Portraits de phase

Méca 4

Objectif :

Exploiter le caractère unidimensionnel d'un problème à un degré de liberté, pour donner une représentation plus complète [en 2D] de l'évolution d'un système mécanique ou électrocinétique

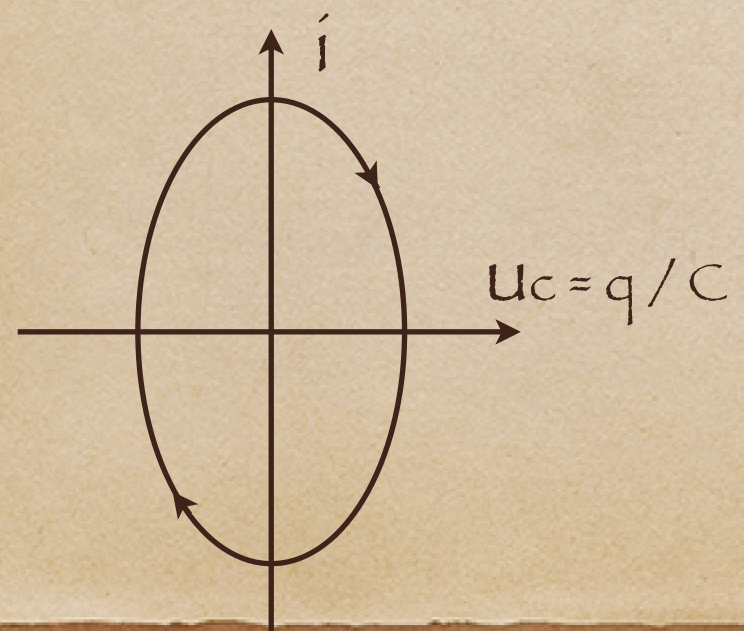
Nouvelle approche de l'évolution : portrait de phase

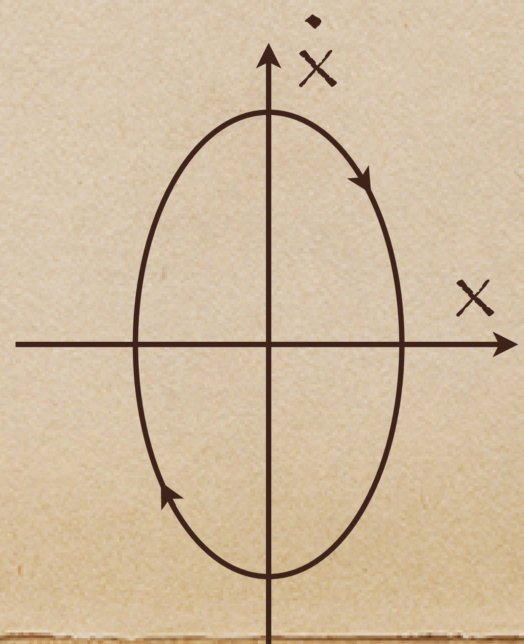
Il s'agit d'une nouvelle façon de représenter la «trajectoire» d'un système :

- Pour tout système à un degré de liberté la position est donnée par une unique grandeur scalaire : position $x(t)$, angle $\theta(t)$, abscisse curviligne $s(t)$ pour une trajectoire qcq.

- On peut donc représenter en 2D à la fois la position et la vitesse dans le plan $(x, \dot{x})$

<u>Analogie électromécanique :</u> C'est une façon de tracer la caractéristique





I Systèmes du premier ordre

Charge et décharge d'un condensateur :

$$\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{\tau}u_c=\frac{1}{\tau}E$$

