Applications aux Oscillateurs

Méca 5

Calculs complets sur copie double

Objectifs :

- Etudes dynamiques
- Construction des portraits de phase
- analogies électromécaniques

1 - L'oscillateur harmonique [OH] : Oscillateur non amorti

Historiquement, la première étude d'un oscillateur est celle de Galilée qui observa le lustre de la cathédrale de Pise et donna une mesure de sa période :

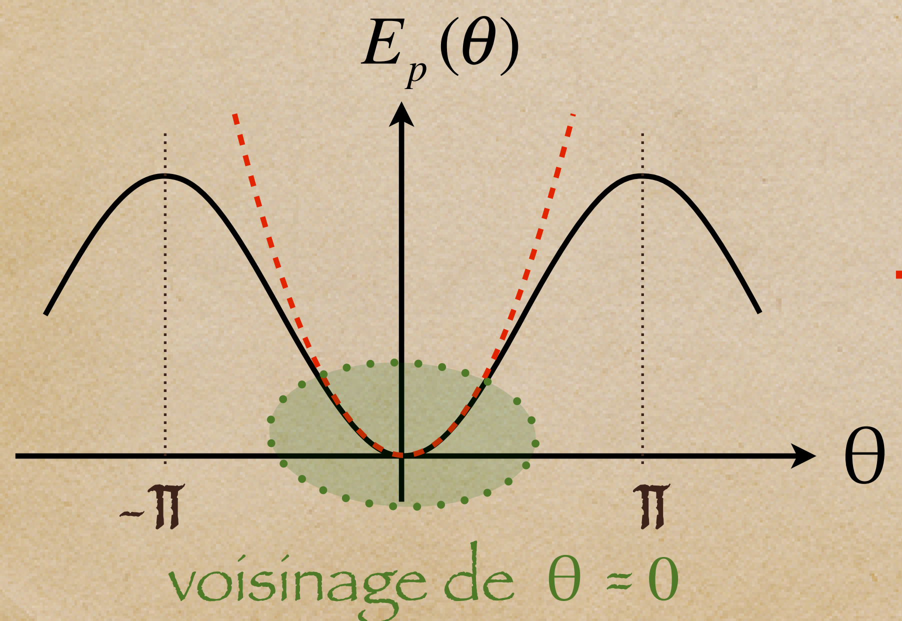
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

GALILÉE (1564-1642)

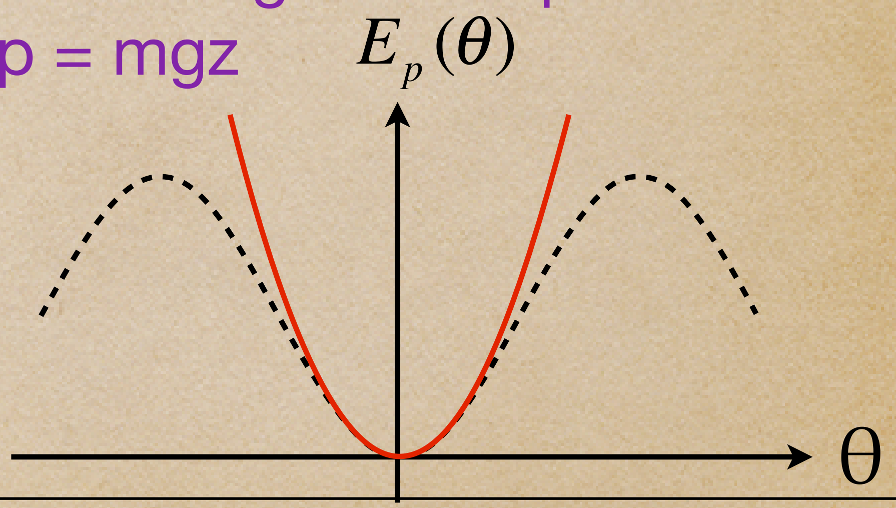
Le pendule simple peut être traité comme un Pb. conservatif à un deg. de lib. :

$$\boxed{E_p(\theta) = mgl\left(1-\cos(\theta)\right)}$$

Etablir cette formule géométriquement à partir de Ep = mgz

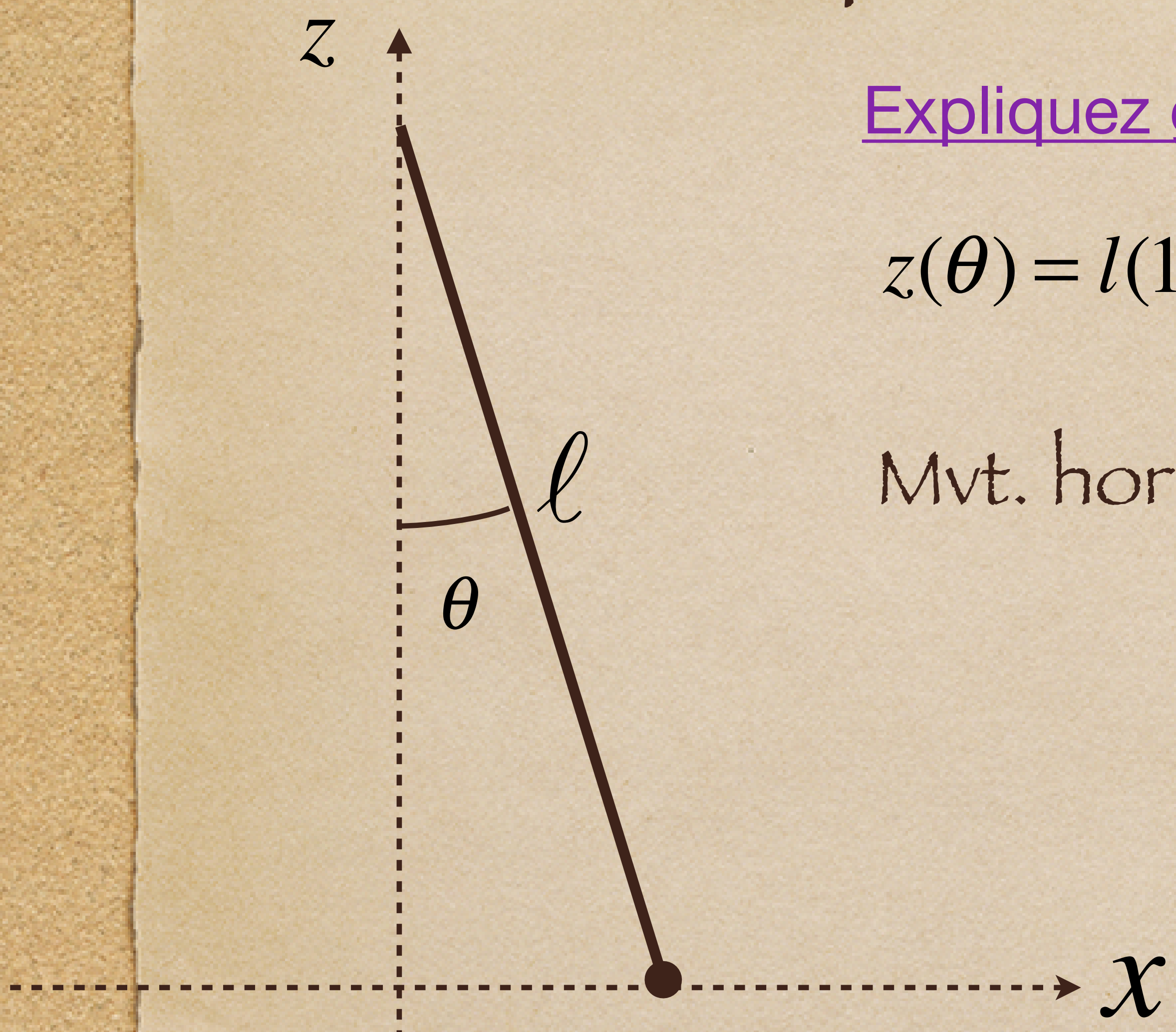


Limite des petits angles



$$E_p(\theta) = mgl\left(1-(1-\frac{\theta^2}{2})\right) = \tfrac{1}{2}mgl\theta^2$$

La linéarisation permet de se ramener à un pb. selon x :



Expliquez géométriquement que :

$$z(\theta) = l(1 - \cos(\theta)) = \tfrac{1}{2} l \theta^2$$

Mvt. horizontal au premier ordre en θ

$$x \simeq \ell\theta$$

$$\dot{x} \simeq$$

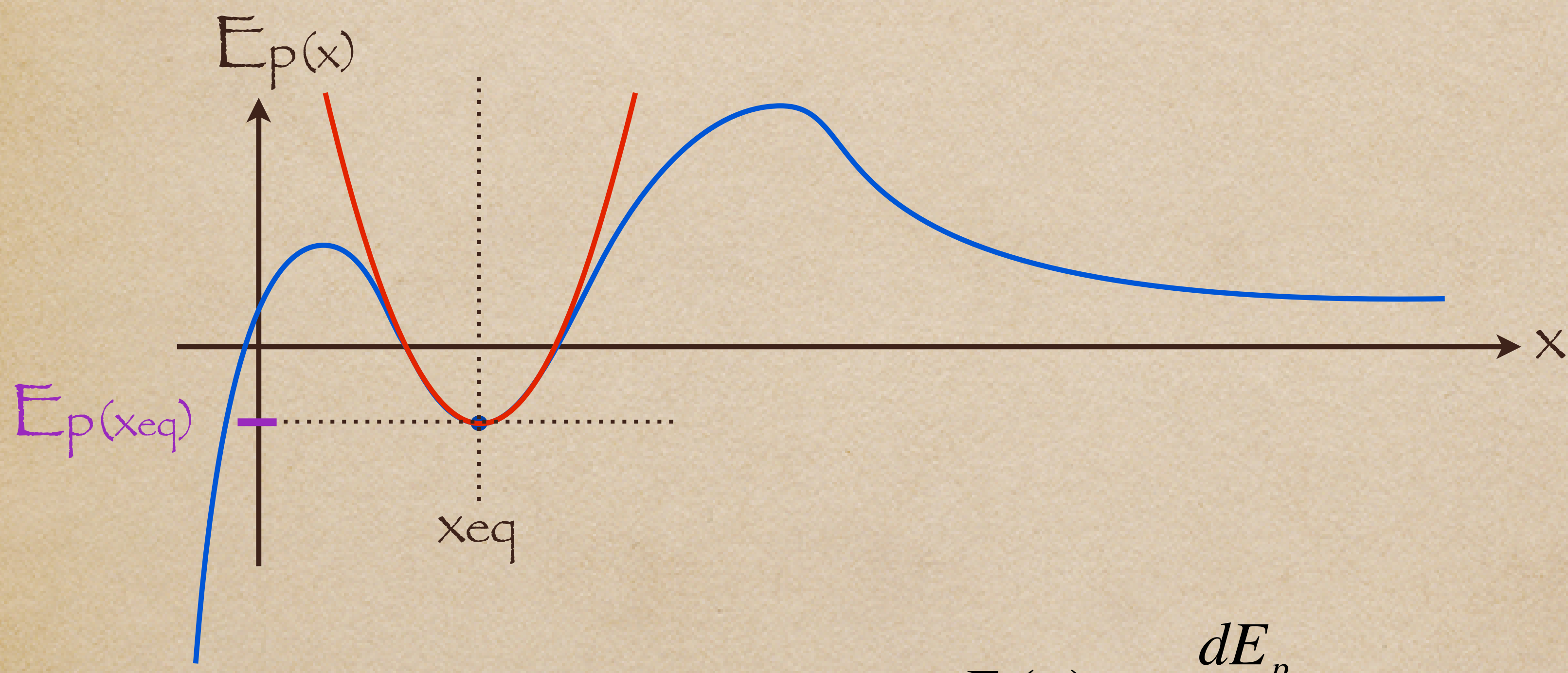
$$E_p(x) = \tfrac{1}{2} \frac{mg}{\ell} x^2 \qquad E_p(x) = \tfrac{1}{2} \kappa x^2$$

Généralisation :

Ce résultat se généralise à toute étude d'un minimum local de Ep(x) tel, que la dérivée seconde de Ep soit positive au point d'équilibre. (cf méca 3)

Potentiel localement parabolique :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})$$



$$F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Force de rappel linéaire

$$\kappa = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})$$

Constante de raideur

Soit dans notre cas :

$$F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx} \simeq$$

?

$$\kappa = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) \simeq$$

α - Mise en équation :

Etablir :

- Par les forces (cf meca 2)
- Par l'énergie :

$$E_m(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2}\kappa x^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Mise sous forme canonique :

Obtenir l'eq° différentielle à partir du T.E.M

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0$$

Définition générale :

On appelle oscillateur harmonique tout système physique obéissant à l'équation :

