Travail et énergie

Dans les référentiels galiléens

Objectif :

- Définir des grandeurs conservatives dont l'étude va permettre de simplifier la résolution des pb. de mécanique.
- Présenter les théorèmes relatifs à l'énergie.

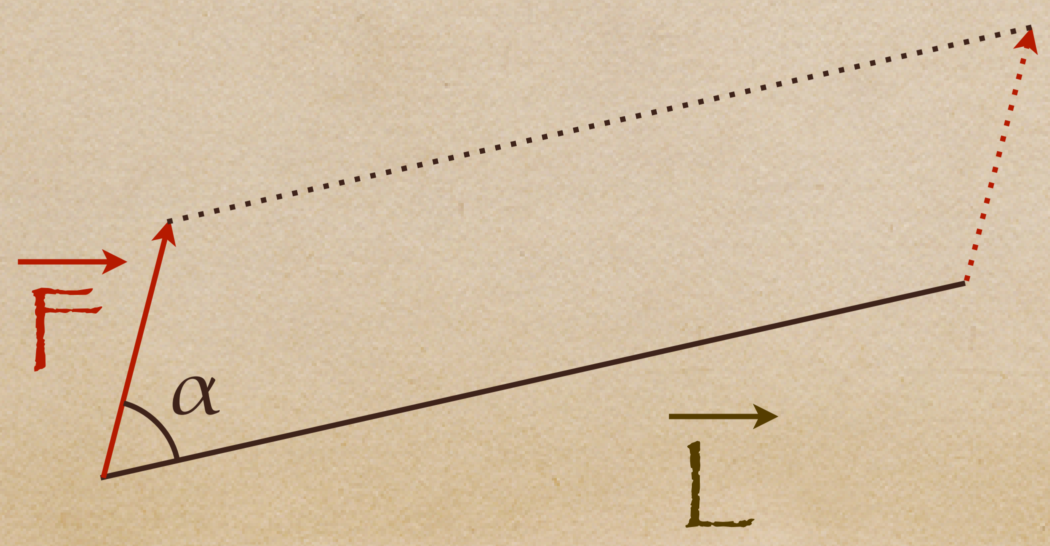
I Travail - Puissance d'une force

1 - Travail d'une force

Définition :

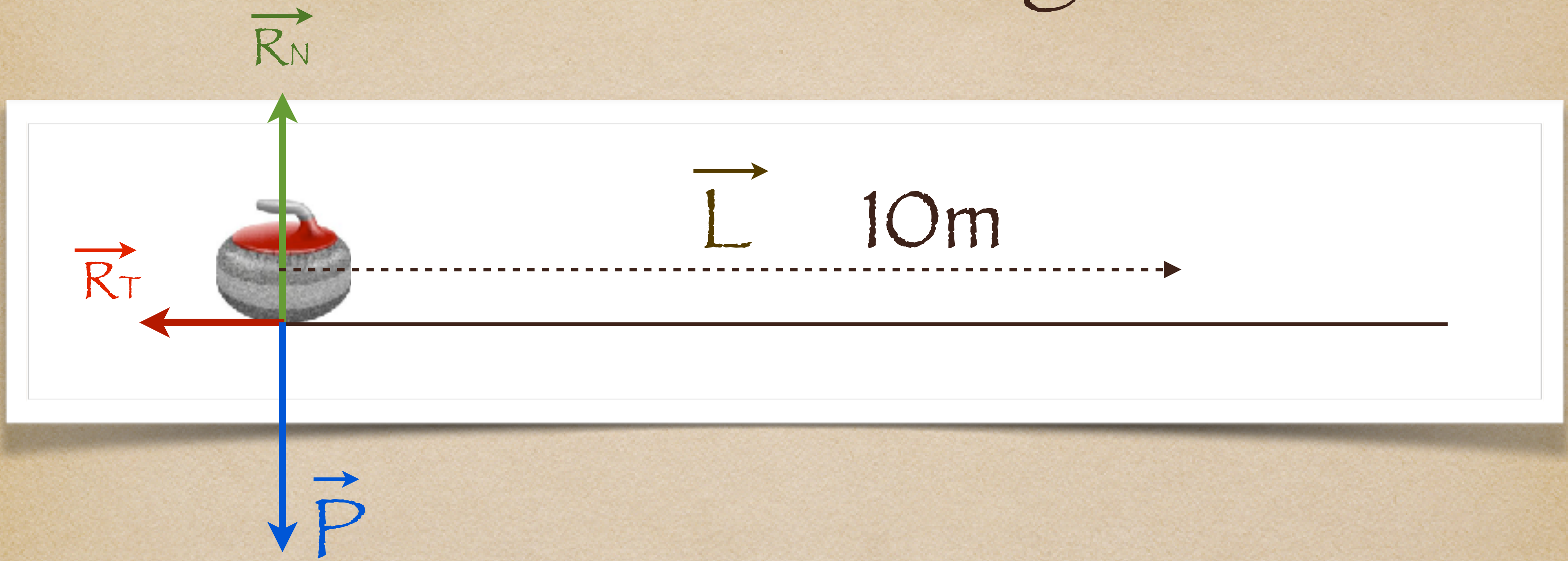
Le travail d'une force quantifie l'énergie déployée par celle-ci pour déplacer le pt. mat.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{L}$$