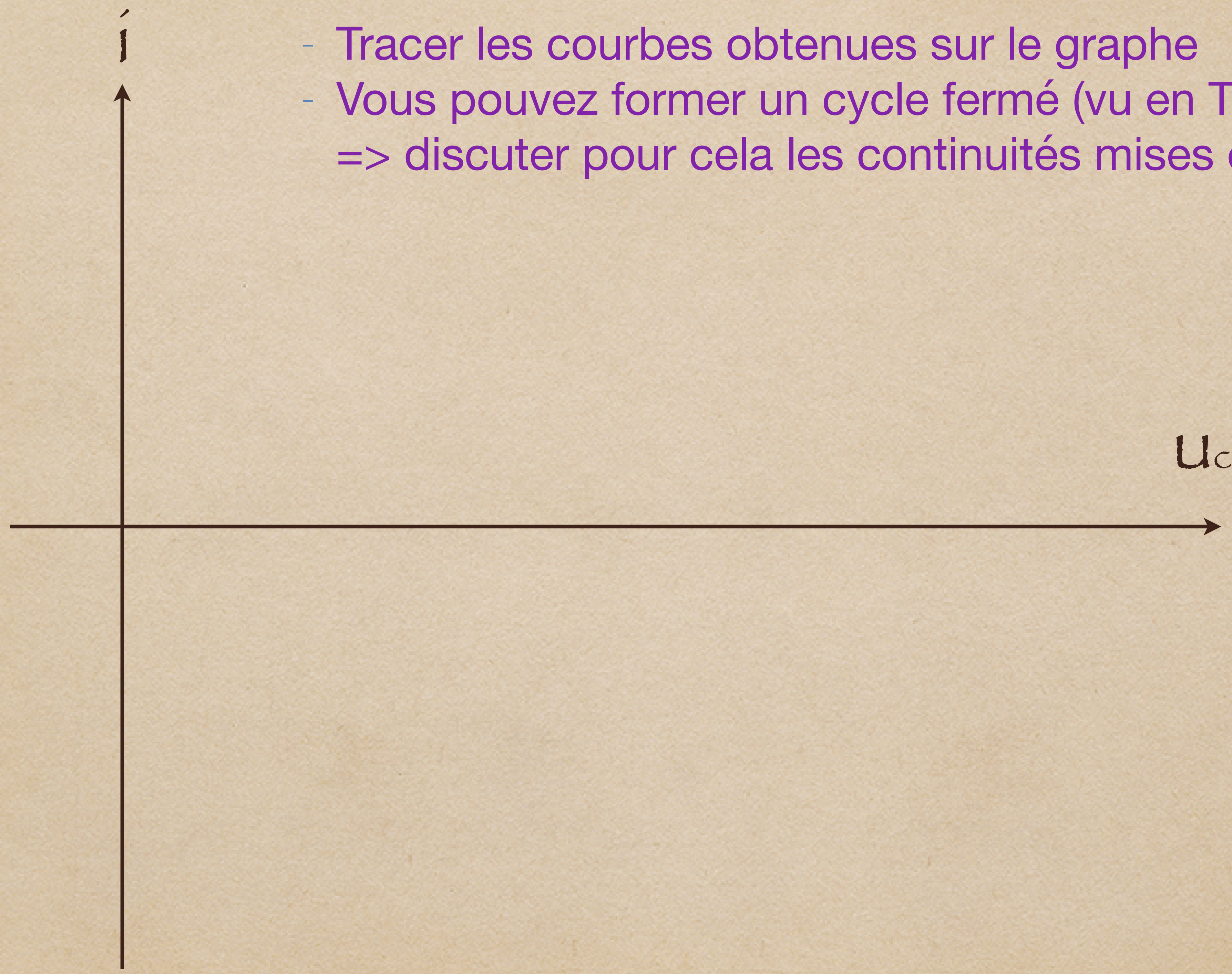
Montrer que : $i=\frac{E}{R}-\frac{u_c}{R}$ eq° de droite

Dans les deux cas : quelles sont les condition initiales ?
Quels sont les régimes permanents ?
En déduire le sens de parcours de ces eq° de droite.

$$\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{\tau}u_c=0$$

Montrer que : $i=-\frac{u_c}{R}$ eq° de droite

- Tracer les courbes obtenues sur le graphe
- Vous pouvez former un cycle fermé (vu en TP)
  => discuter pour cela les continuités mises en jeu



Chute verticale avec frottements linéaires :

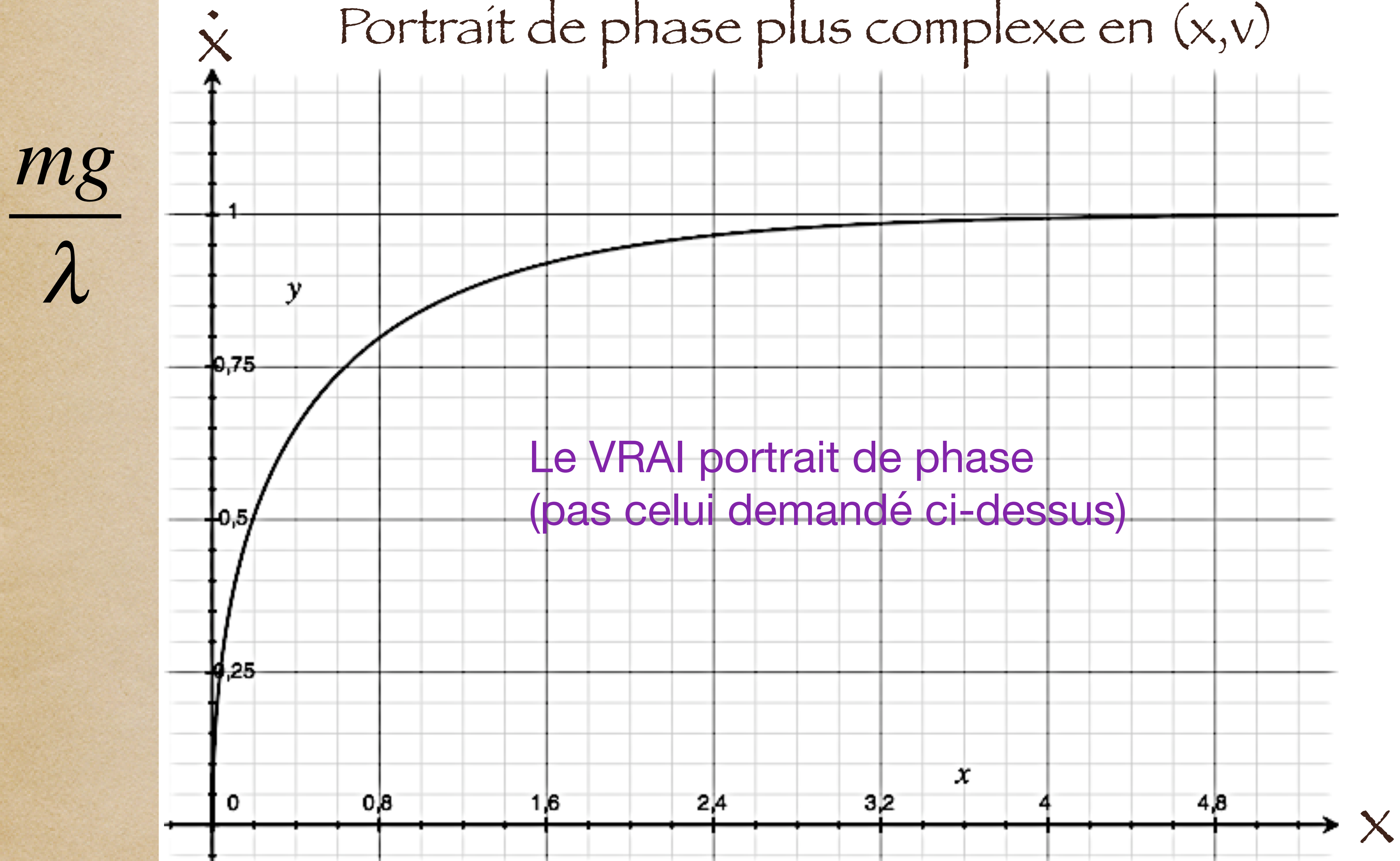
$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Calculer x(t) avec : $$x(t) = \frac{mg}{\lambda} t + \frac{mg}{\lambda} \tau \left[e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right]$$