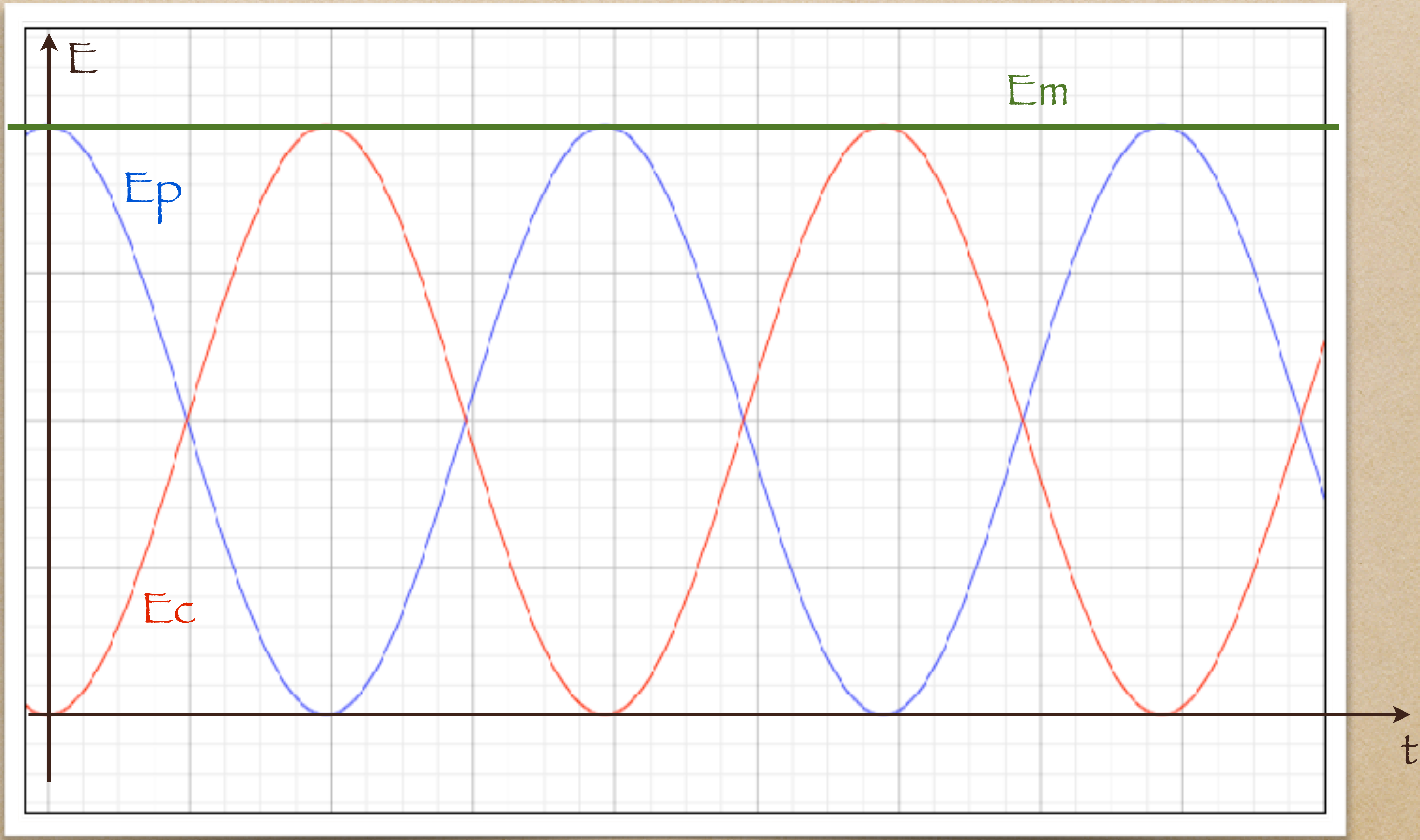
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Analogie électromécanique :

Montrer que l'analogie est parfaite avec le circuit LC

Rq - Etude énergétique

Revoir SP 1 & EC 2



β - Résolution générale dans l'approximation linéaire : OH
(Potentiel parabolique)

Revoir SP1

Solution générale :

$$\begin{cases} x(t) = x_{MAX}.\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -\omega_0 x_{MAX}.\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

Equation paramétrique d'une ellipse

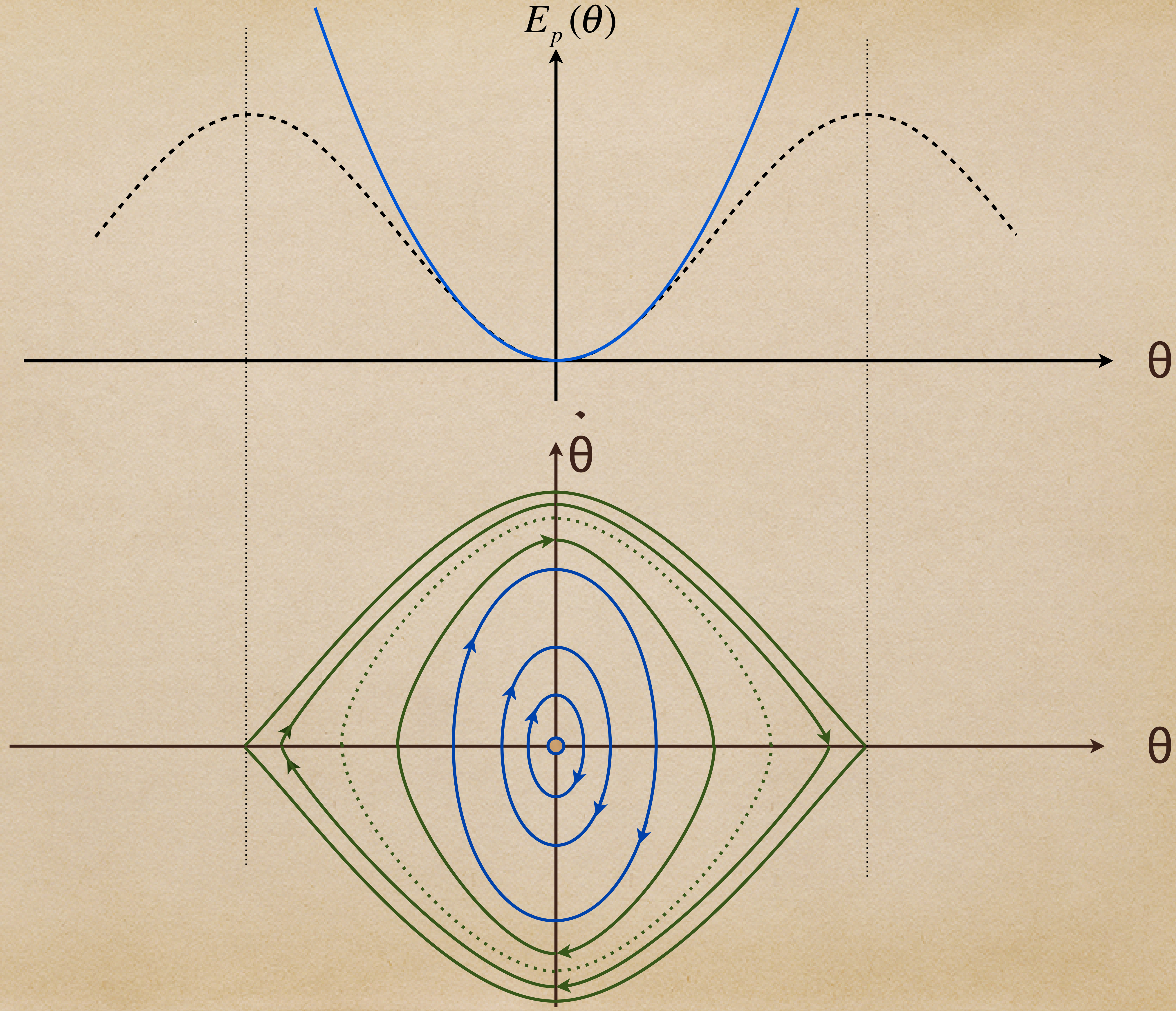
γ - Portrait de phase du pendule simple : $(x,\dot{x}) \rightarrow (\theta,\dot{\theta})$

Solution générale dans l'approximation des petits angles : $\boxed{\text{Régime linéaire}}$

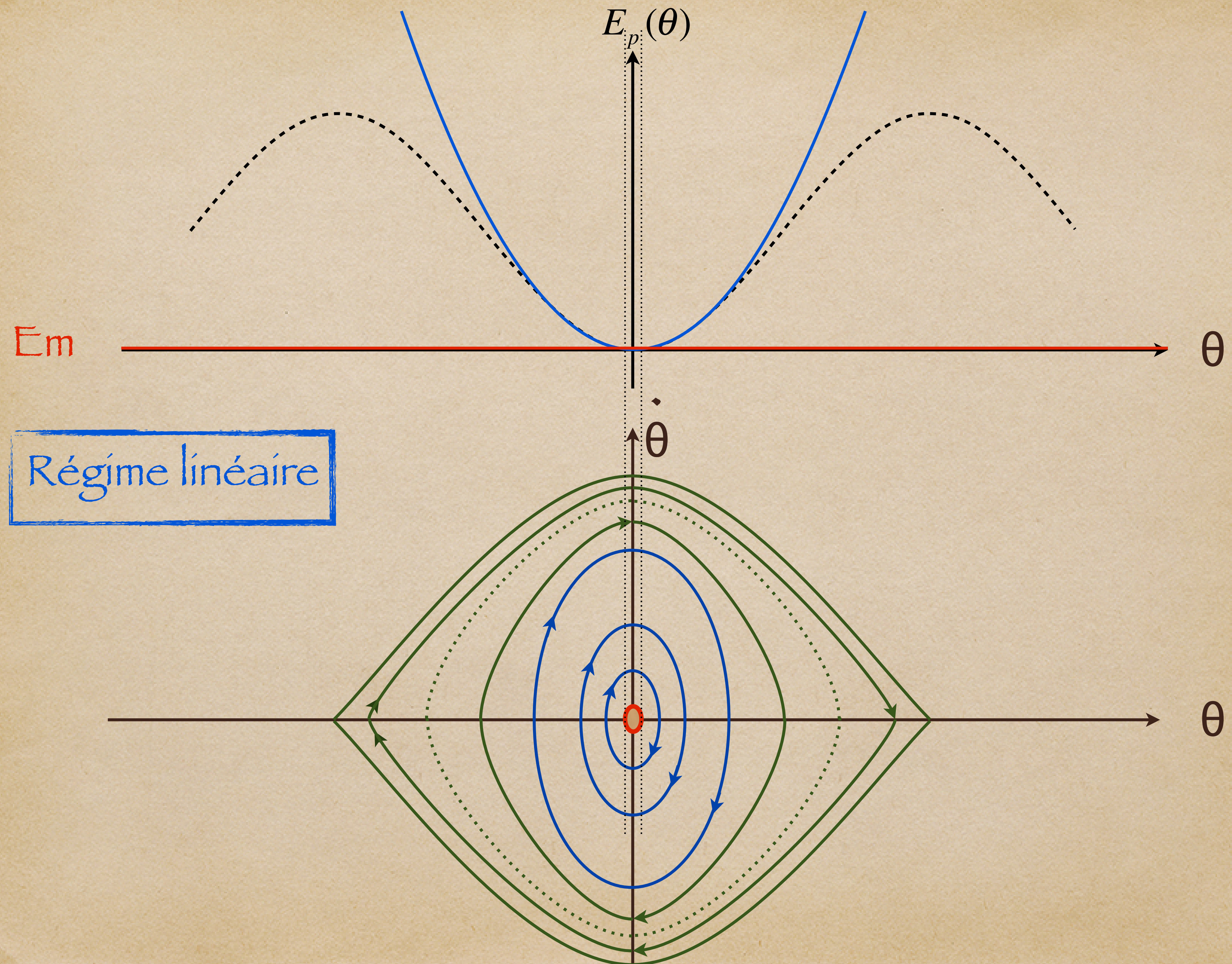
$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_{MAX}.\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_{MAX}.\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

Equation paramétrique d'une ellipse

Equation implicite de la trajectoire dans l'espace des phases :