Notion de travail :

Curling !



A l'aide de la définition et de la modélisation des forces :

Montrer que : $$W_{total} = -f_d R_N L < 0$$

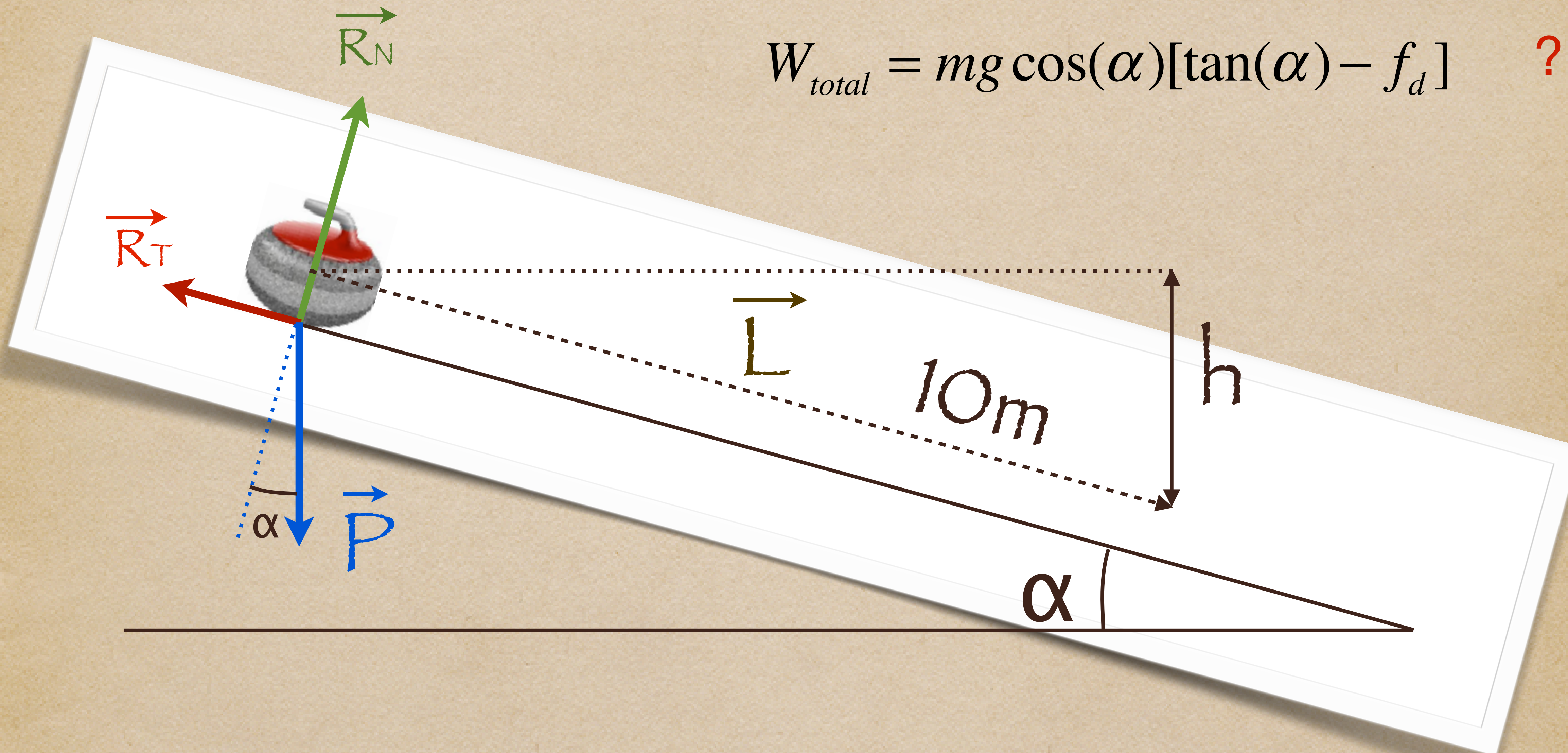
résistant

Montrer que :