Par analogie, avec l'établissement du courant (voir ci-après)
quel serait le portrait de phase mécanique analogue à celui électrique ?
(abscisse et surtout ordonnée)

Essayer de tracer son cycle complet quel interprétation lui donné.
(pas facile)

Portrait de phase plus complexe en (x,v)



Analogie électromécanique : Etablissement du courant.

On peut déduire immédiatement l'éq° diff. du circuit équivalent :

représenter le circuit E-R-L   et obtenir par analogie (sans calcul)

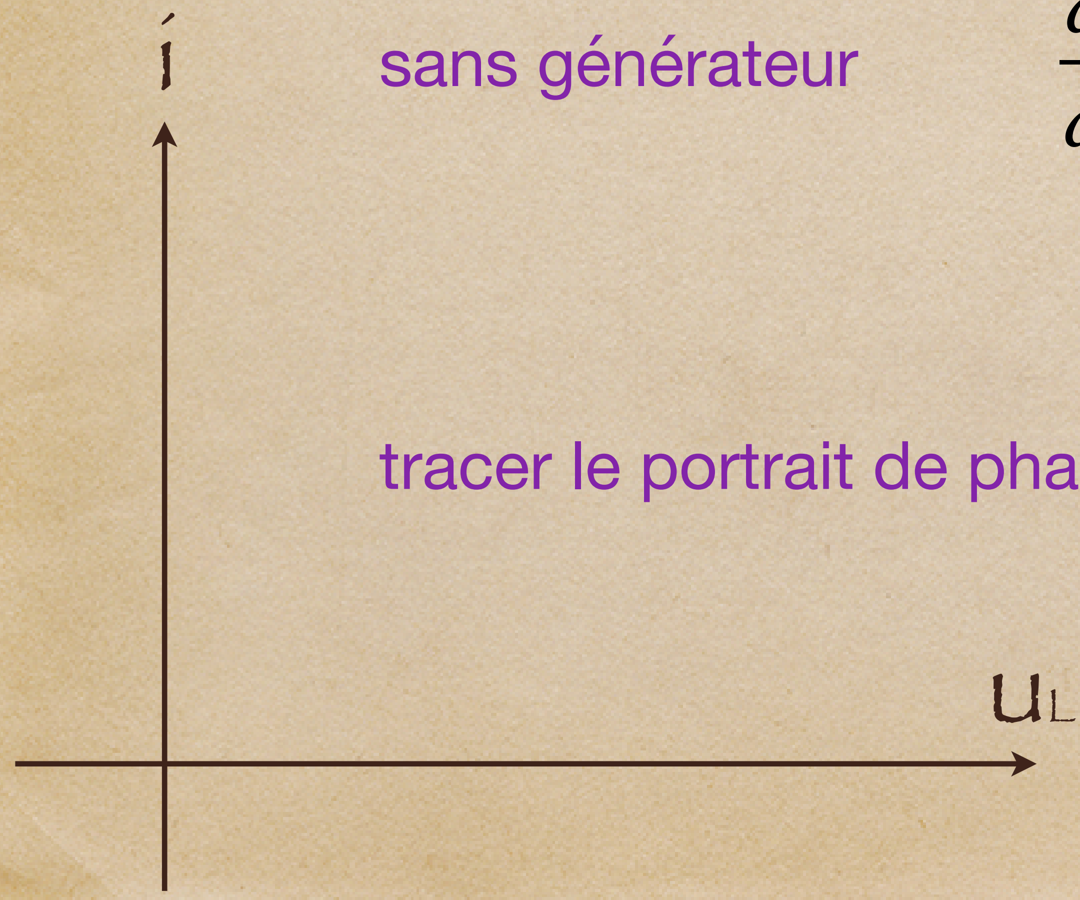
avec générateur

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{\tau}i=\frac{E}{L} \qquad i=\frac{E}{R}-\frac{u_L}{R}$$

sans générateur

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{\tau}i=0 \qquad i=-\frac{u_L}{R}$$