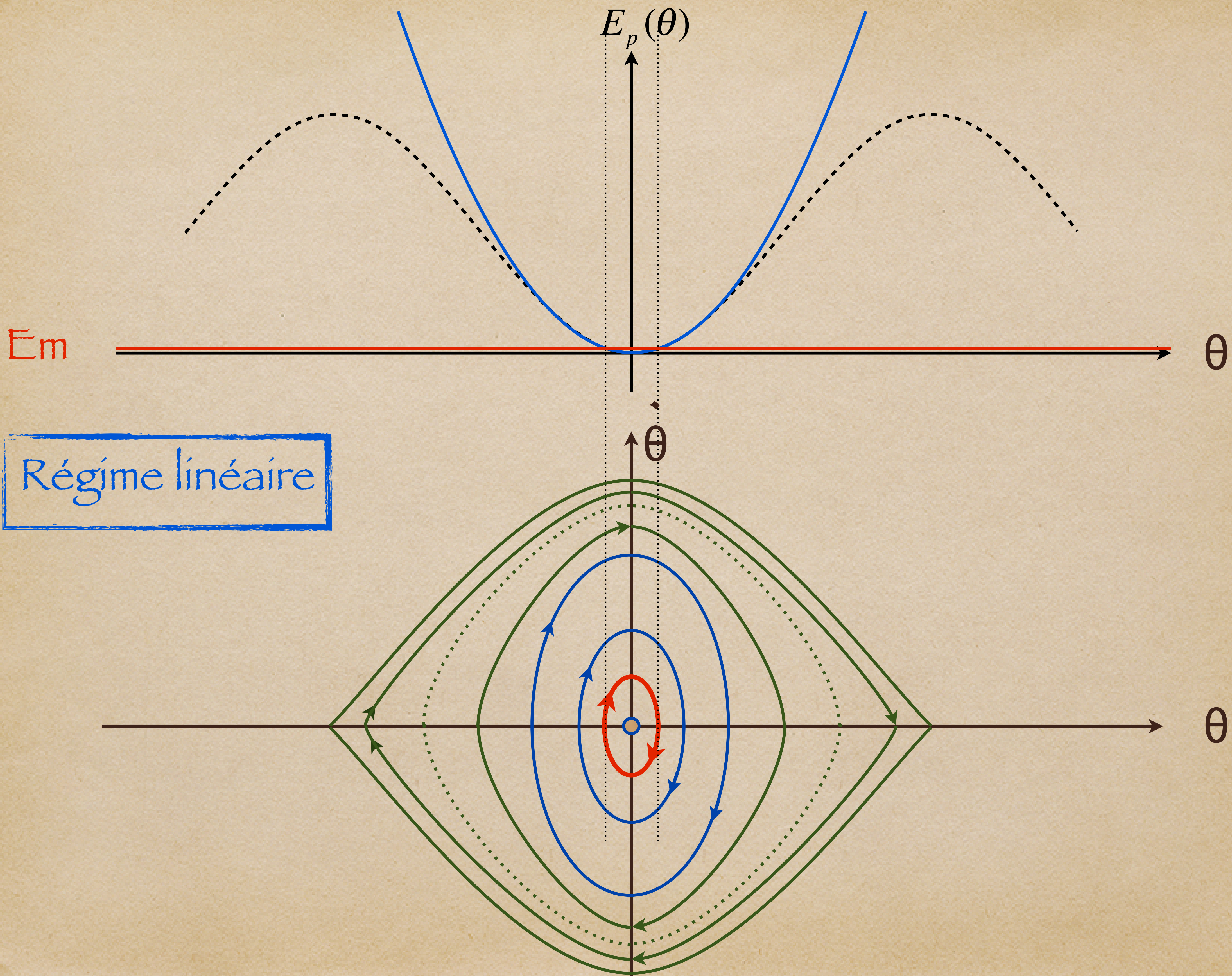


$E_p(\theta)$
θ
$\dot{\theta}$
θ

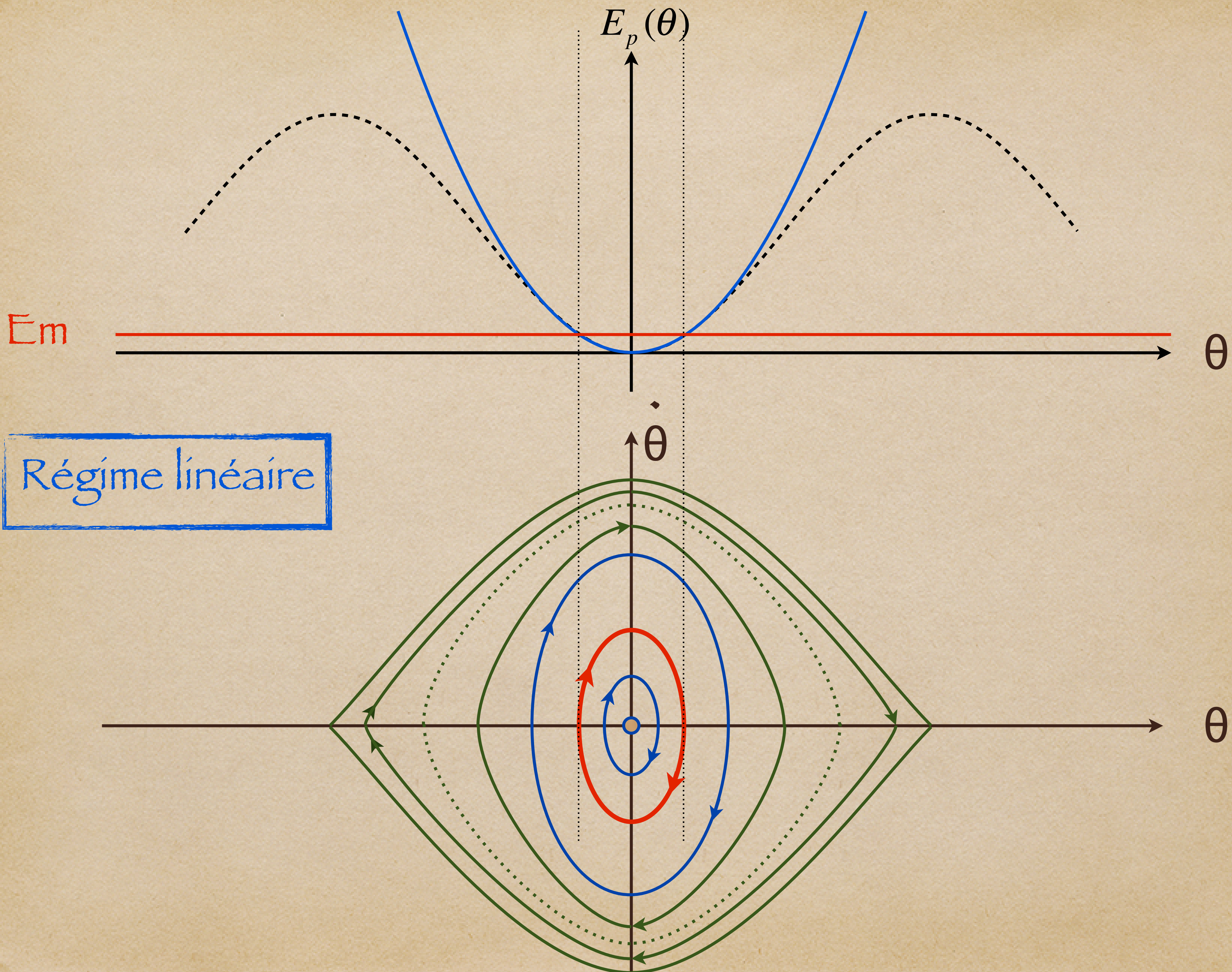


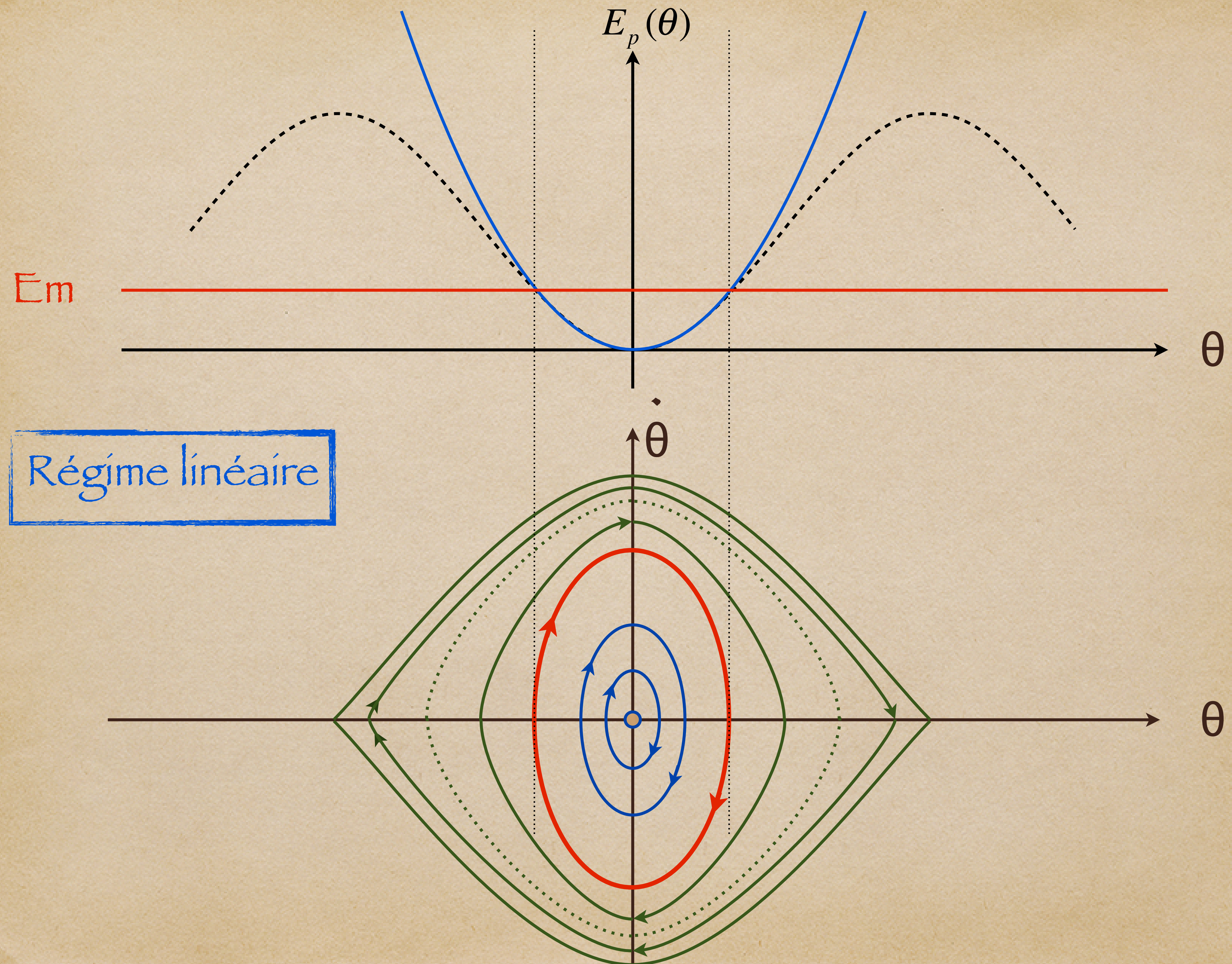
$E_p(\theta)$
Em
θ
$\dot{\theta}$
θ
Régime linéaire