$$W_{R_T} = -f_d mg\cos(\alpha)L < 0$$ résistant

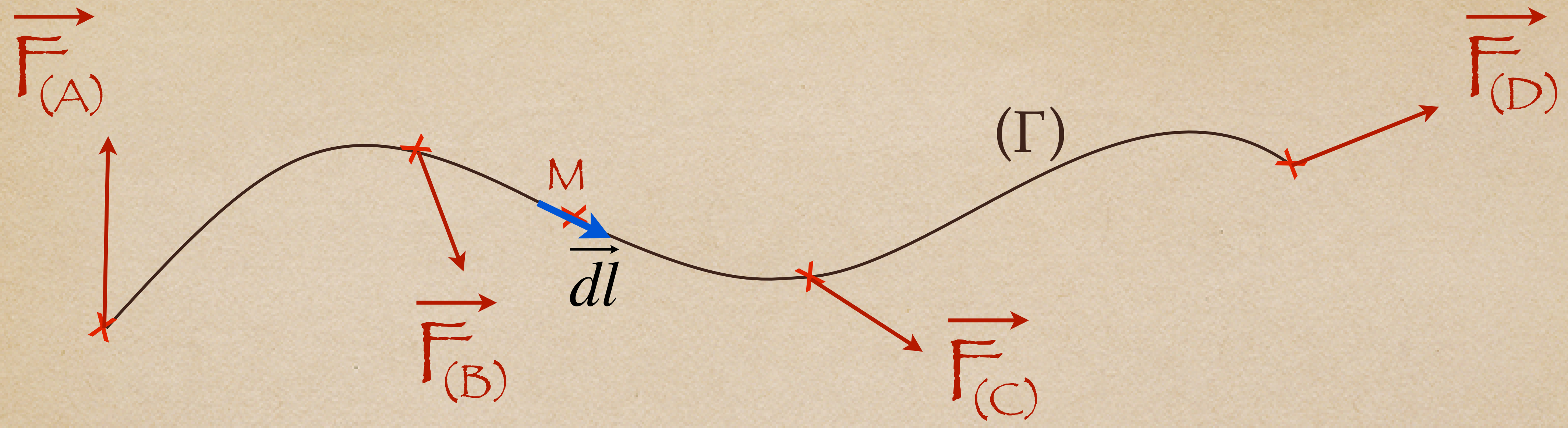
$$W_P = mg\sin(\alpha)L = mgh > 0$$ moteur

$$W_{total} = mg\cos(\alpha)[\tan(\alpha) - f_d]$$?



h : variation d'altitude

Travail le long d'un chemin :



$$dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Quelle signification ?

$$\cancel{dW = \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{L}}$$

RQ : ne voudrait rien dire

Exemple de calcul en 1D :

— en classe —

2 - Puissance d'une force

Définition :

Elle définie la capacité d'une force a donner du travail par unité de temps :