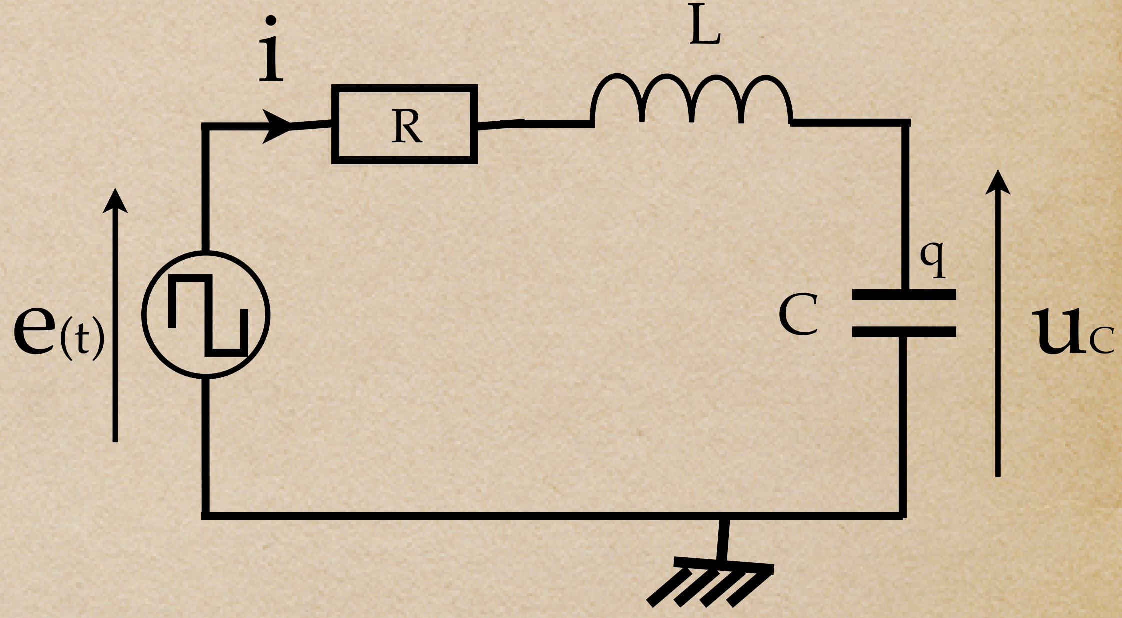
tracer le portrait de phase



II Systèmes du second ordre

<u>Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RLC série :</u>

$$e(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \;\; [T] \\ E & \frac{T}{2} \leq t < T \;\; [T] \end{cases}$$



On se place dans le cas du régime pseudo-périodique : $Q = 4$

et avec $T \gg \tau$

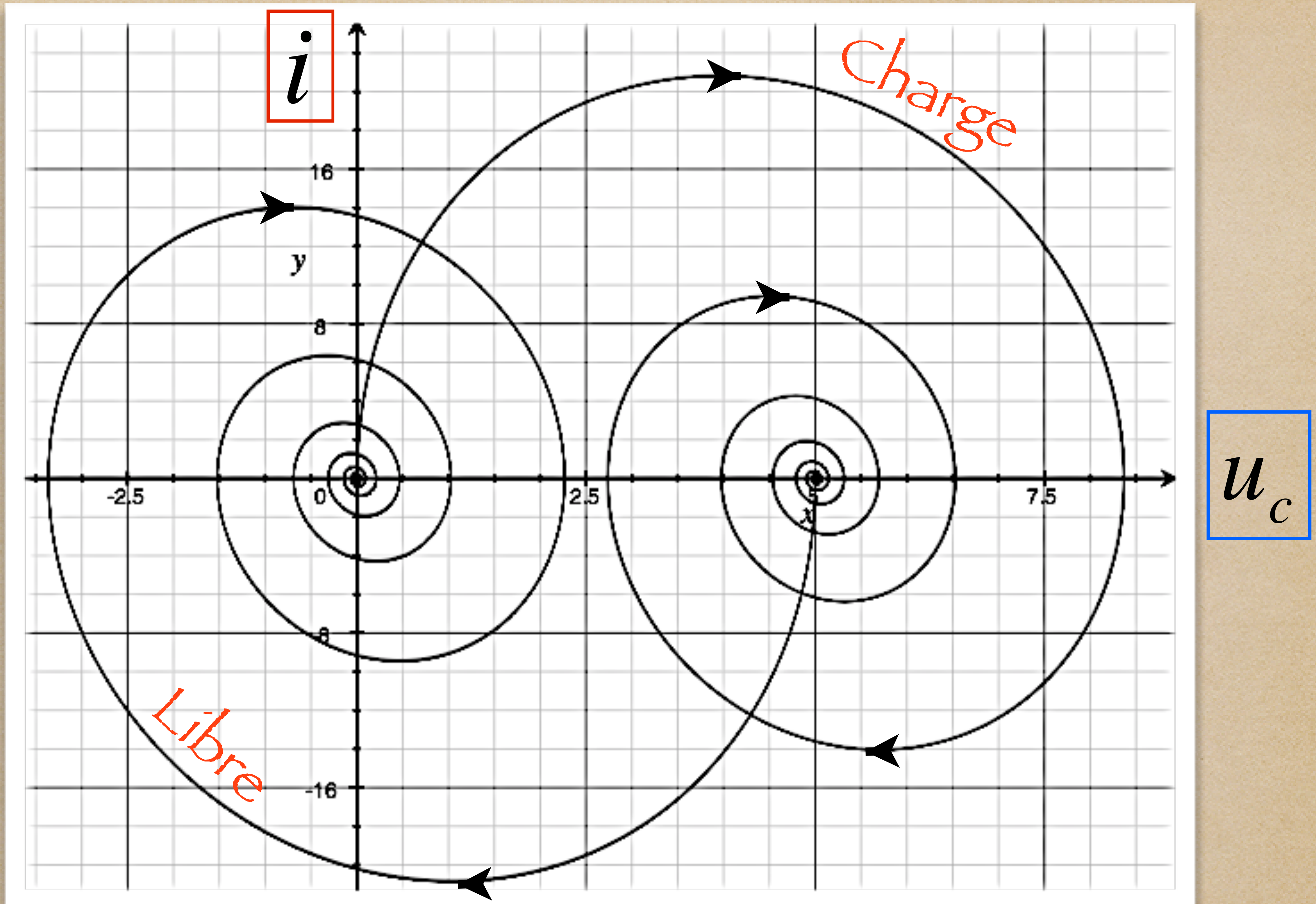
On se place en régime pseudo-périodique :