Régime linéaire



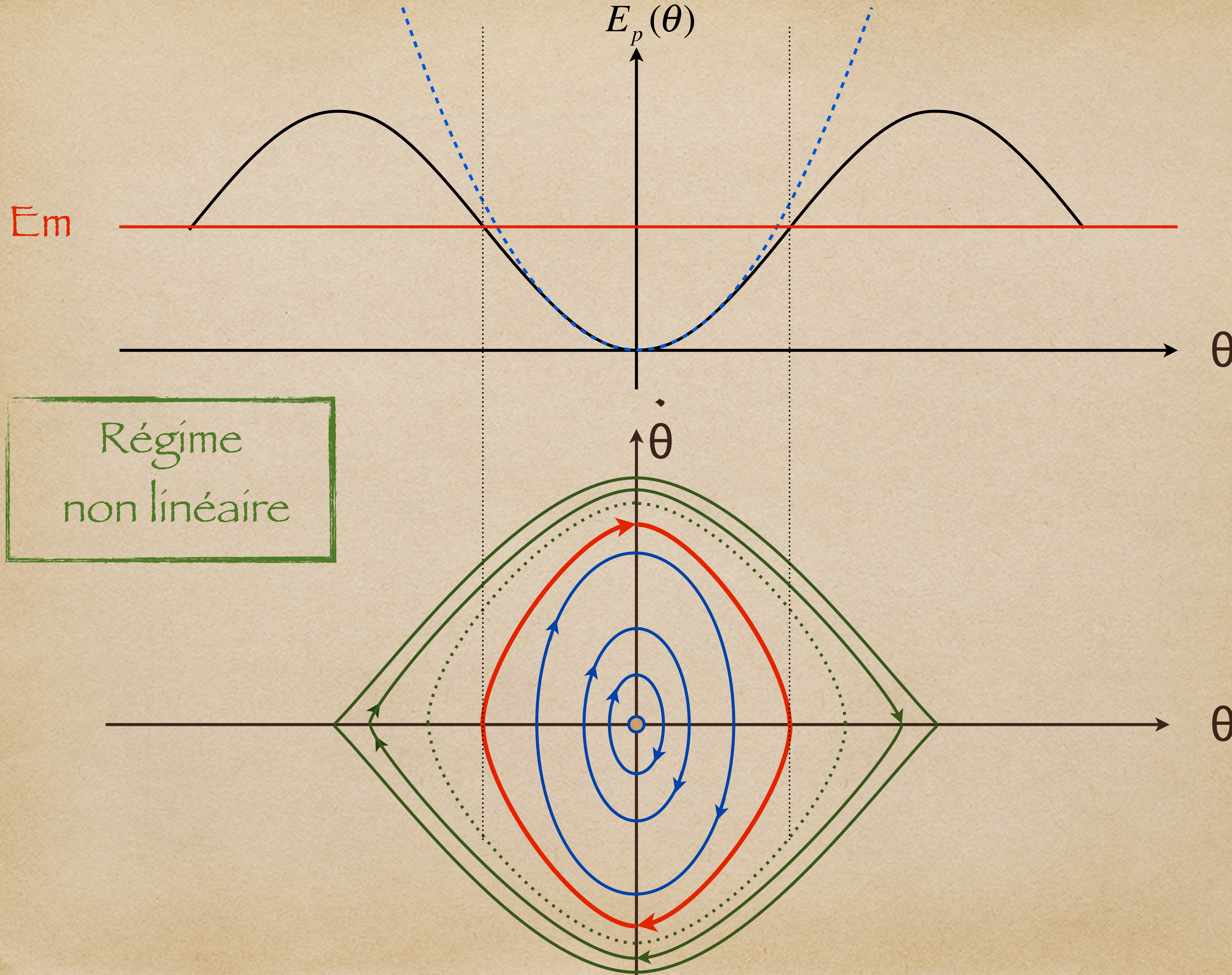
Régime linéaire

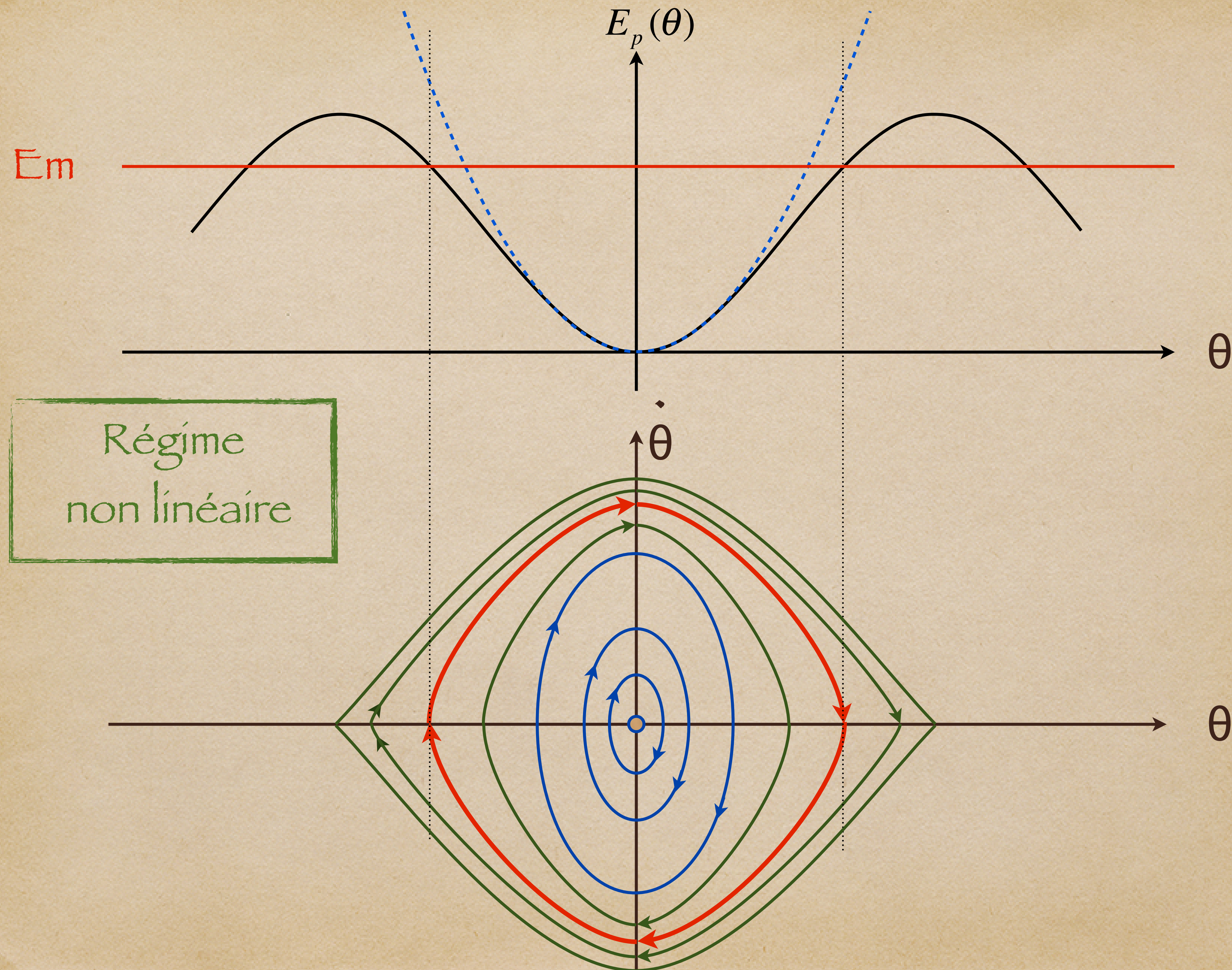




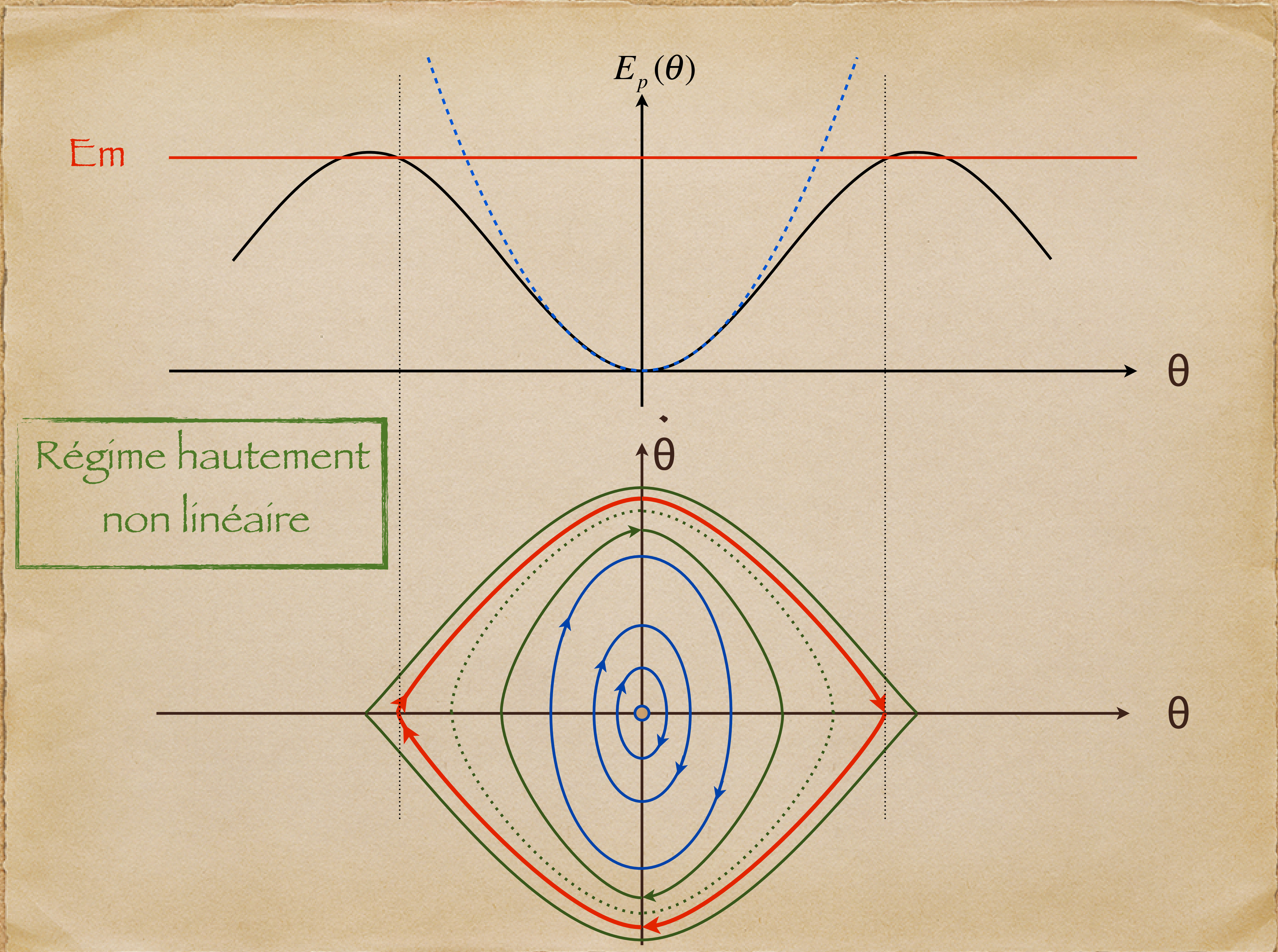
$E_p(\theta)$
Em
θ
Régime linéaire
$\dot{\theta}$
θ

Régime non linéaire

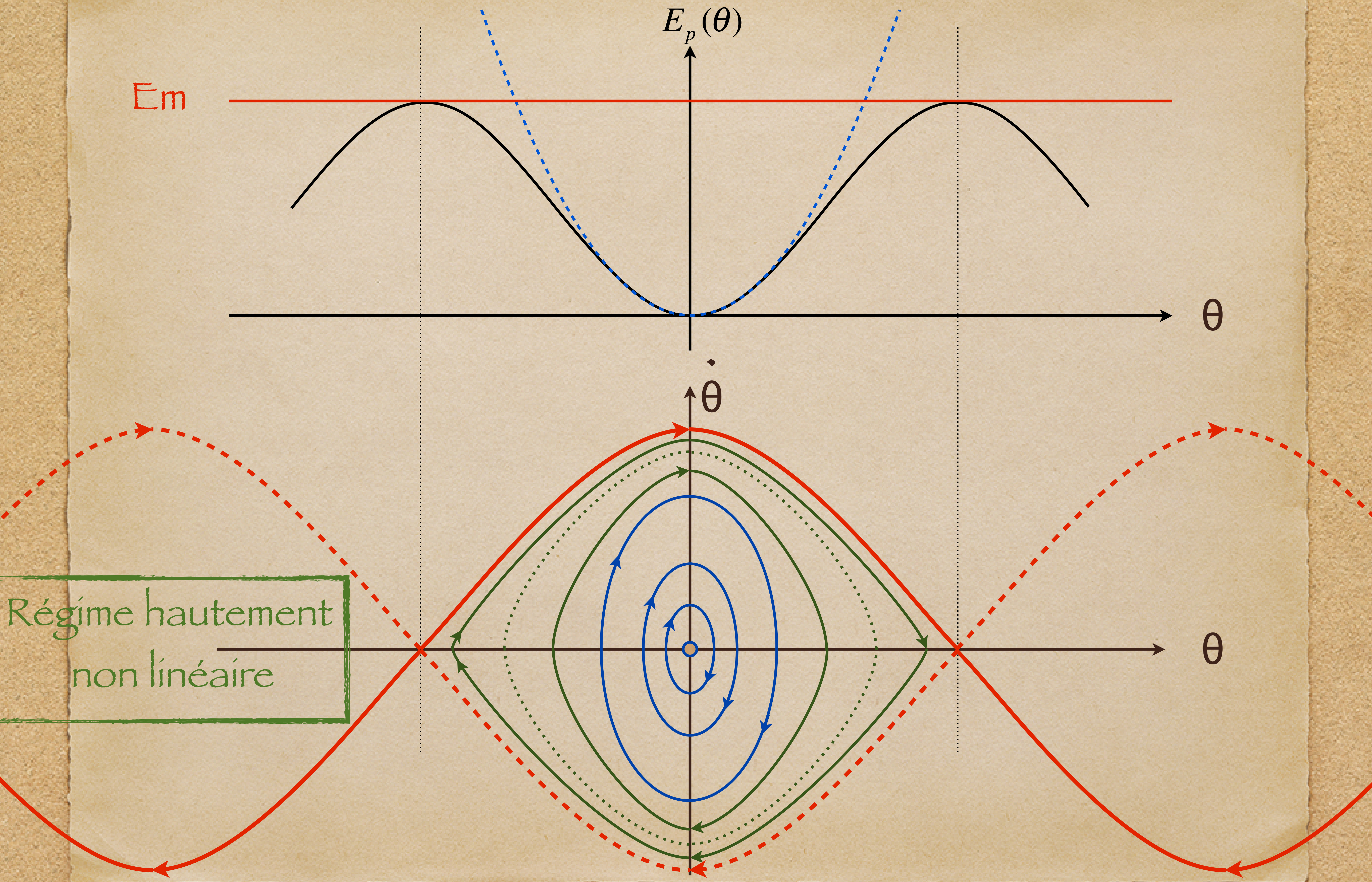




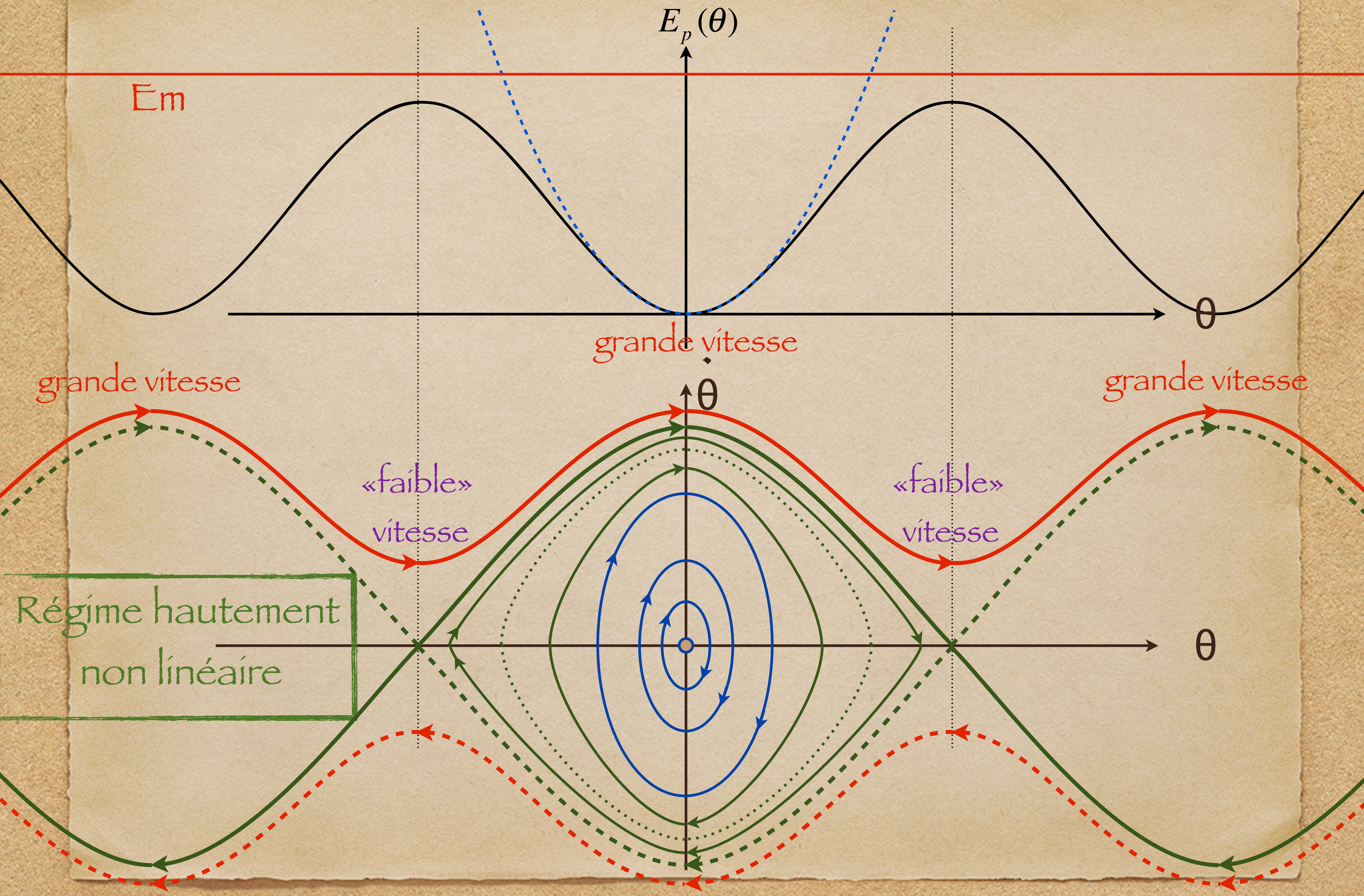
RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide



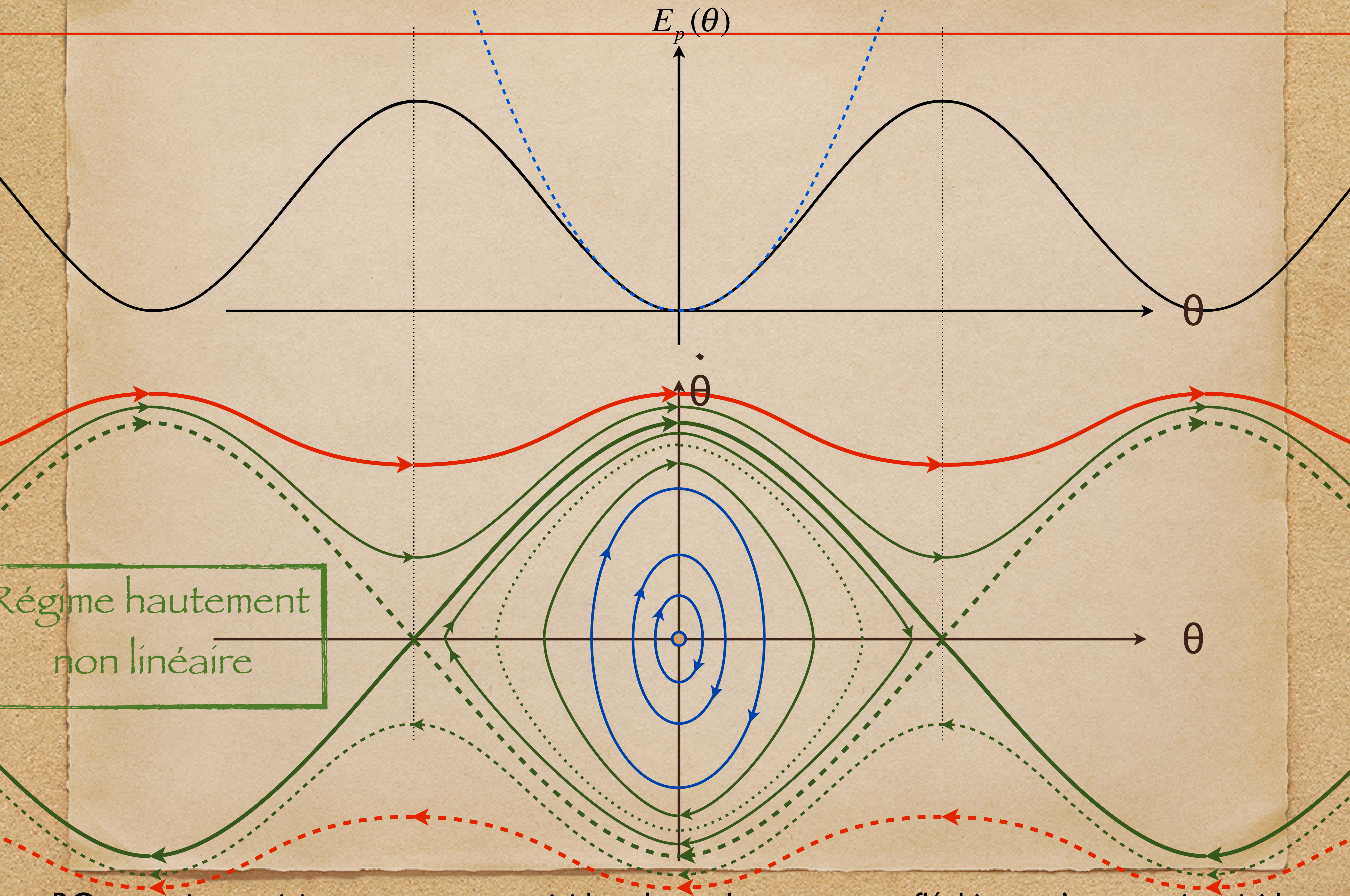
RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide



RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide



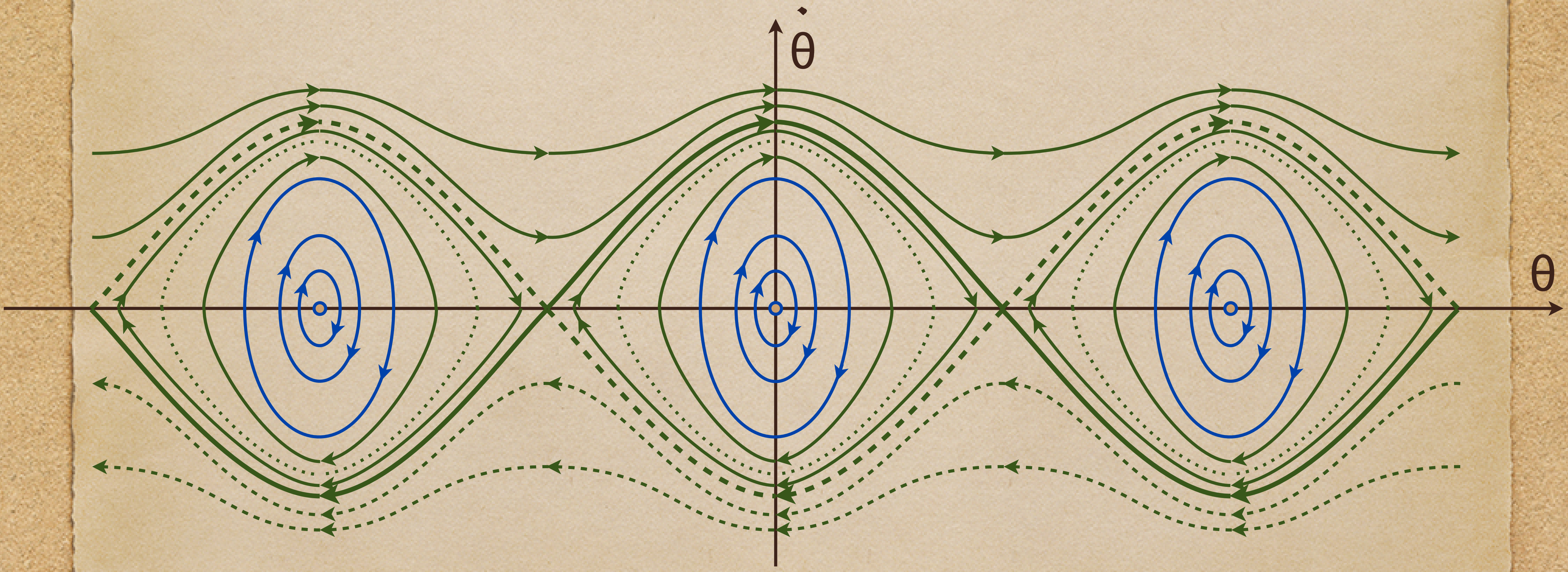
RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide



RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide

Portrait de phase complet :

Ici, le régime non linéaire correspond au cas particulier du pendule simple.



RQ : on raisonne ici sur un «rotateur rigide» : la corde ne peut pas fléchir => c'est une tige rigide

Conclusion :

- Tout minimum (à dérivée 2nd non nulle) peut être approximé par un potentiel parabolique au voisinage de l'équilibre.

- Le régime linéaire est caractérisé par des trajectoires elliptiques dans l'espace des phases : solution sinusoïdale de période indépendante de l'amplitude.

- Les trajectoires sont déterminées par la donnée de l'énergie mécanique.
  Ce sont des courbes fermées car il n'y a pas de frottement.

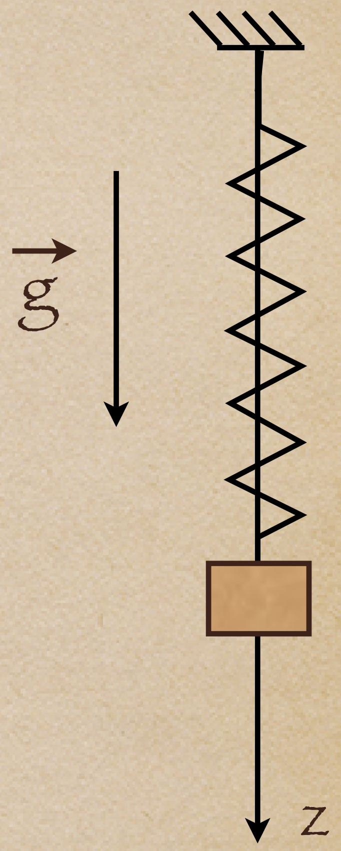
- Les effets non linéaires se manifestent à mesure que l'amplitude augmente et se traduisent par une déformation de l'ellipse dans l'espace des phases.

  [Il n'y a plus une fréquence unique du signal, on parle alors d'enrichissement du spectre.]

2 - L'oscillateur amorti :

Oscillateur non harmonique

On prend désormais en compte le terme de friction linéaire : $f = -\alpha.v$



α - Mise en équation :

* BDF :

Posez le PB :

Méthodes générales :

* Par les forces - P.F.D :
* Par l'énergie - T.E.M avec frottements :

Mise sous forme canonique :

(vu en TP)

Obtenir :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

Définition :

On appelle oscillateur amorti tout système physique obéissant à l'équation :

Changement de variable :

$$Z = z - z_{eq}$$

Obtenir :

$$\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

β - Résolution

Z(t) est solution de l'équation homogène

i - Régime apériodique

ii - Régime critique

iii - Régime Pseudo-périodique

$$\boxed{z(t) = Z(t) + z_{eq}}$$

γ - Portrait de phase $(Z, \dot{Z})$

Dans le cas pseudo-périodique on obtient :

$Z =$

Rq : Z(t) est nulle en moyenne

$\dot{Z} =$

On représente la trajectoire dans le plan $(Z, \dot{Z})$ pour les valeurs suivantes :

$\omega_0 = 5$

Conditions initiales : $Z(0) = 1$ $\dot{Z}(0) = 1$

et pour différentes valeurs du facteur de qualité.

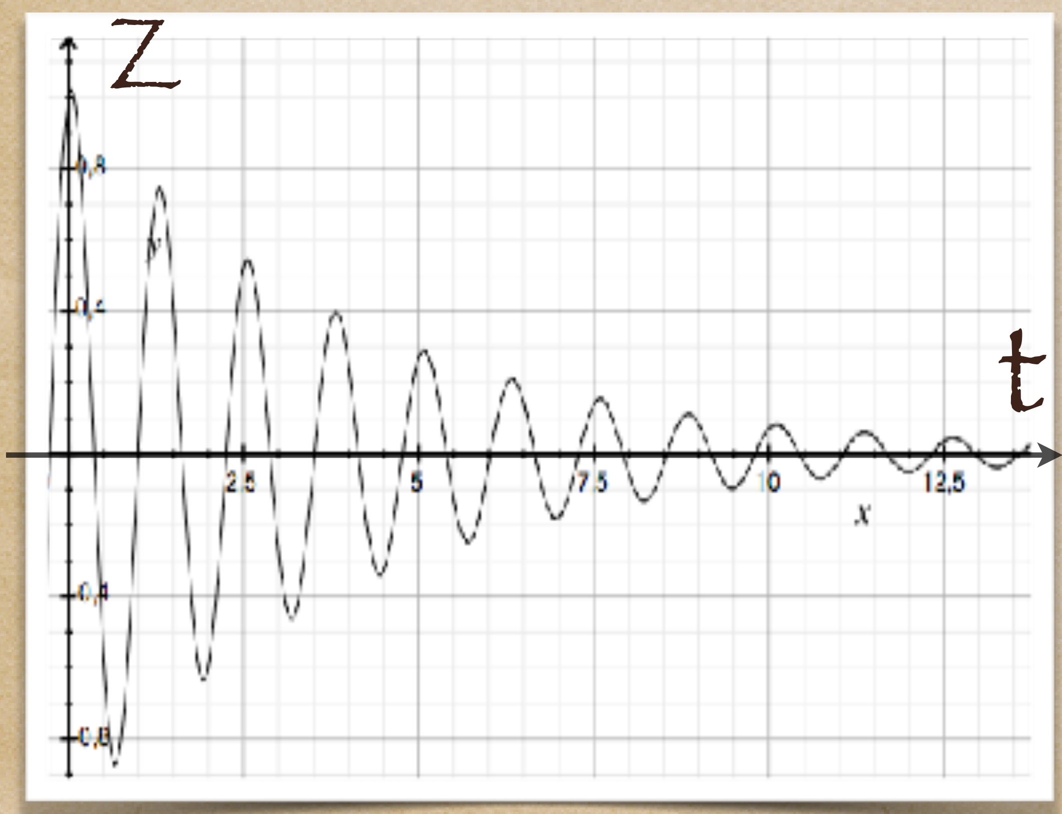
γ - Portrait de phase

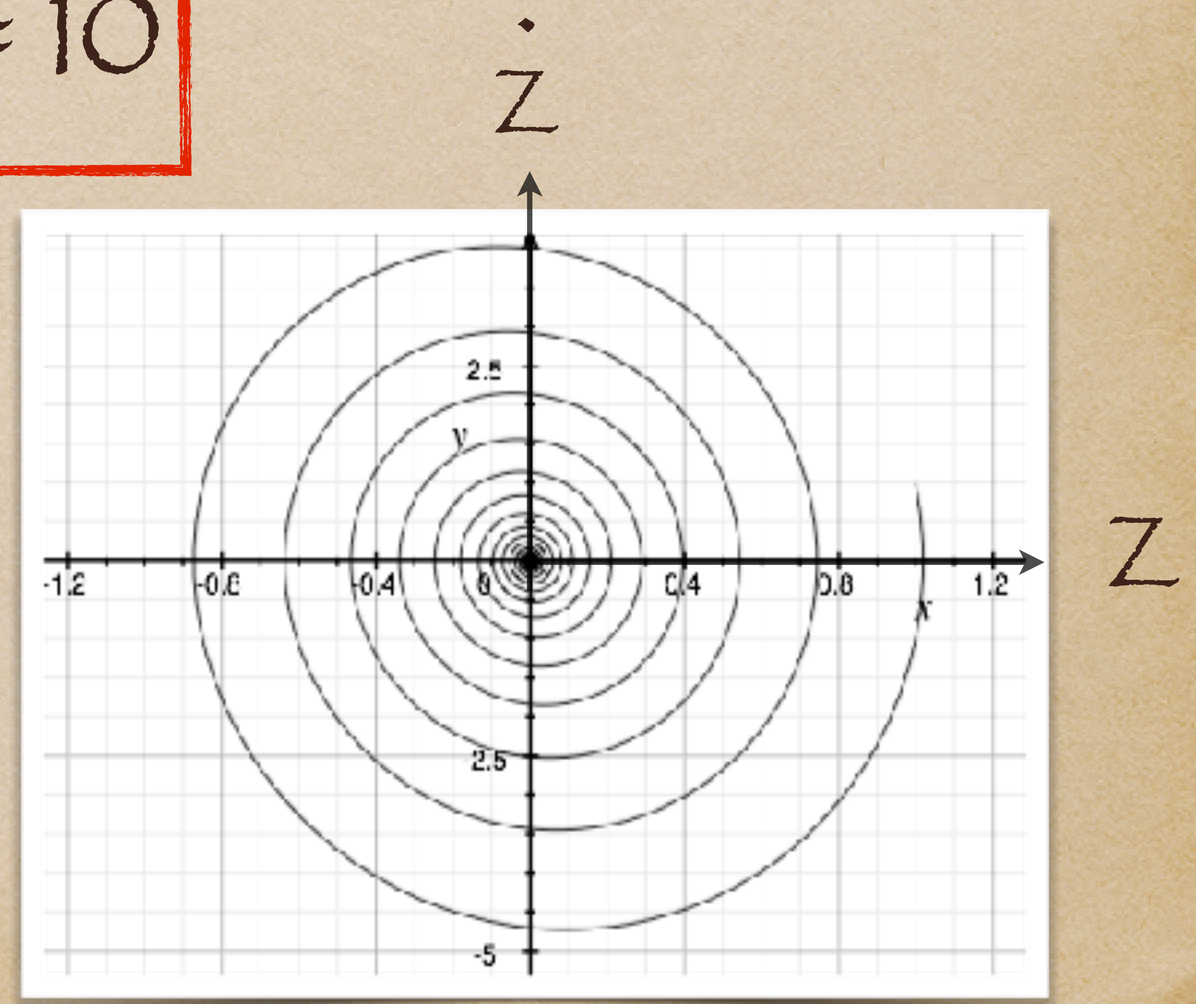
régime pseudo-périodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$\boxed{Q = 10}$



