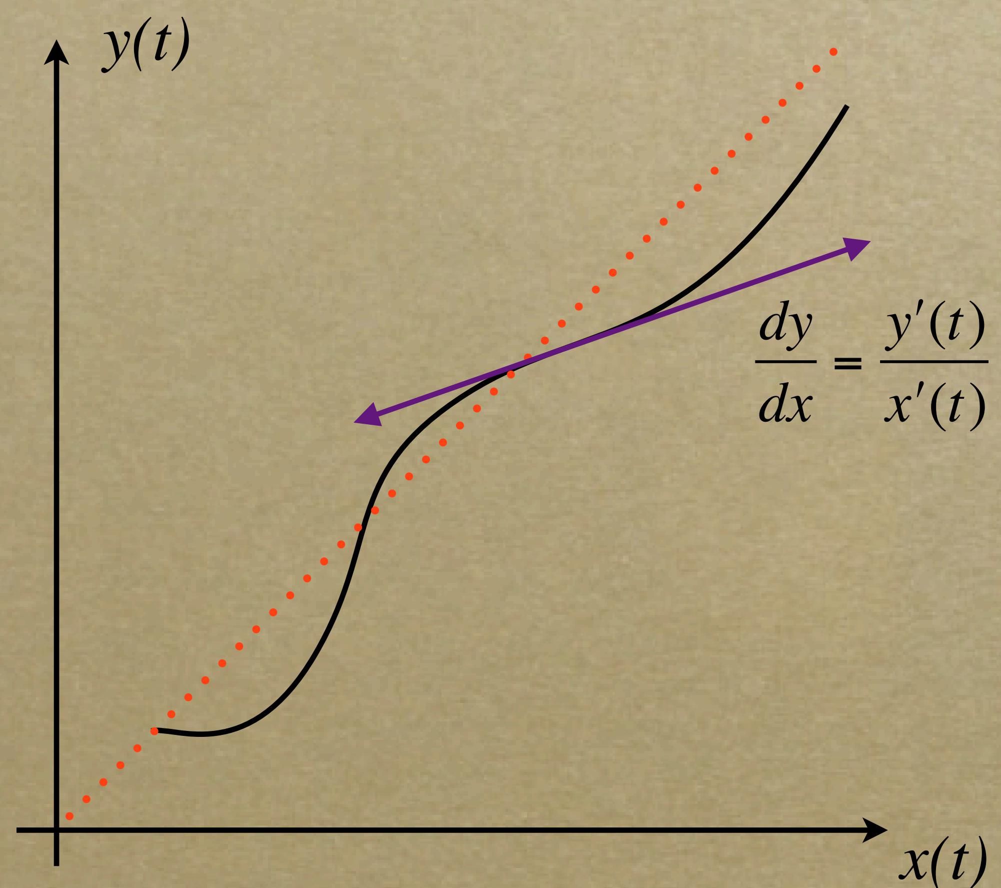
$$y(t) =$$



Quatrième propriété :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

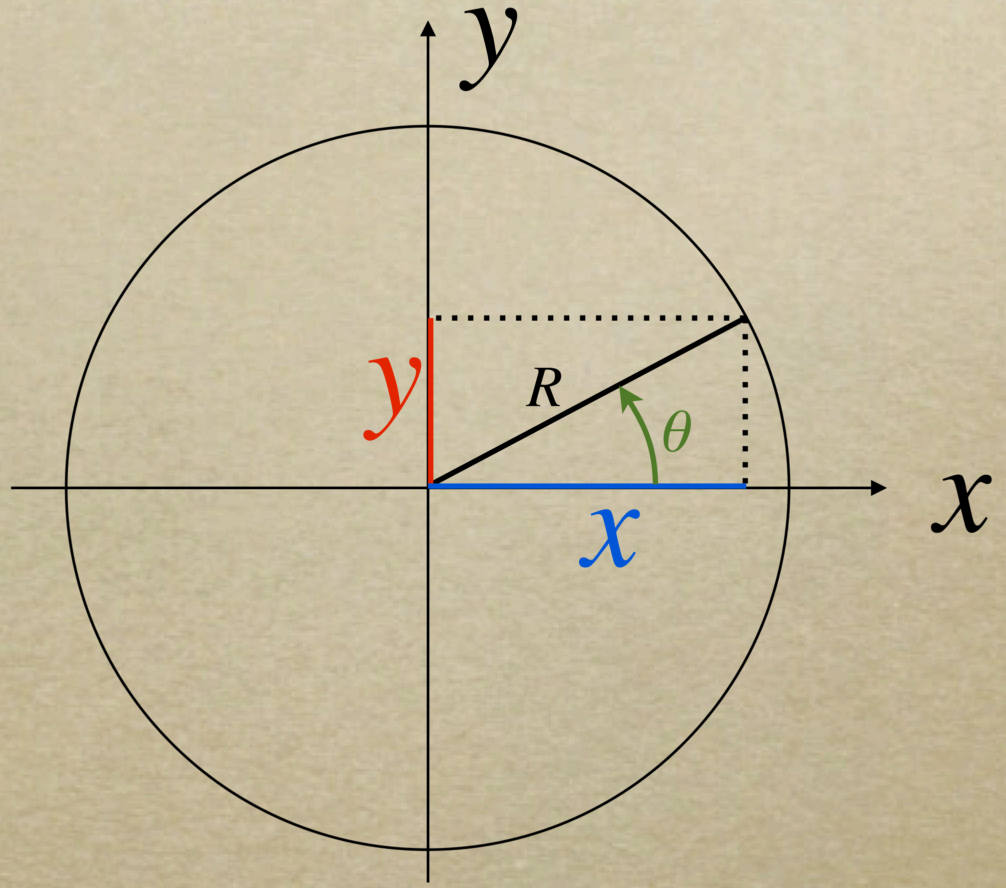
Démo :