$$P \equiv \frac{travail\ réalisé}{durée\ de\ réalisation}$$

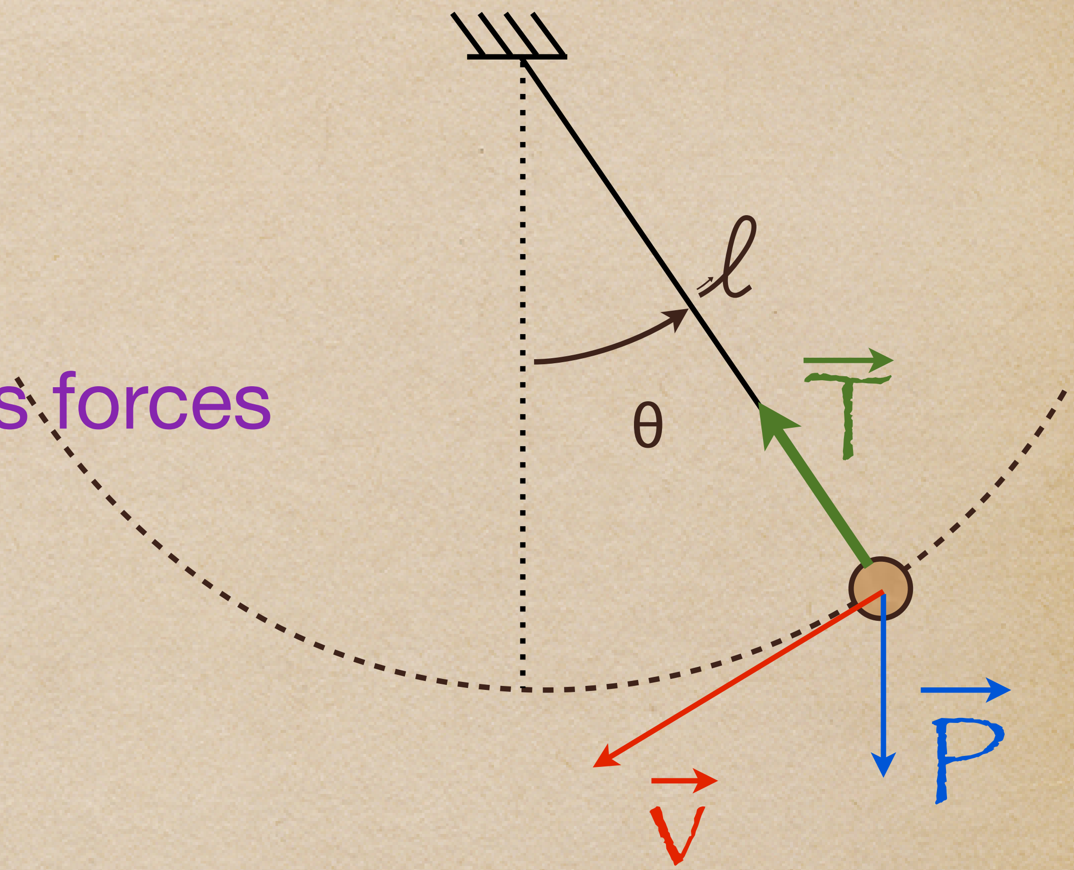
Puissance instantanée :

$$P \equiv \frac{dW}{dt} \quad \text{soit} \quad P_{R_g} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{R_g}$$

Exemple : Pendule simple

Ecrire :

- BDF vectoriel
- vecteur vitesse



Appliquer la formule pour toutes les forces
En déduire la puissance totale
et réfléchir à son signe ?

Résultat :

$$P = \frac{d}{dt}\left[mg\ell\cos(\alpha)\right]$$

Propriété : Si $\vec{V} \perp \vec{F}$ alors la force ne travaille pas
alors la puissance est nulle

3 - Théorème de l'énergie cinétique (T.E.C) :

α - Puissance des forces extérieures :

Soit un point matériel de masse m, animé d'une vitesse v et soumis aux forces extérieures :

— en classe —

Soit $$dW_{f_{ext}} = dE_c$$

β - Théorème de l'énergie cinétique :

Théorème : T.E.C

La somme des travaux des forces ext. le long d'un chemin est égale à la variation d'énergie cinétique le long de ce chemin.

$$W_{f_{ext}} = \Delta E_c$$

Attention : ce bilan dépend a priori du chemin suivi

BGC

Ecriture sous la forme d'un bilan

Variante : Puissance instantanée des forces ext. :