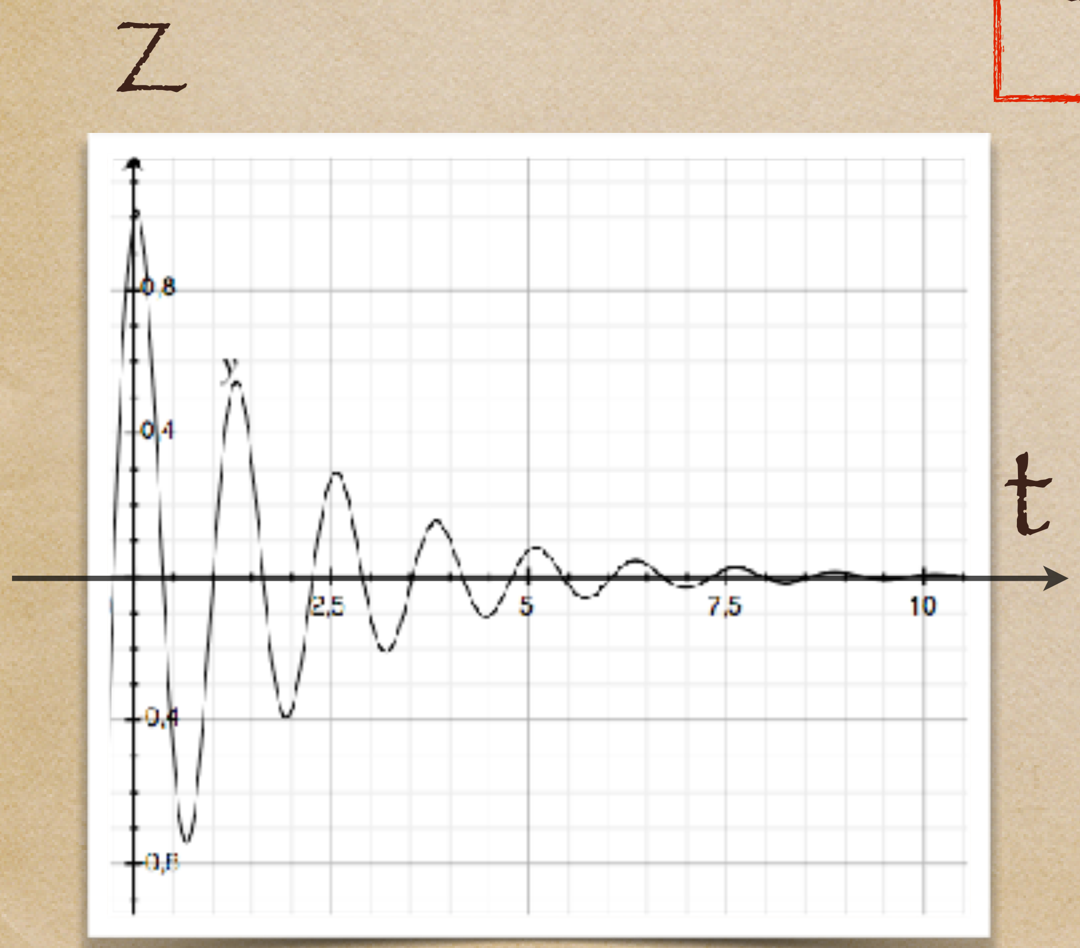


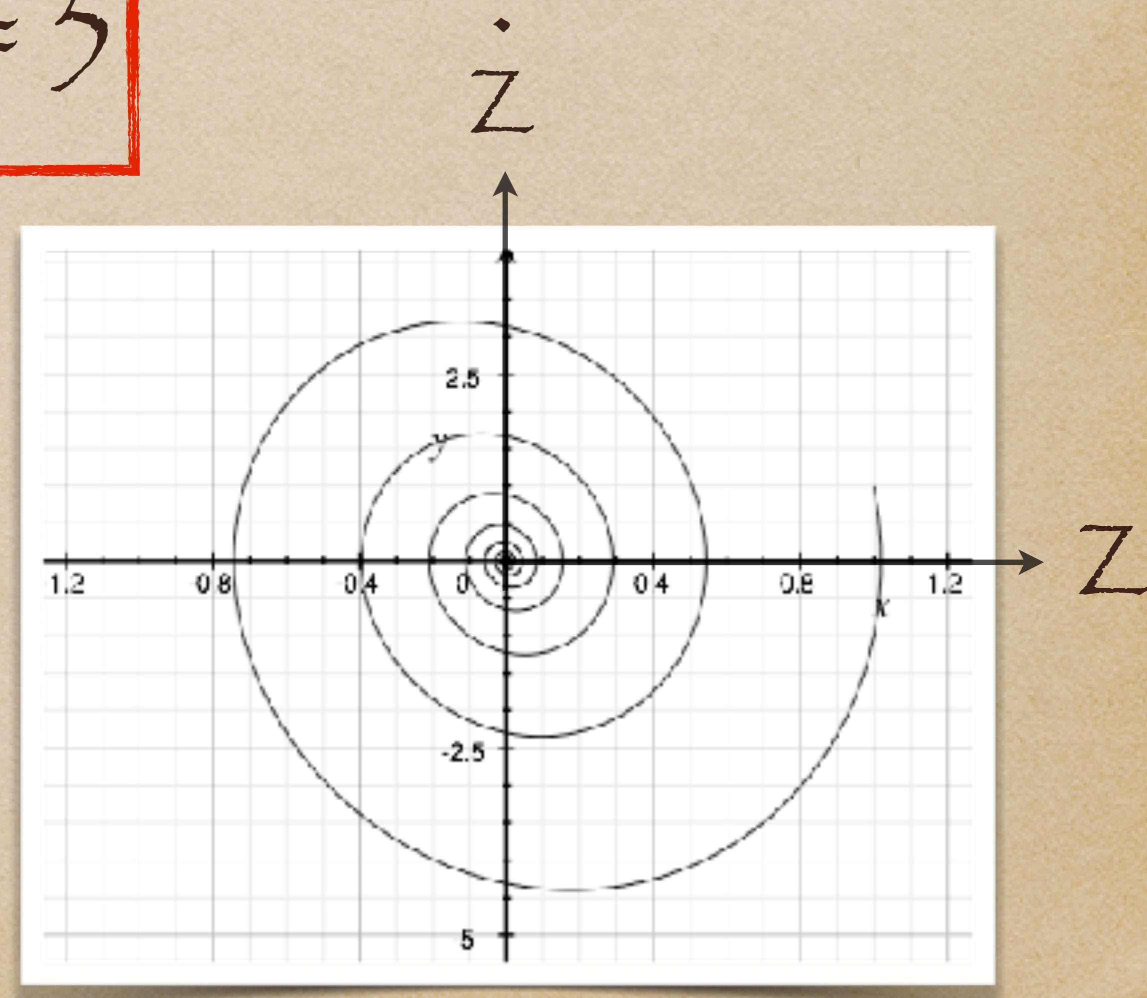
régime pseudo-périodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$\boxed{Q = 5}$



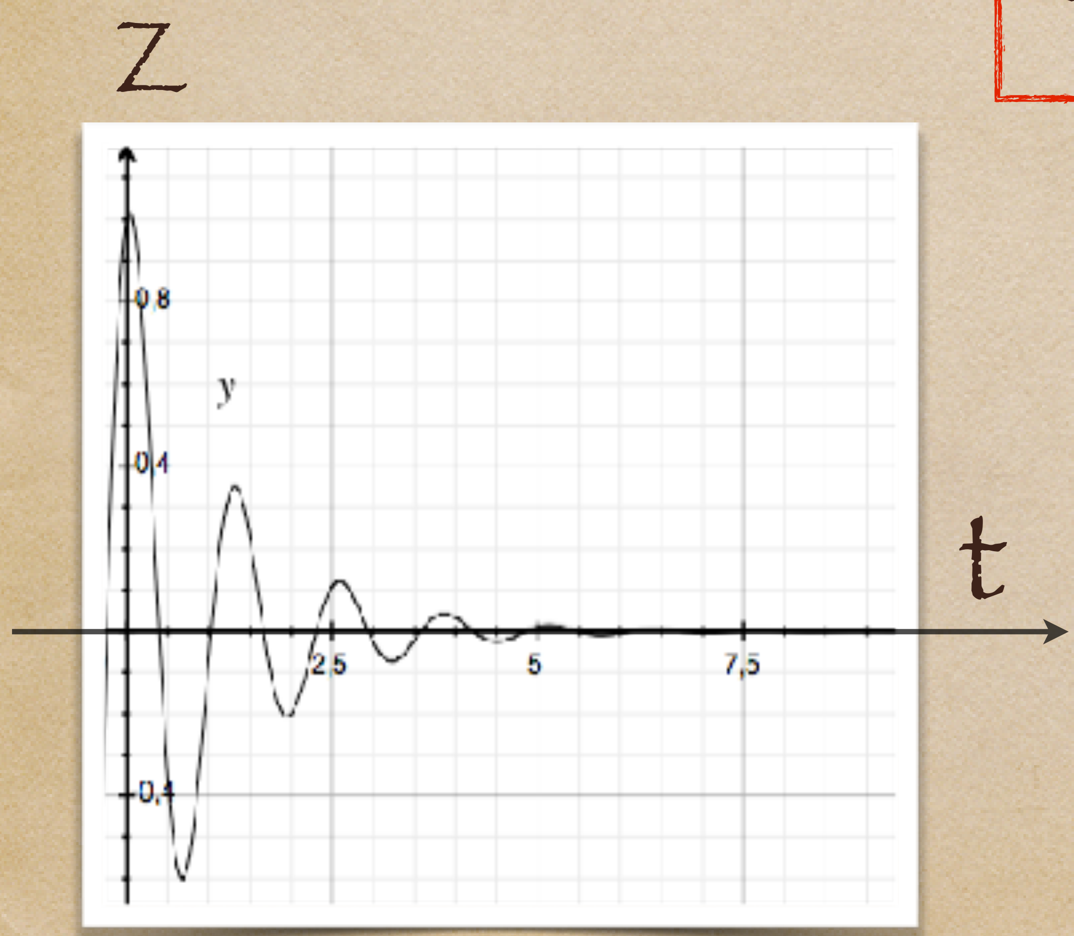


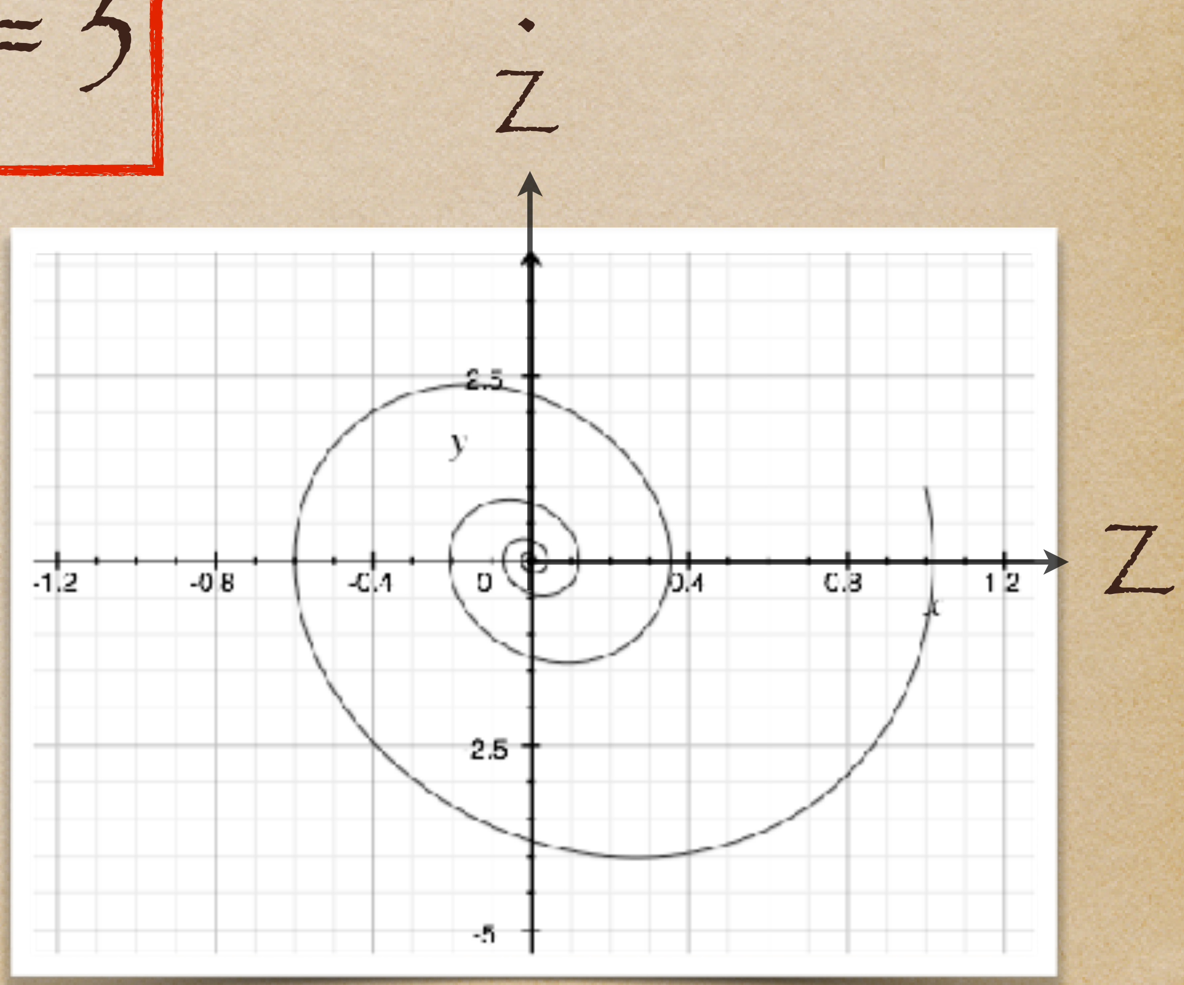
régime pseudo-périodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$\boxed{Q = 3}$