La pente du graphe s’obtient comme le rapport des dérivées par rapport au temps

Soit pour le cercle

$\theta = \omega t$ $\qquad d\theta =$



$$dx(t) =$$

$$dy(t) =$$

d : opérateur linéaire

Par définition de la linéarité (Math) :

$$d(x + y) = dx + dy$$

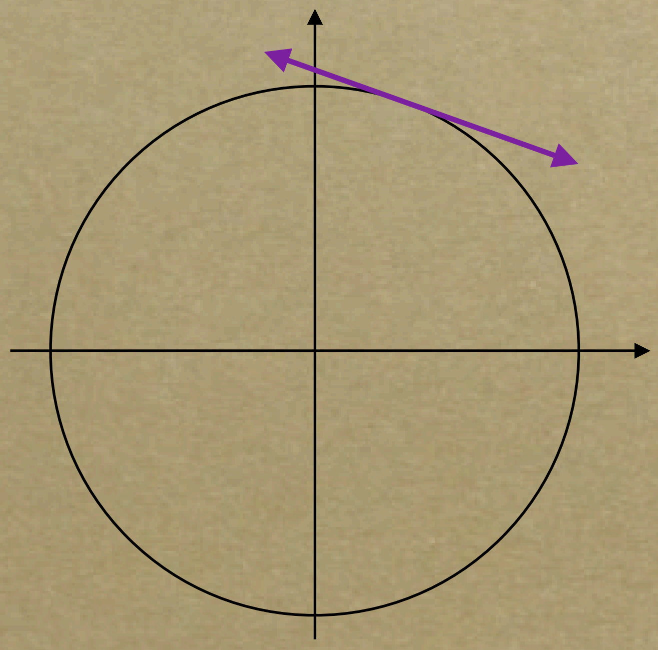
$$d(\lambda x) = \lambda dx \qquad \forall \lambda \in \pounds$$

(pour tout scalaire)

Equation implicite d'un cercle de rayon R $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$

Comment varie y quand on fait varier x et qu'on reste sur le cercle ?

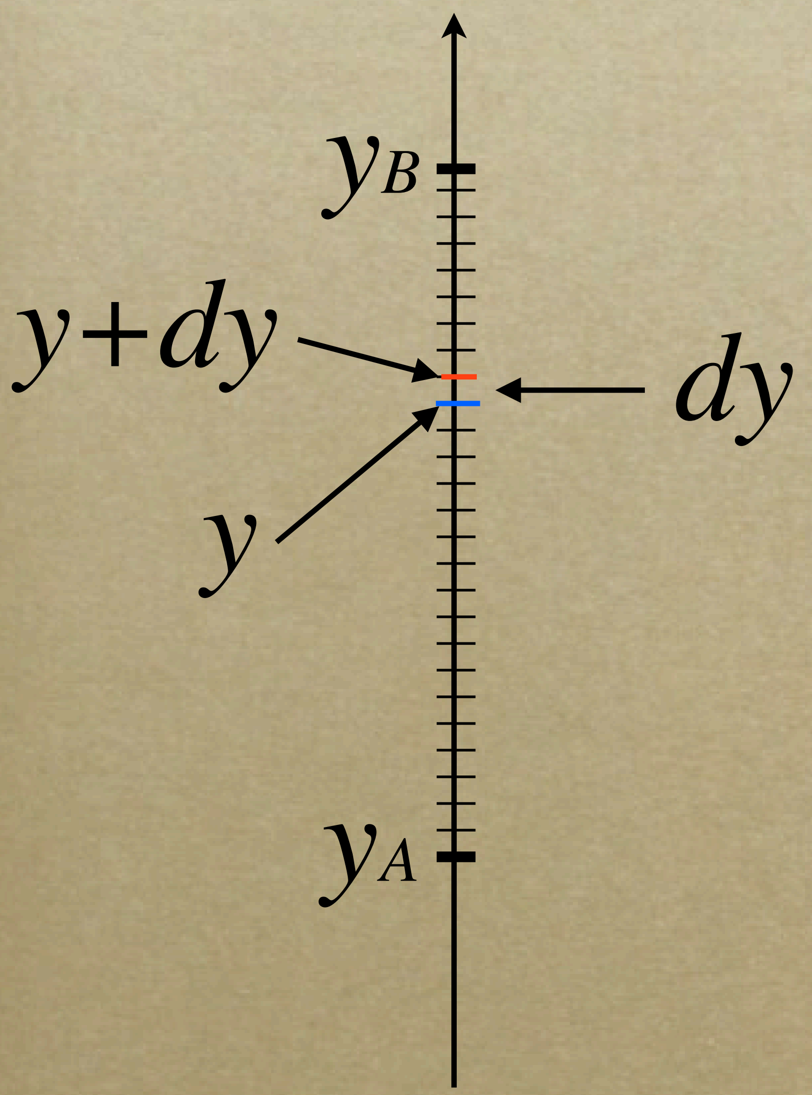
soit $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$ *(eq° diff. toujours vraie)*