$$u_c(t) = e(t) + e^{-\lambda t}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

Etablir le courant sous la forme :

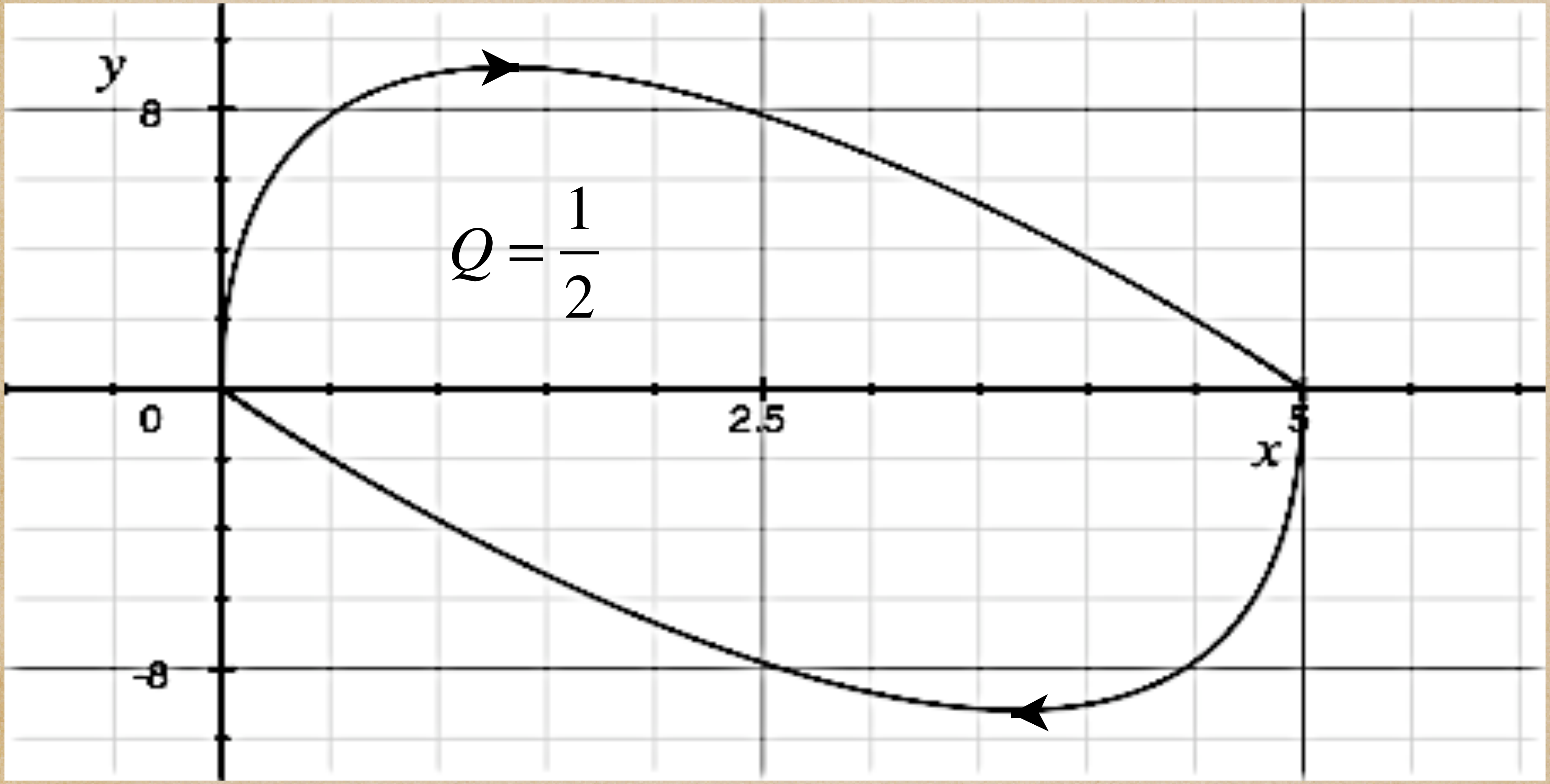
$$i(t) = -\lambda C\left[u_c - e(t)\right] + Ce^{-\lambda t}\left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$

Portrait de phase du circuit RLC série en charge-décharge :