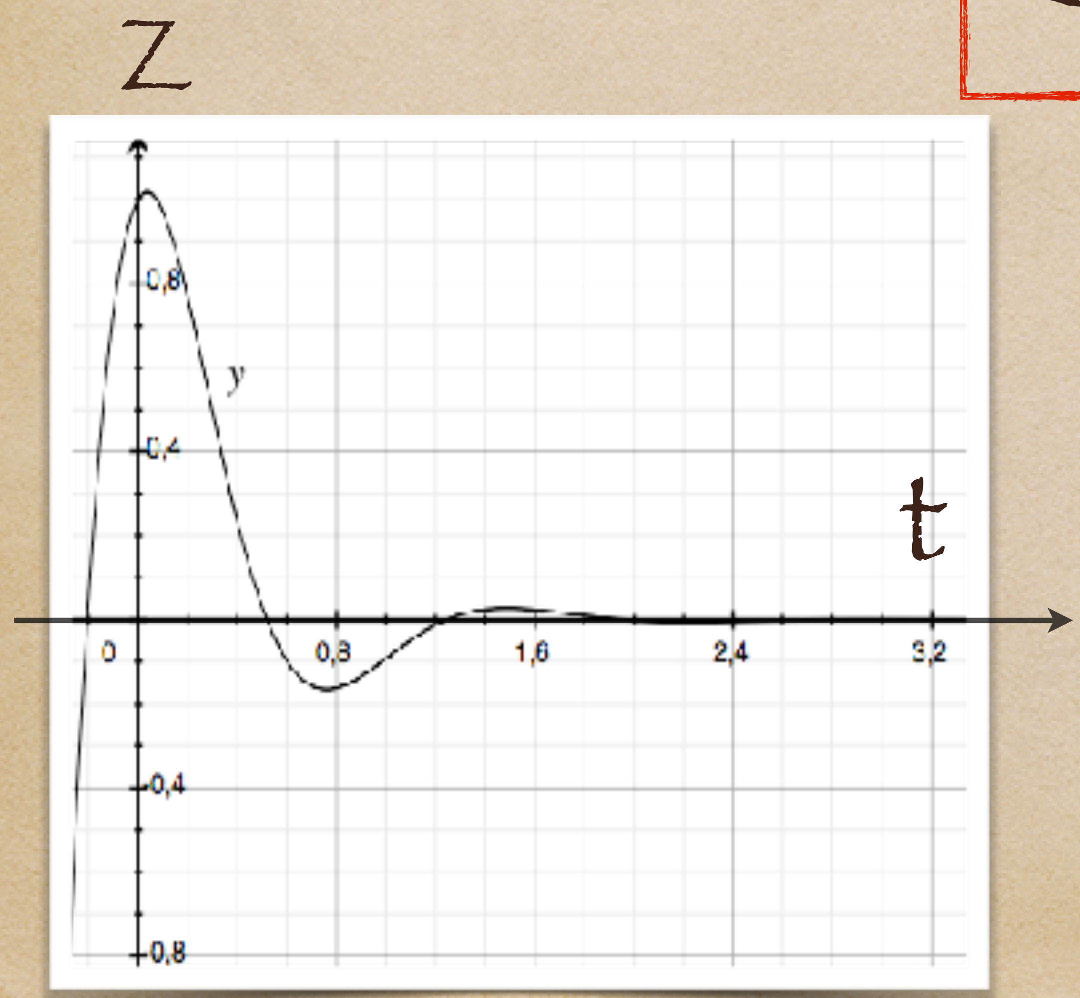


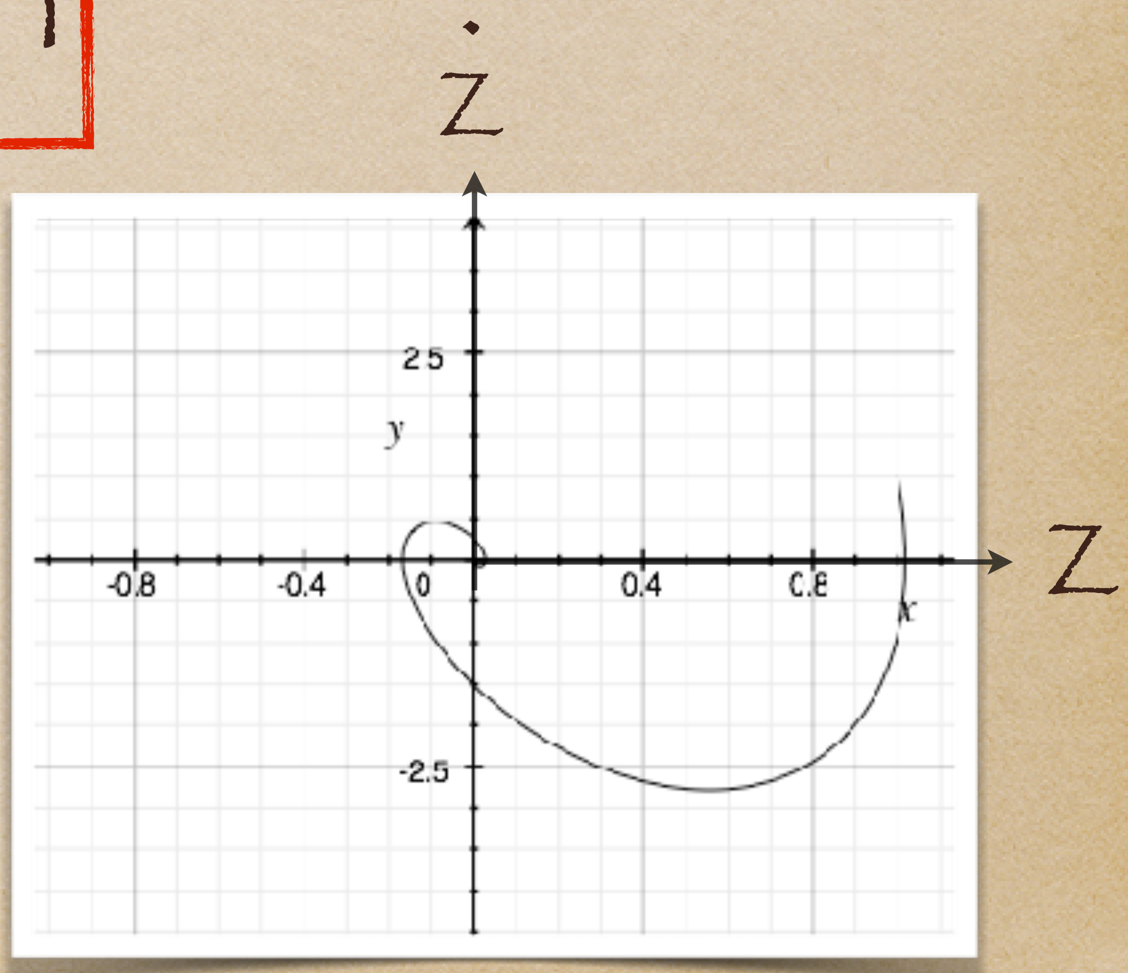
régime pseudo-périodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$\boxed{Q = 1}$



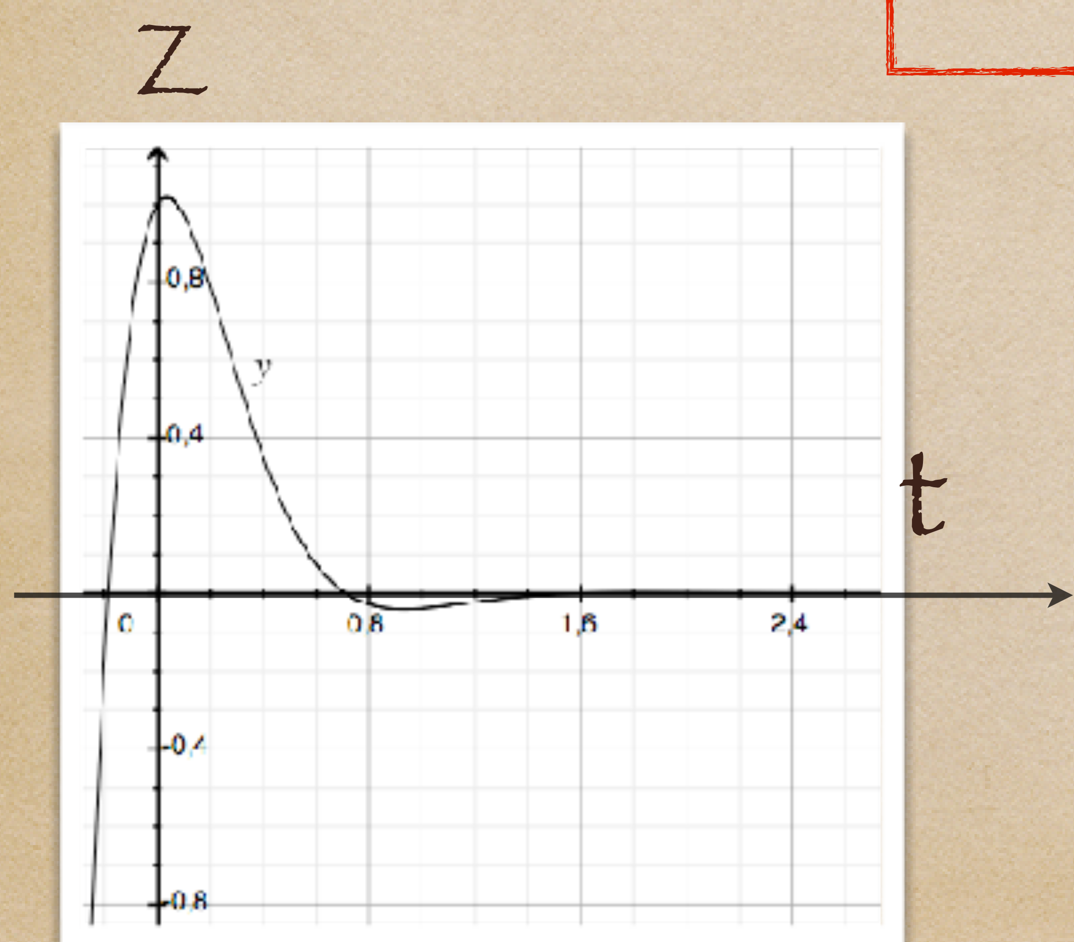


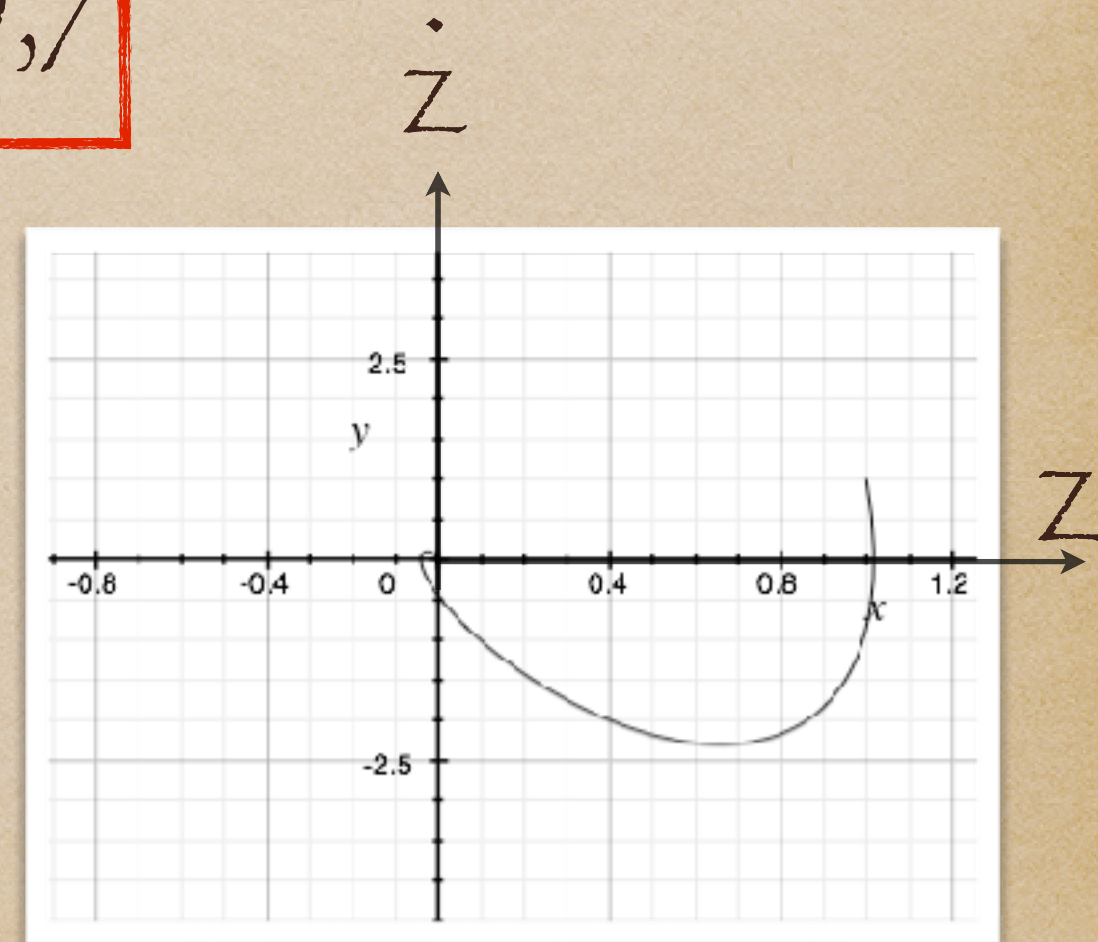
régime pseudo-périodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$\boxed{Q \approx 0{,}7}$





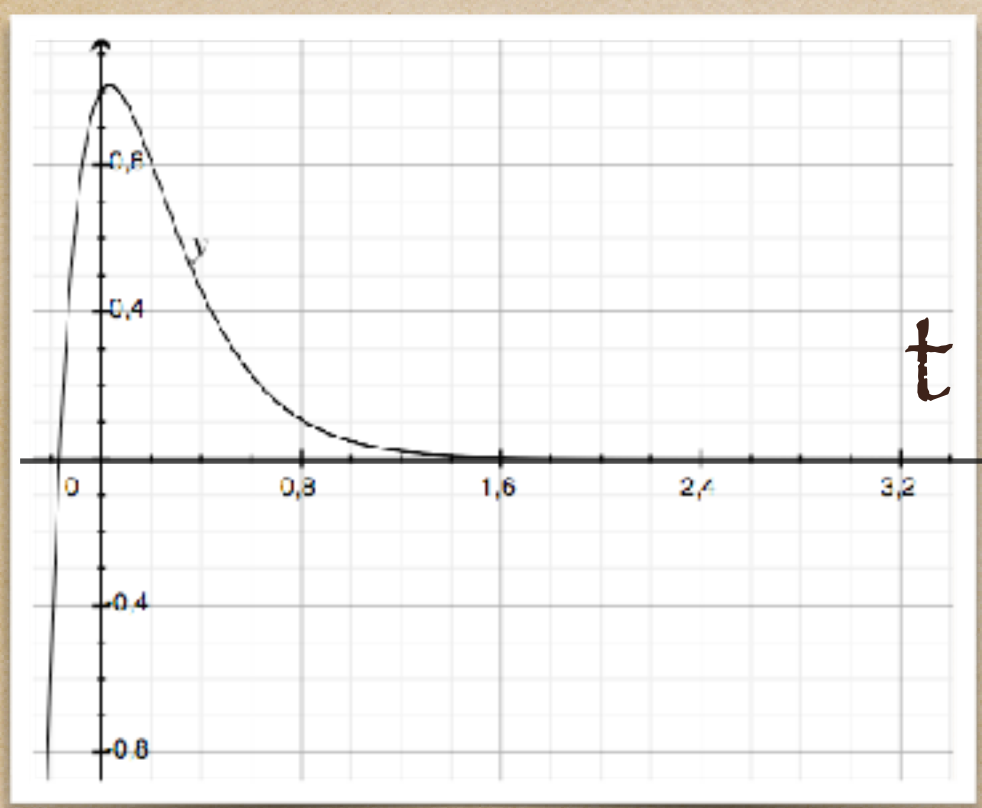
régime critique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