Si $y \neq 0$ *Si* $y > 0$

$$dy = -\frac{x}{y}dx = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx$$

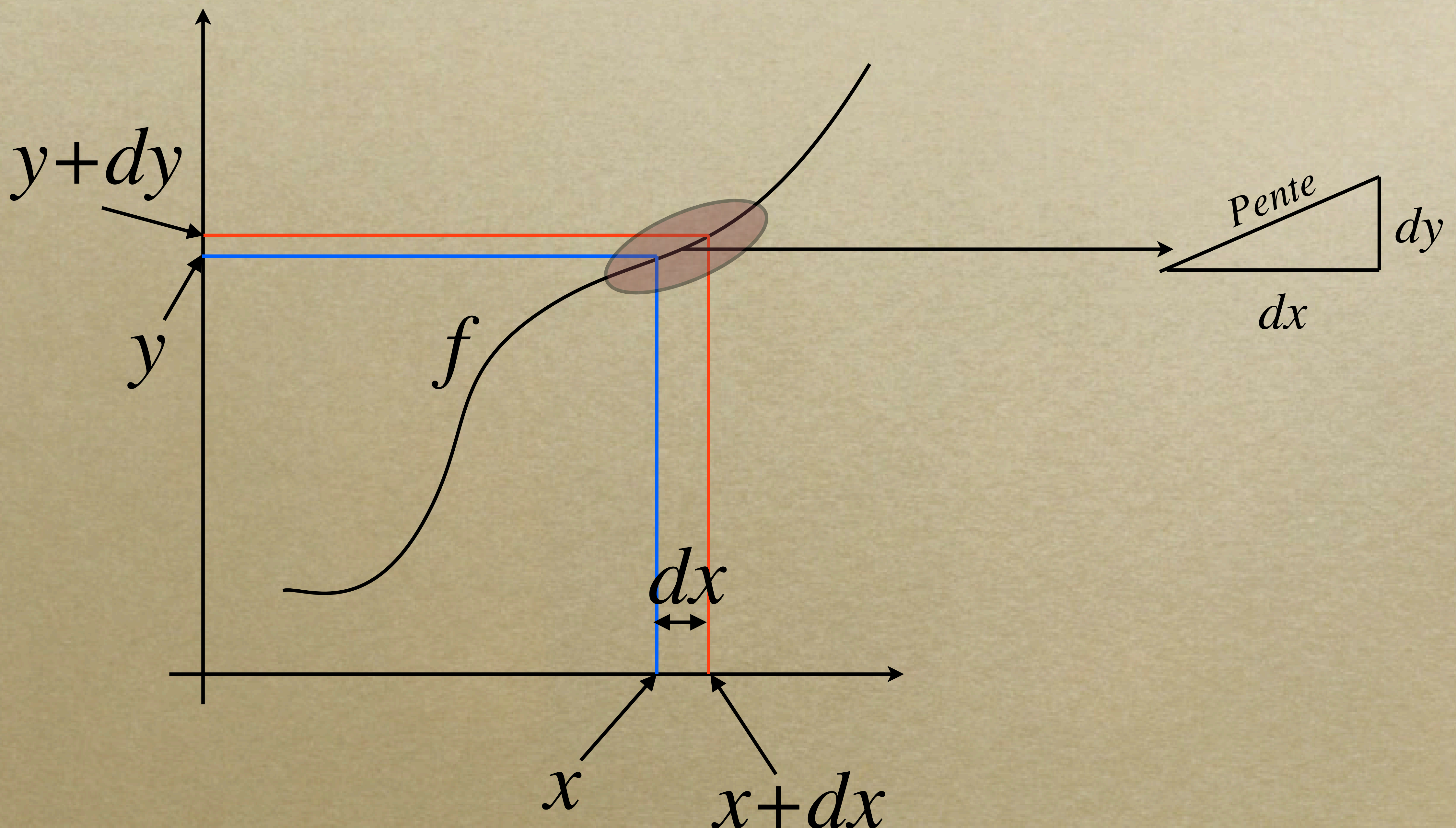
Opérateur de somme $\int$



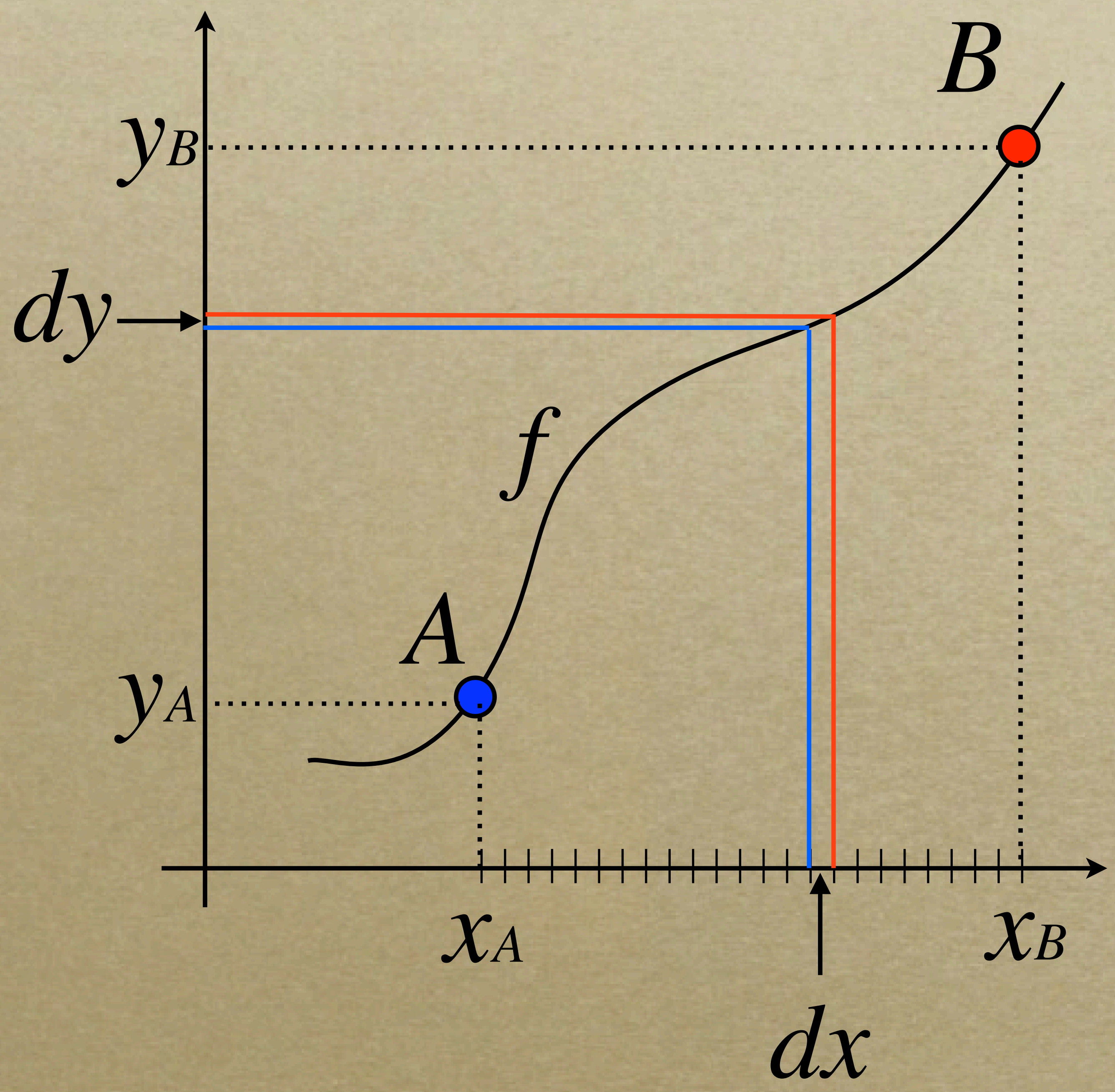
On peut aller de A à B en sommant les différentiels :