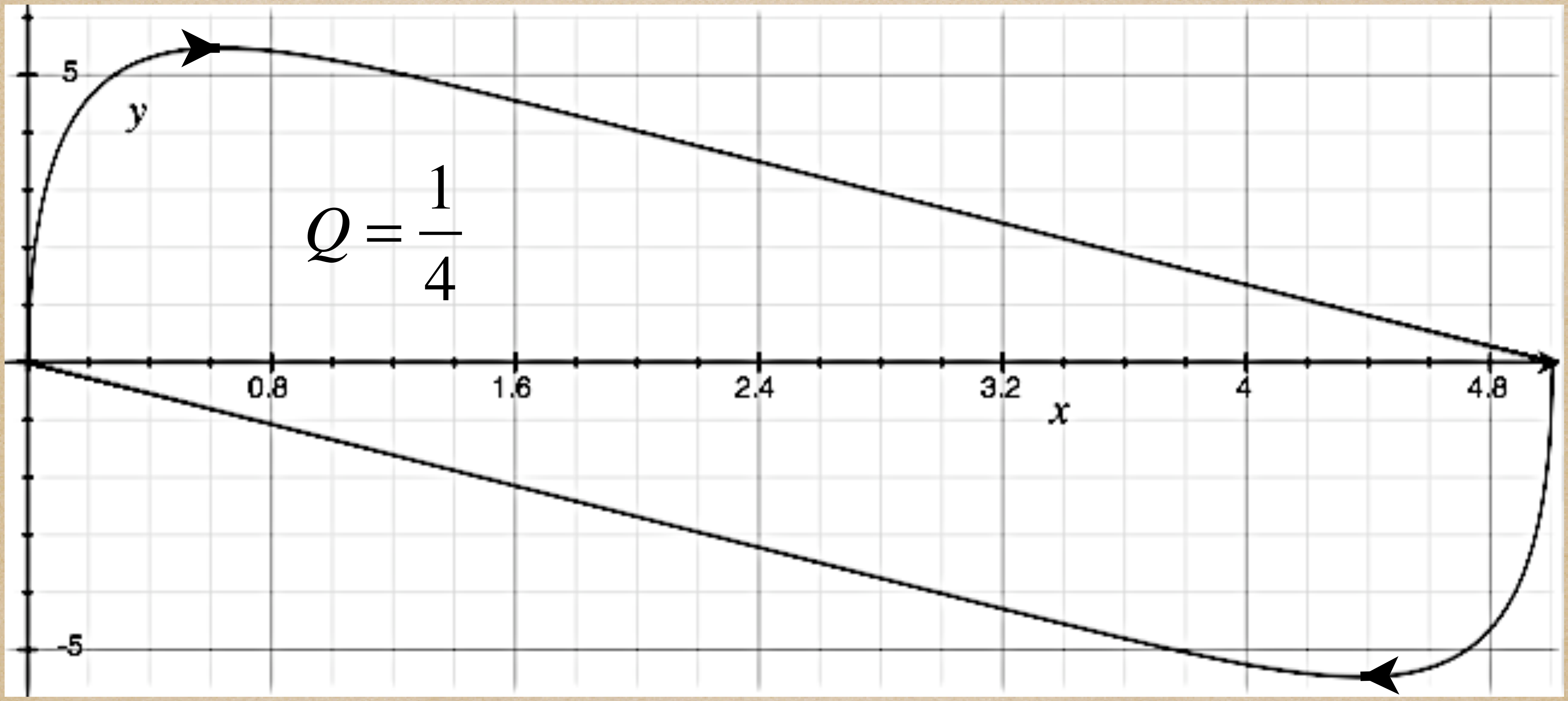


Quelles sont les contraintes en terme de continuités ?
Sont-elles bien vérifiées ?

Régime critique



Régime apériodique



III Généralisation

On considère un système quelconque, mais à un degré de liberté et en évolution conservative dans un potentiel donné par la courbe ci-dessous :

Démo (déjà vue)