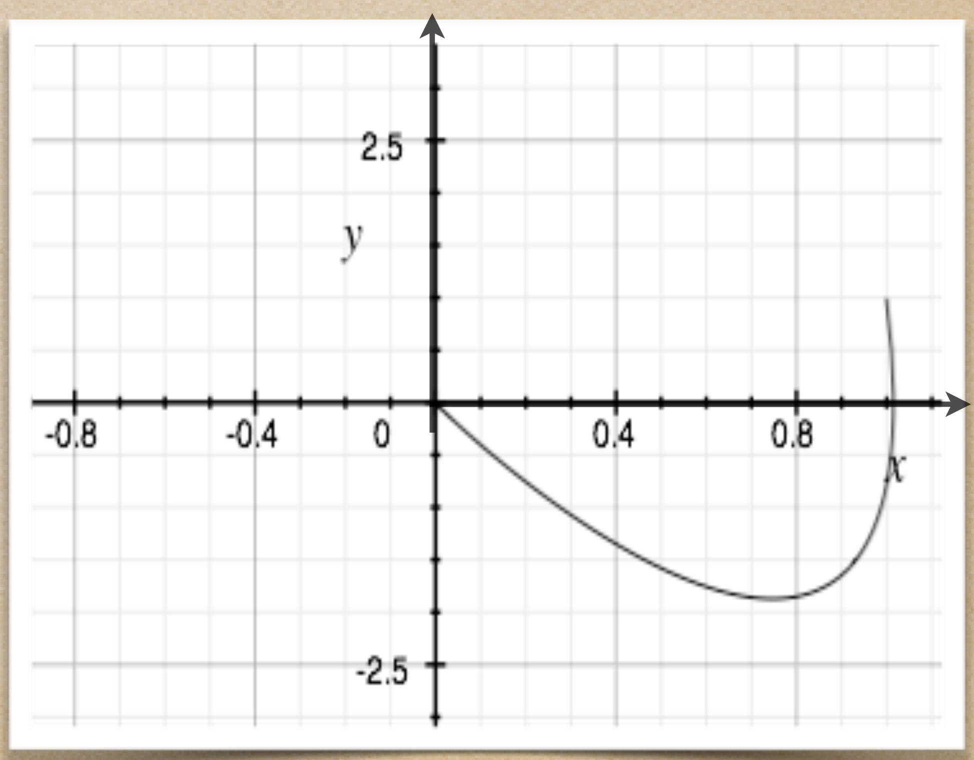
$\boxed{Q = 1/2}$

Z



t

$\dot{Z}$



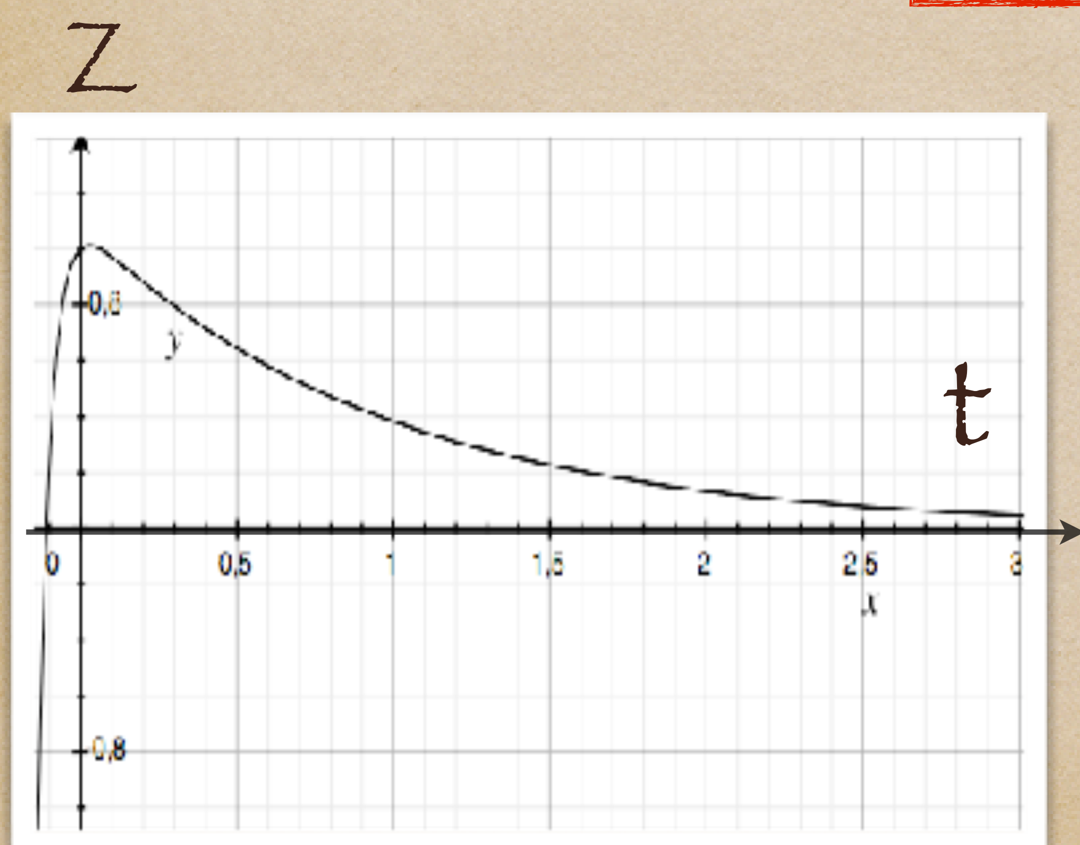
Z

régime apériodique :

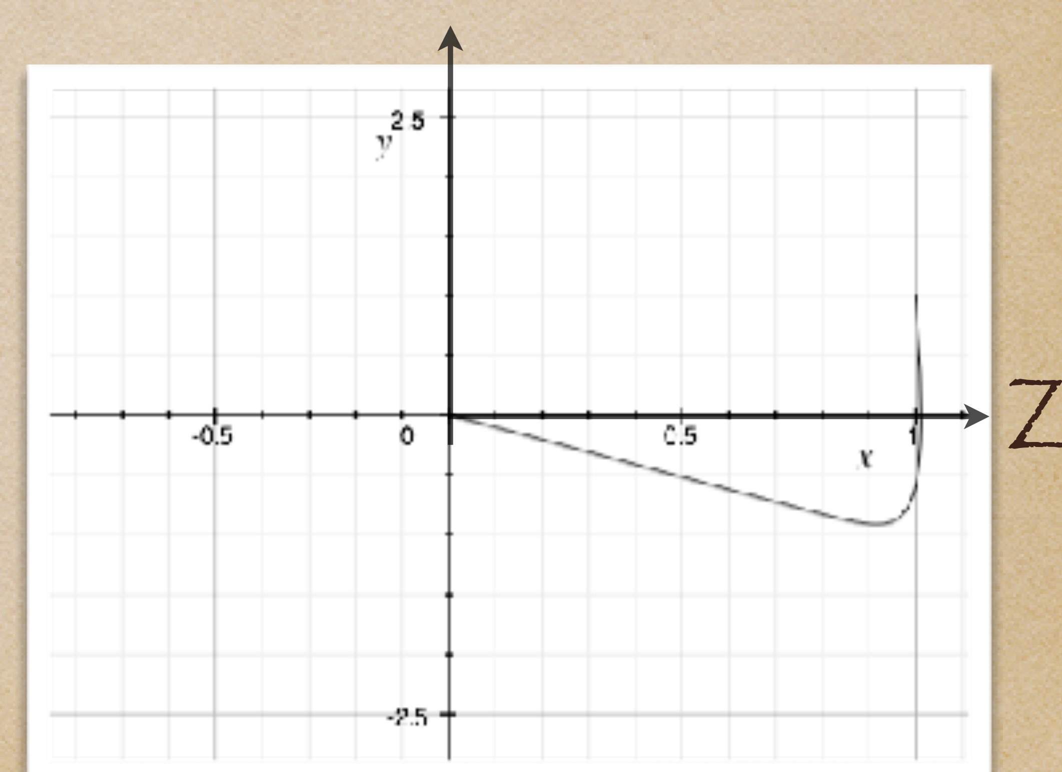
$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$

$$\boxed{Q = 1/5}$$



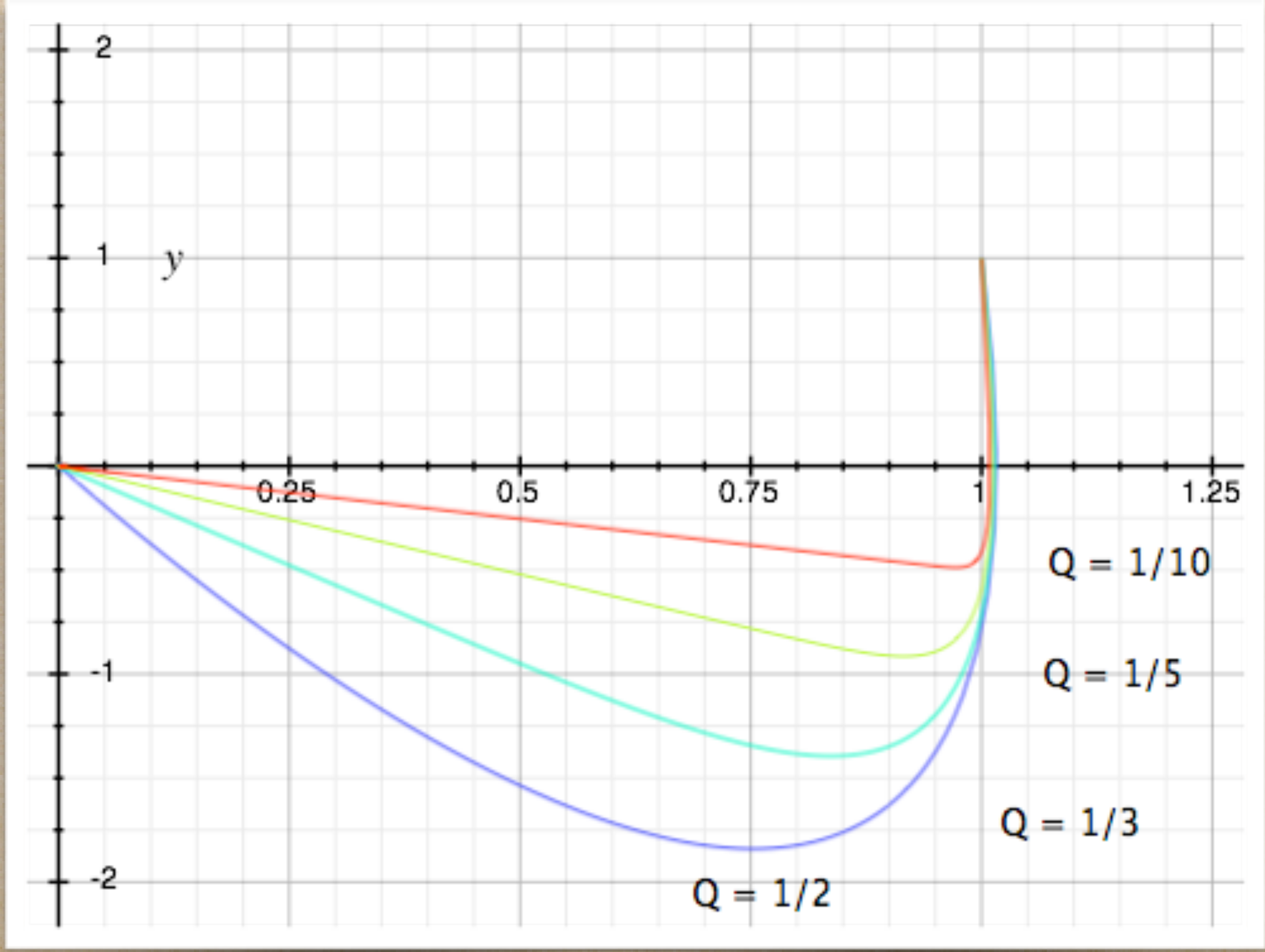
$\dot{Z}$



régime apériodique :

$\omega_0 = 5$

$Z(0) = 1 \qquad \dot{Z}(0) = 1$



Conclusion

En régime amorti les trajectoires dans l'espace des phases ne sont plus fermées :

- il y a perte d'énergie mécanique
- l'amplitude décroît exponentiellement

3 - Analogie électromécanique complète

Celle-ci ne concerne que les systèmes linéaires, électriques ou mécanique, et principalement les oscillateurs.

Ainsi, tout système n'a pas nécessairement d'analogue, mais le constat d'une analogie entre les équations différentielles linéaires permet d'utiliser le résultat d'un système pour décrire l'autre :

Une fois mises sous forme canoniques, les équations sont exactement les mêmes !

$$\boxed{\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{eq}}$$

<u>Exemple :</u> de façon très concrète, l'industrie automobile a longtemps étudié les amortisseurs de voiture avec des composants électroniques à moindre coût, car les comportements physiques sont exactement identiques.

eq° RLC série sur la charge q_c :

$$\boxed{\frac{d^2 q_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq_c}{dt} + \frac{1}{LC} q_c = \frac{E}{L}}$$

eq° OH amorti sur la position x :

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m}}$$

ELEC	MECA
q_c	x
i	v
E	F_0
L	m
C	1/k
R	λ
$E_{MAG} = \frac{1}{2} L i^2$	$E_C = \frac{1}{2} m v^2$
$E_{ELEC} = \frac{1}{2C} q^2$	$E_p^{el} = \frac{1}{2} k x^2$
$P = ui$	$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$
$\frac{1}{2} R i^2$	$\frac{1}{2} \lambda v^2$

Facteur de qualité :

De même les méthodes étudiées dans un domaine sont analogues dans l'autre :

Portrait de phase :

PFD <=> LDM :

Bilan de puissance :