$$\boxed{y_B = y_A + \int_{y_A}^{y_B} dy}$$

- *Propriété :* $$\boxed{\int dy = \int f'(x)\,dx}$$ *changement de variable*



Calcul intégral



On somme :

$$\boxed{\int_{y_A}^{y_B} dy = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dy}{dx}\,dx = \int_{x_A}^{x_B} f'(x)\,dx}$$

II - Les approximations à connaître en physique

Pour x ~ 0 on écrit

$$\sin(x) \; ; \; x$$

$$\cos(x) \; ; \; 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\tan(x) \; ; \; x$$

$$e^x \; ; \; 1 + x$$

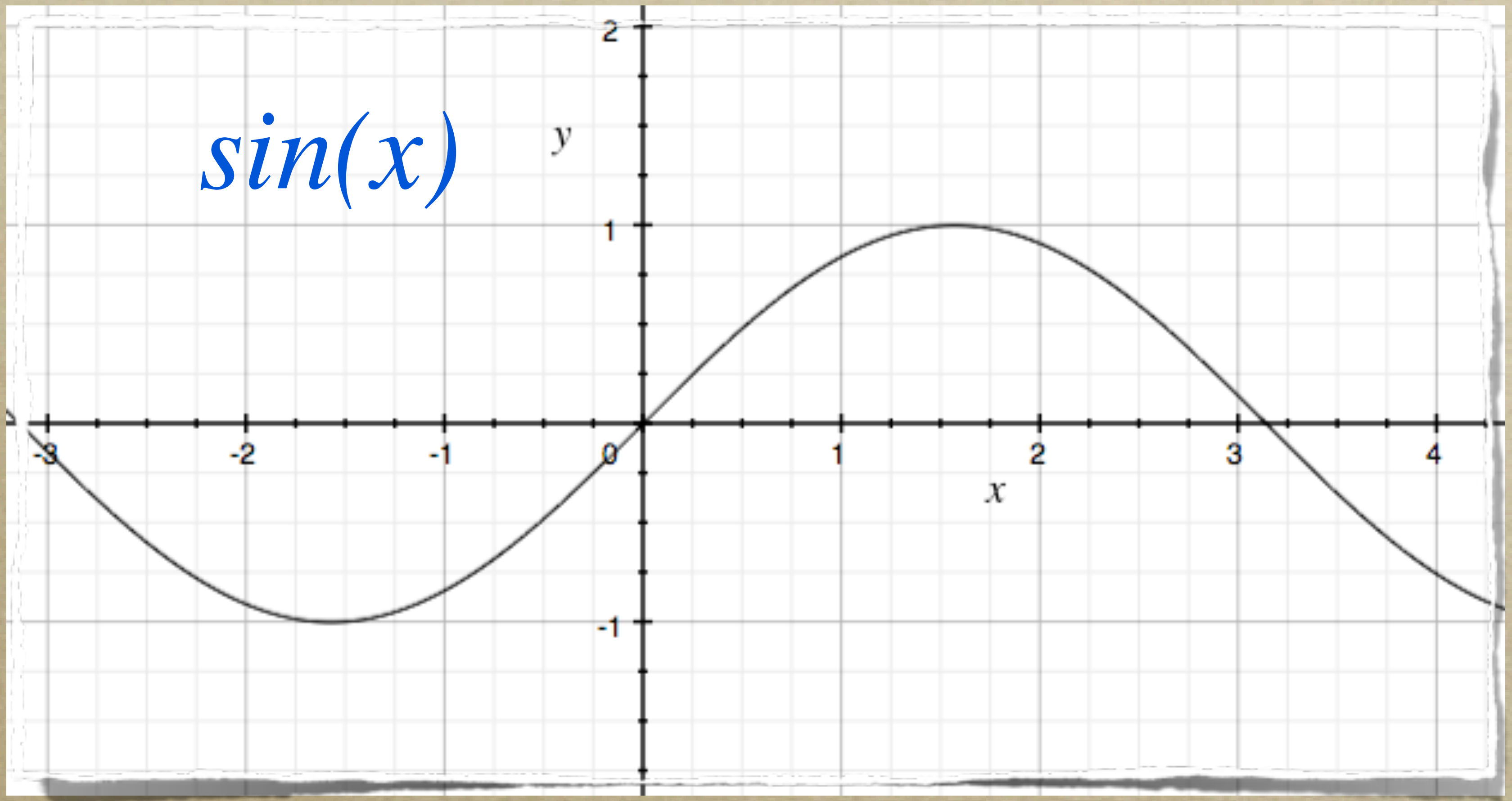
$$\ln(1 + x) \; ; \; x$$

$$(1 + x)^\alpha \; ; \; 1 + \alpha \cdot x \qquad \forall \alpha \in {}^\circ$$

$$\sqrt{1 + x} \; ; \; 1 + \frac{1}{2} \cdot x$$

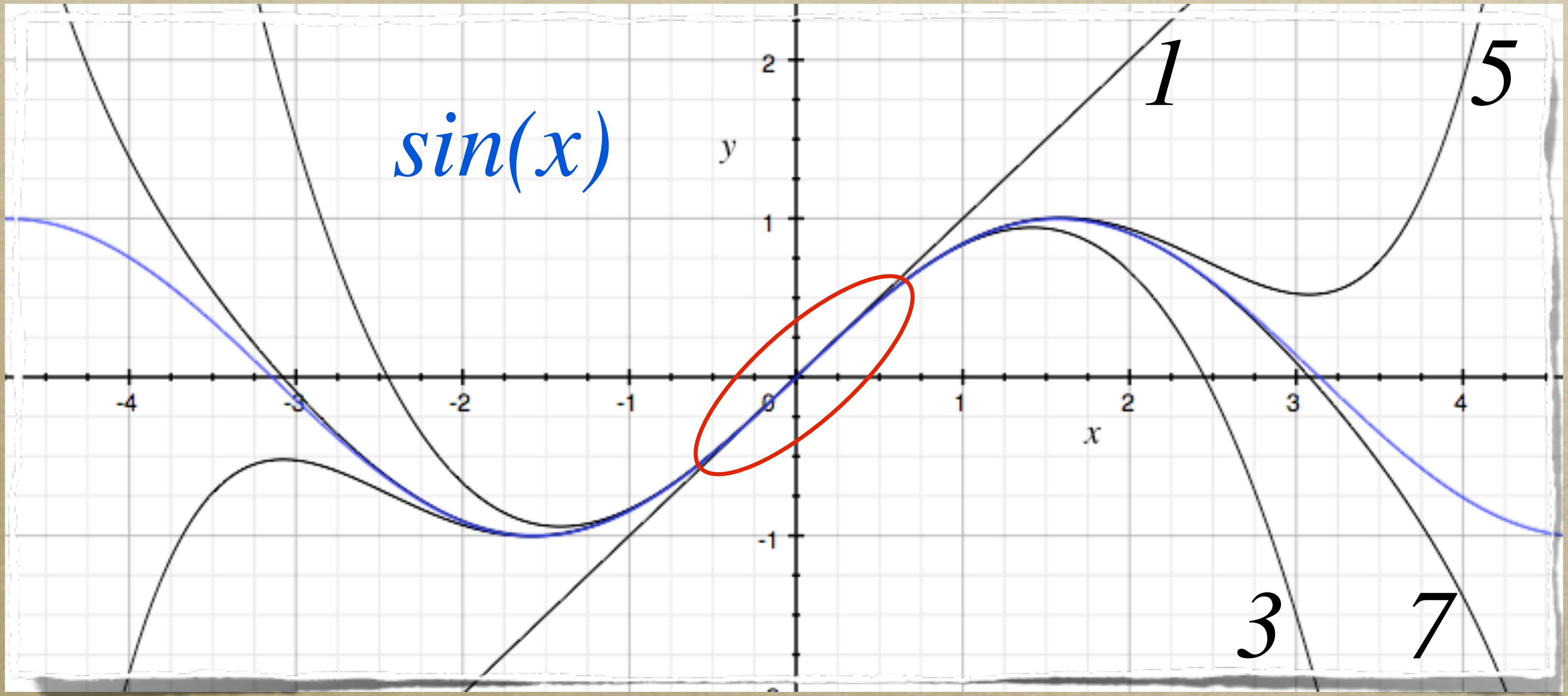
(Admises)

exemple : La fonction sinus



On peut faire une approximation de cette fonction autour de (0, 0) par un polynôme en x