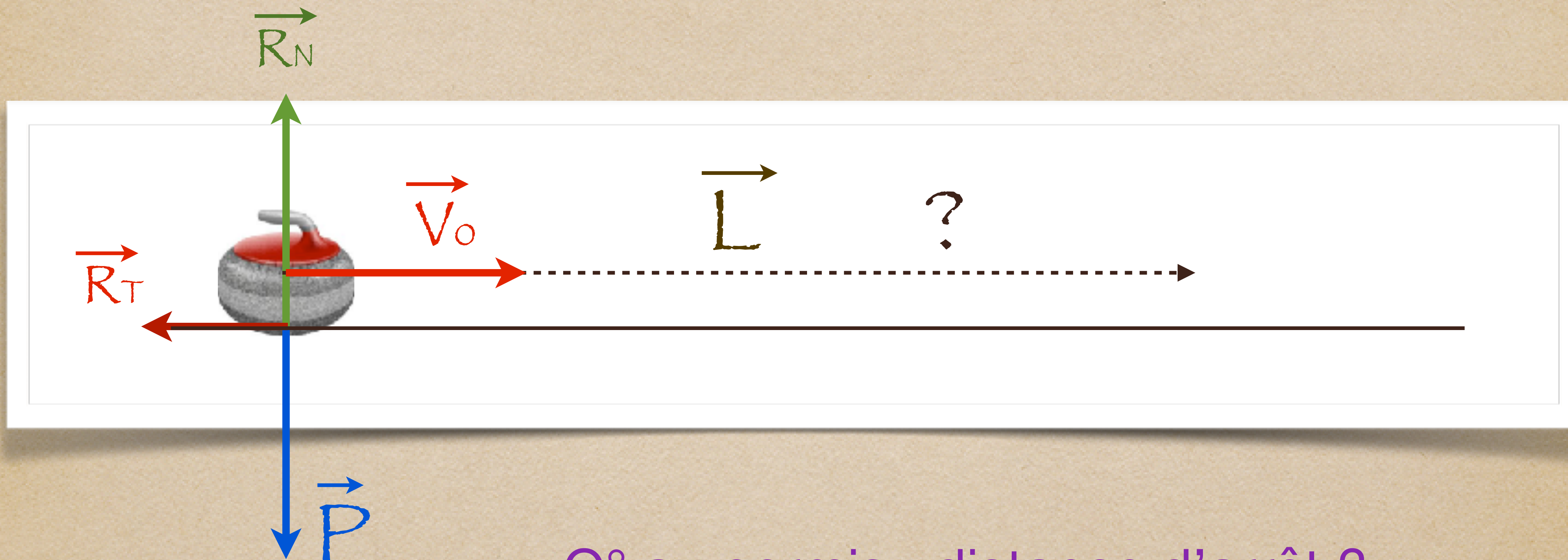
$$P_{f_{ext}} = \frac{dE_c}{dt}$$

LEG

Ecriture sous sa forme instantanée

Y - Exemple de bilan simple : Quelle longueur est parcourue ?

Appliquer : $\boxed{W_{f_{ext}} = \Delta E_c}$



Q° au permis : distance d'arrêt ?

Montrer que : $$L = \frac{v_0^2}{2 f_d g}$$

- Homogène ?
- ECL : fd=0 g=0 v0=0 logique ?

Autres bilans :

Ex 1 : champ de pesanteur

R2P : On lâche une pierre, sans vitesse, d'une hauteur H
Quelle sera sa vitesse d'impact au sol ?

Montrer que : $v_{sol} = \sqrt{2gH}$

- Homogène ?
- ECL : fd=0 g=0 v0=0 logique ?

Ex 2 : système masse ressort

— en classe —

Conclusion :

- Conversion d'NRJ
- notion d'NRJ potentielle qui devient cinétique

II Energie potentielle et Energie mécanique

(du Pt. mat. en réf. gal.)

1 - Force et potentiel

Définition :

On dit qu'une force est conservative si son travail est indépendant du chemin suivi [ex : poids]

↳ Le travail ne dépend alors que des points de départ et d'arrivée.

RQ : Dans le cas contraire la force est dite non conservative
(frottements, forces de contact)

Exemple : Poids

— en classe —

Propriété d'une force conservative :

Le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée : $W = W(A, B)$

Le travail est nul sur tout chemin fermé : $W = W(A, A) = 0$

Contre - exemple : Frottements solide

— en classe —

Propriété d'une force non - conservative :

Le travail dépend spécifiquement du chemin suivi et doit être calculé par une intégrale le long du chemin suivi.

Le travail est non nul sur un chemin fermé.

Définition d'un champ de force :

C'est la donnée du vecteur de force en tout point de l'espace.
ex : champ de force gravitationnel

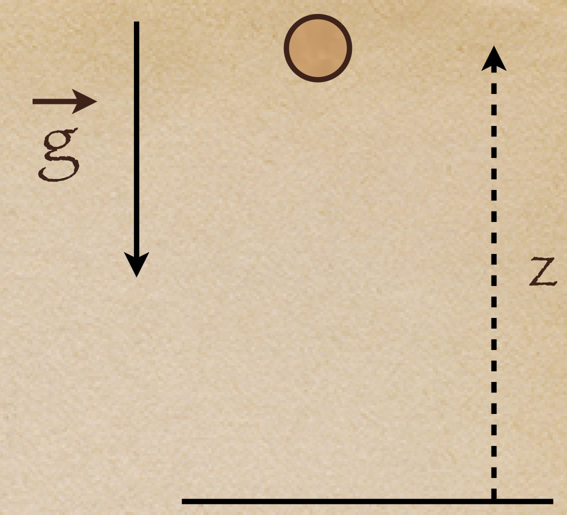
— en classe —

Définition d'un champ de forces conservatives :