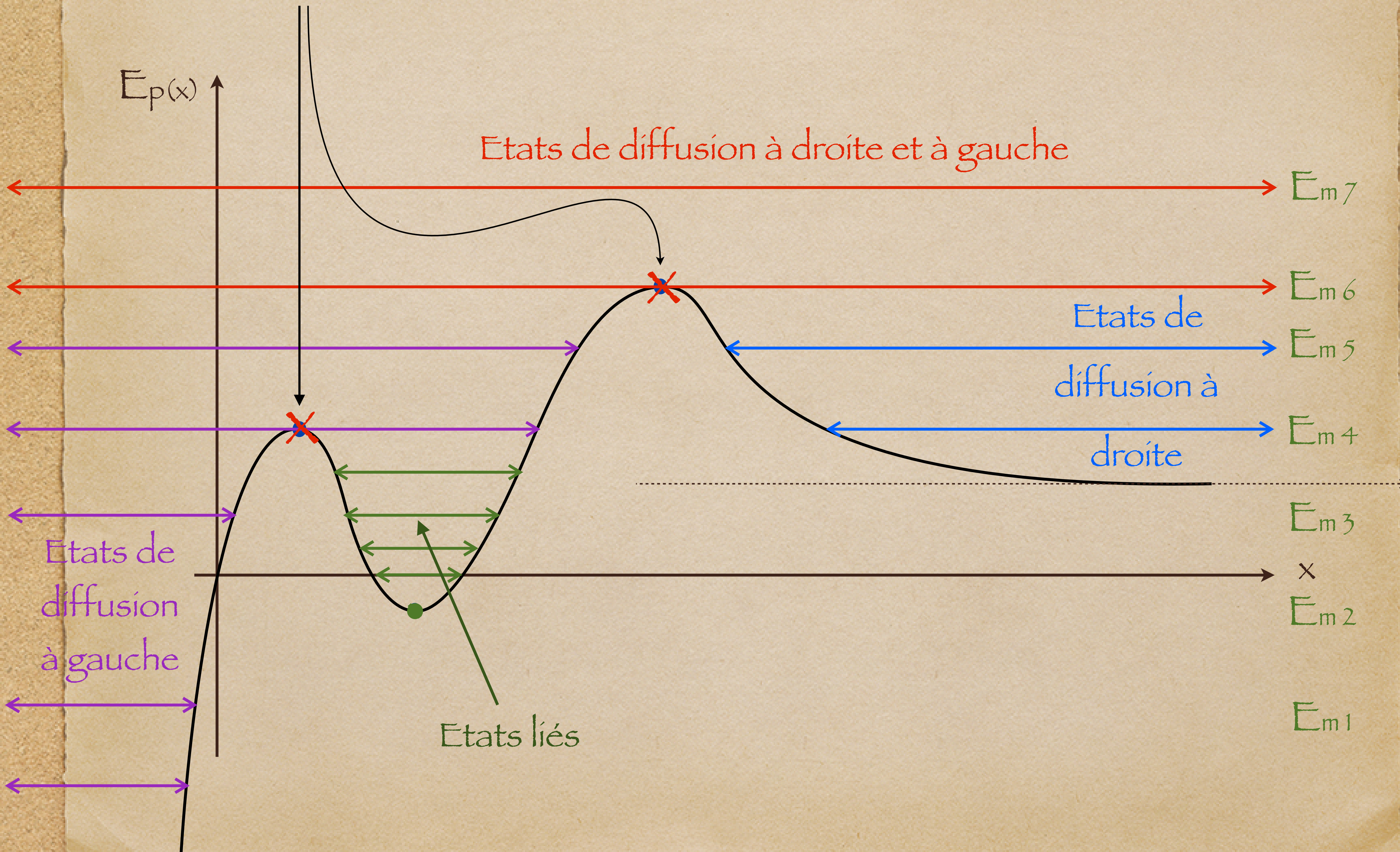
Trajectoires admissibles : $\boxed{\forall E_m, \forall x \quad E_{p(x)} \leq E_m}$

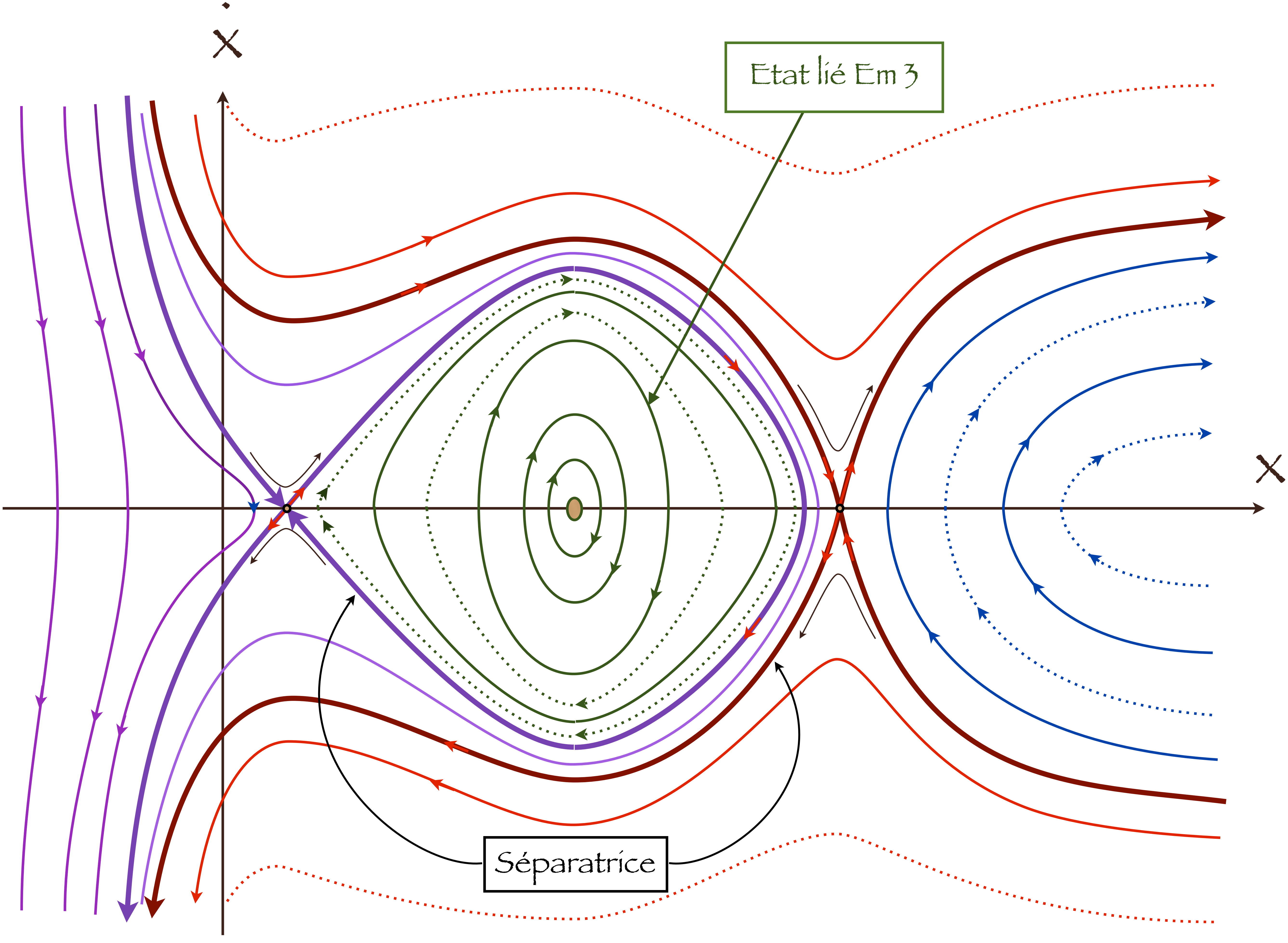
Energie cinétique :

Sens de la trajectoire : Réfléchir sur le graphe :
Comment peut-on savoir le sens de parcours ?