Les approximations en physique



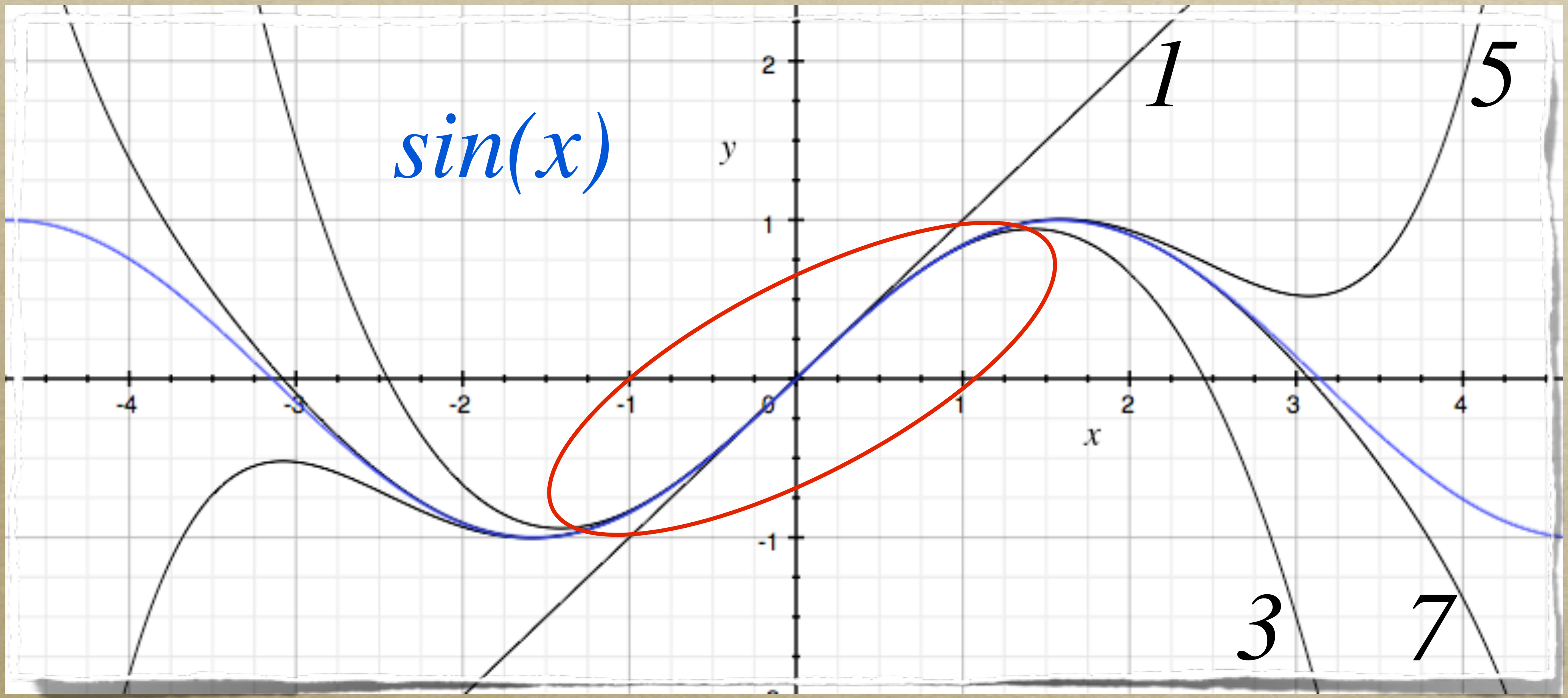
Ordre 1 : $\boxed{\sin(x) \approx x}$

Ordre 5 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

Ordre 3 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6}$

Ordre 7 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$

Les approximations en physique



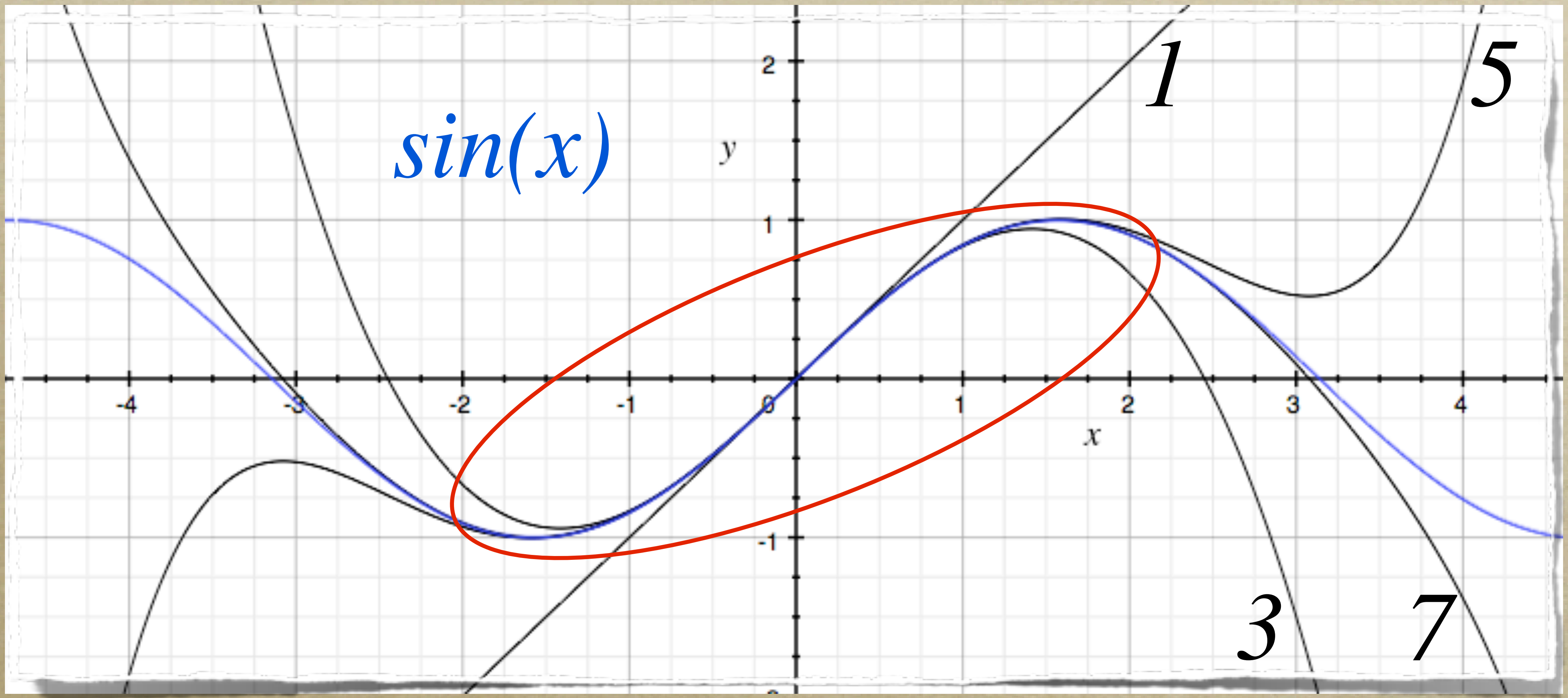
Ordre 1 : $\sin(x) \approx x$

Ordre 3 : $\boxed{\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}}$

Ordre 5 : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Ordre 7 : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