Instabilités :

Points selles ou points de rebroussement





$\dot{X}$
Etat lié Em 3
X
Séparatrice

RQ : MQ & portrait de phase

La mécanique quantique est bâtie sur la mécanique analytique.
Cette dernière décrit des systèmes à plusieurs degrés de liberté et se formalise dans l'espace des phases et sur des principes dits de «moindre action».

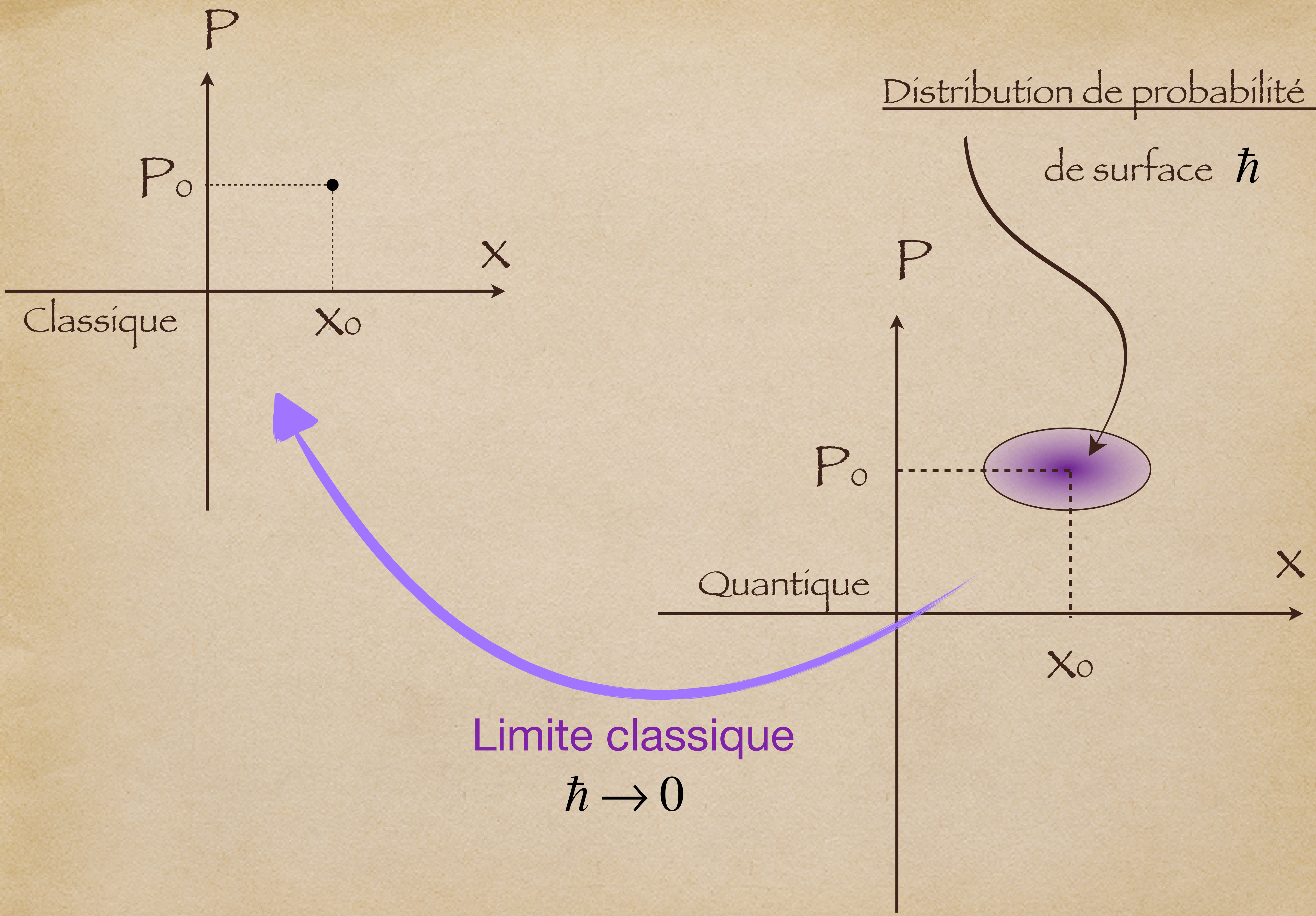
Ex : Passage du classique au quantique

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, un point matériel ne peut être totalement immobile en une position déterminée.

$$\boxed{\Delta X \Delta P \geq \hbar}$$

On construit l'espace des phases c-à-d le plan (X,P)

Un point dans l'espace des phases [ici : X,P] devient une «tâche» de surface supérieure à $\hbar$.



Rq : position et vitesse moyennes dépendent du référentiel et du choix de l'origine