Les approximations en physique



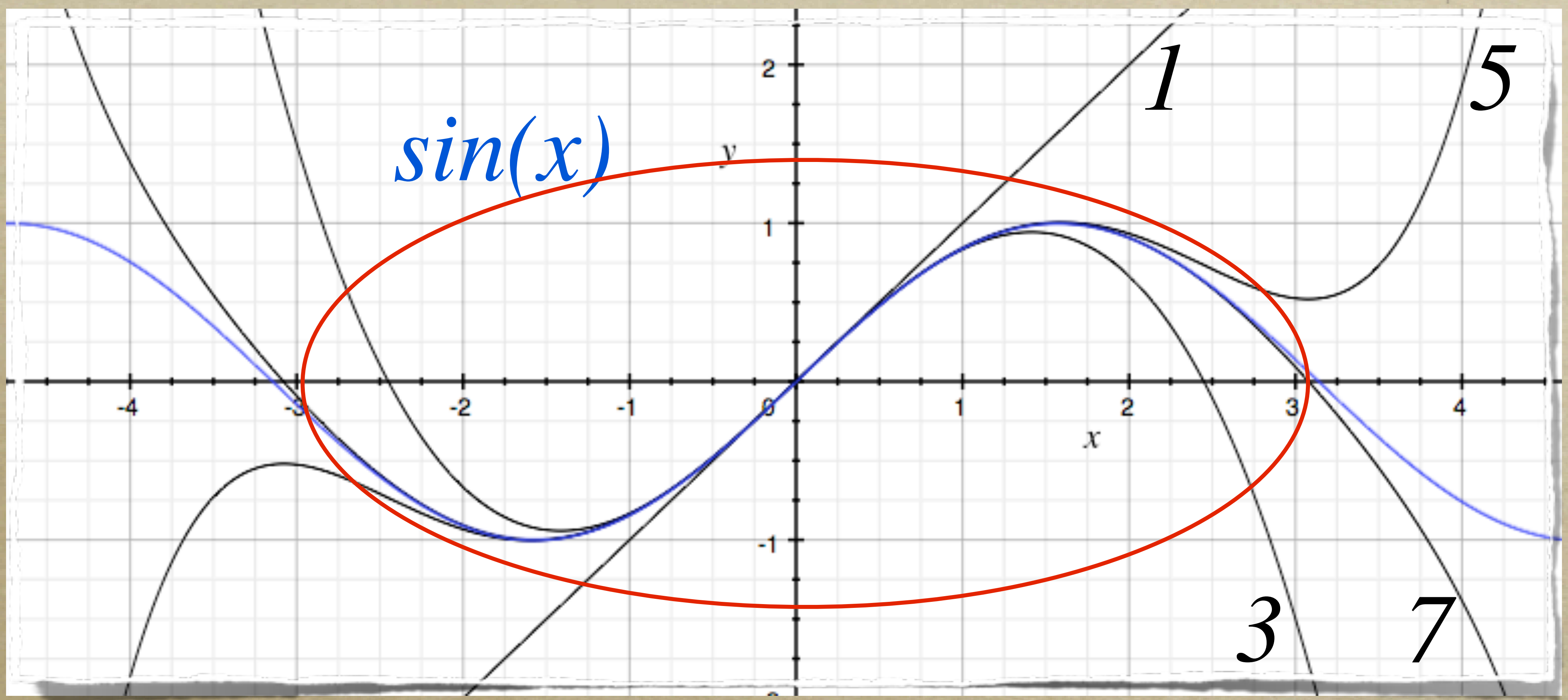
Ordre 1 : $\sin(x) \approx x$

Ordre 5 : $\boxed{\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$

Ordre 3 : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$

Ordre 7 : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

Les approximations en physique



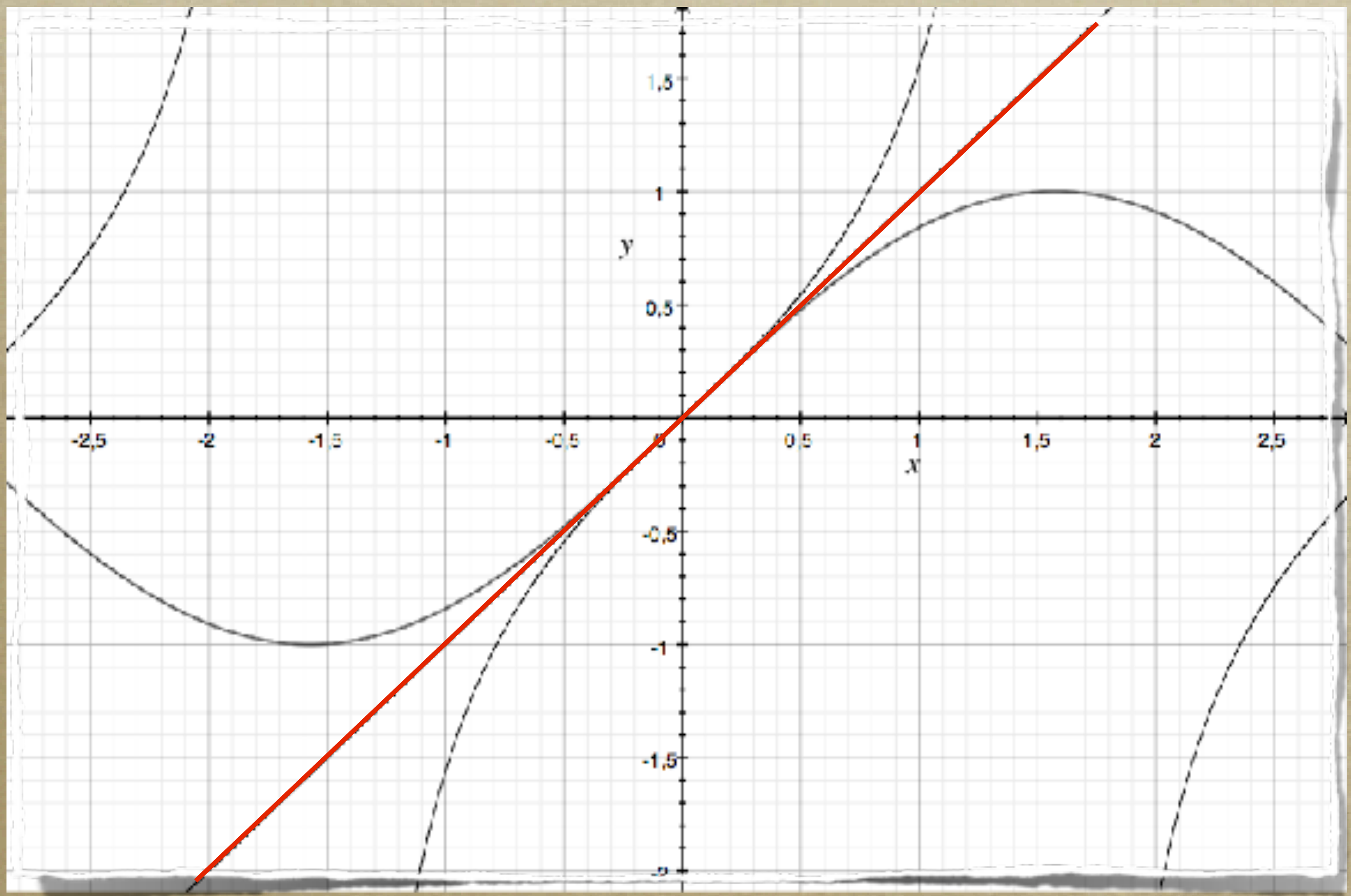
Ordre 1 : $\sin(x) \approx x$

Ordre 3 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6}$

Ordre 5 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

Ordre 7 : $\sin(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$

La fonction tangente



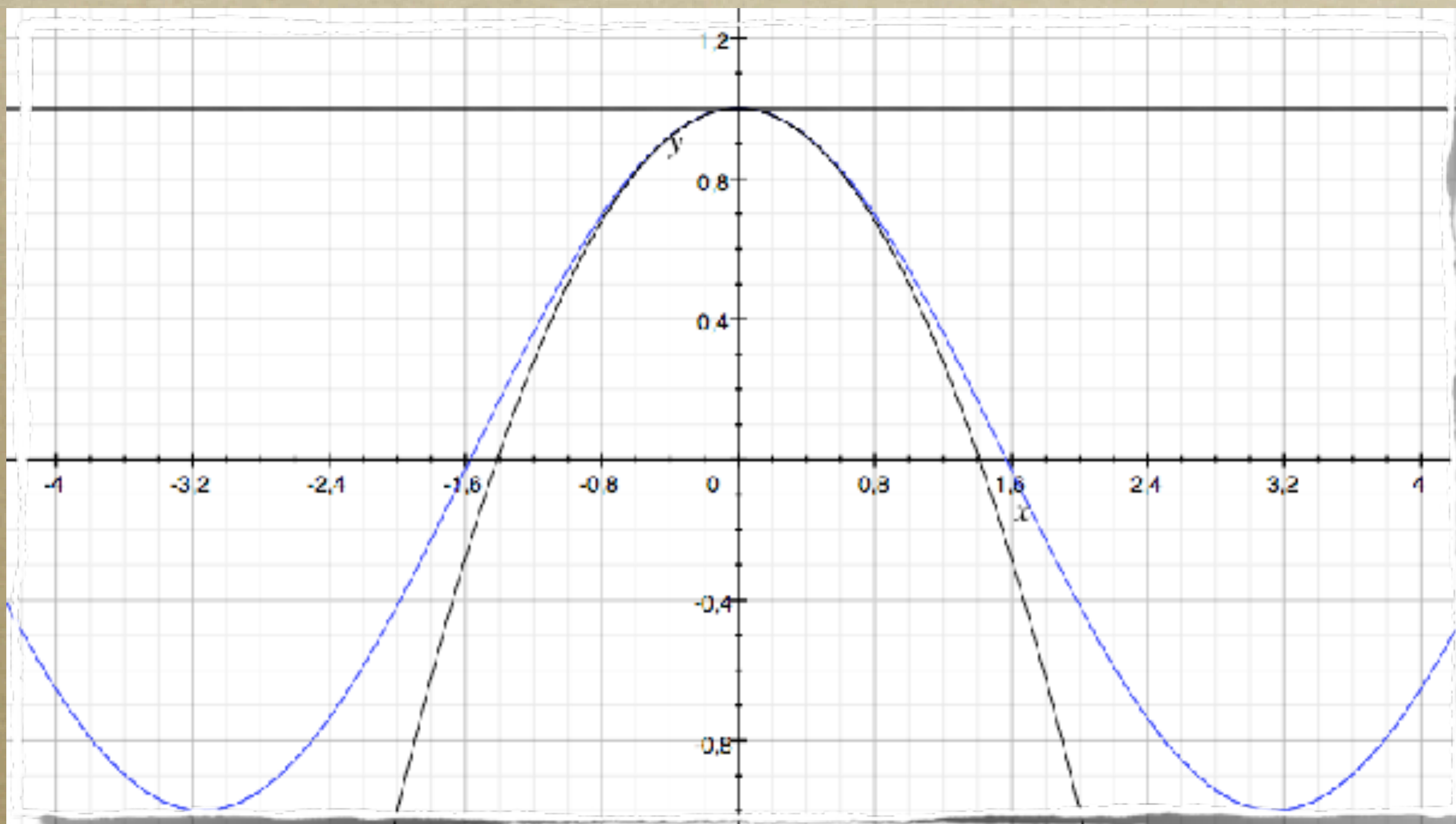
Sur]0 ; π/2[on a toujours :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Pour x ~ 0 on écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(x) \sim x \\ \tan(x) \sim x \end{array}}$$

La fonction cosinus



Pour x ~ 0 on écrit à l' ordre 2:

$$\boxed{\cos(x) \;;\; 1-\frac{x^2}{2}}$$