On dit que le champ de force est conservatif ou que la force dérive du potentiel, s'il existe une fonction scalaire de la seule position Ep(x,y,z) [fct. énergie potentielle], telle que :

$$dW = -dE_p \qquad \forall\ x,y,z$$

Ex 1 : champ de pesanteur

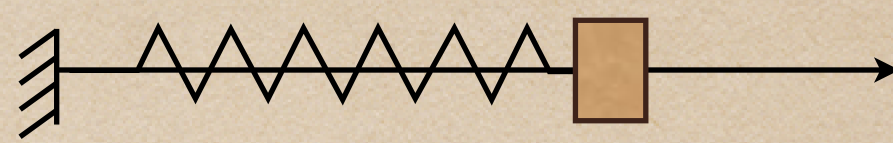


$$dW = -dE_p^{pesanteur} = m\vec{g}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \cdots = -mgdz$$

Montrer que : $E_p^{pes} = mgz + C^{te}$

et si z est vers le bas ?

Ex 2 : système masse ressort



$$dW = -dE_p^{elastique} = \vec{T}\cdot\overrightarrow{d\ell} = -k(x-L_0)\overrightarrow{e_x}.\ dx\overrightarrow{e_x}$$

Montrer que : $E_p^{el} = \frac{1}{2}k\left(x-L_0\right)^2 + C^{te}$

contre-ex : Frottements visqueux en 1D

Exemples de champs de forces centrales

— en classe —

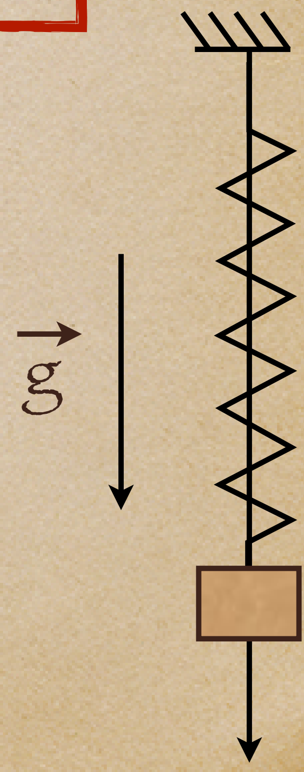
Energie potentielle totale d'un pt. mat. :

Propriété :

On appelle NRJ potentielle totale la somme des contributions à l'énergie potentielle de chacune des forces conservatives mises en jeu :

$$E_{p_{tot}} = \sum_{f_{conservatives}} E_p$$

Ex 2 : système masse ressort dans le champ de pesanteur



— Appliquer la propriété —

2 - Propriété de l'énergie potentielle $\quad E_p(\vec{x})$

$W_{A \to B} =$ — en classe —

Le travail se détermine immédiatement par un bilan d'énergie potentielle.

Csq. sur le T.E.C :

En l'absence de frottement

Exemple : chute libre

Exemple : système masse-ressort

Retrouver les vitesses v_{sol} et v_0 obtenues par le TEC

Propriété :

Expression de la force associée à une énergie potentielle (Cas unidimensionnel) :

$$F_x = -\frac{dE_x}{dx}$$

Démo :

— en classe —

ex : poids, ressort

— Appliquer la formule sur les Ep vues précédemment —

RQ : Cas général Ep(x,y,z) -> $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$

3 - Energie mécanique du Pt. mat. $E_m(x)$

α - Définition :

On appelle NRJ Méca. l'NRJ totale du pt. mat. : $E_m = E_c + E_p$

β - Théorème de l'énergie mécanique : T.E.M

$$dE_m = dW_{f_{nc}}$$

— Démo en classe —

La variation de l'énergie mécanique totale n'est produite que par le travail des forces non-conservatives telles que les frottements.

On retiendra deux formulations du T.E.M :

soient deux utilisations différentes du même principe

Ecriture instantanée (Bilan de puissance) :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{f_{nc}}$$

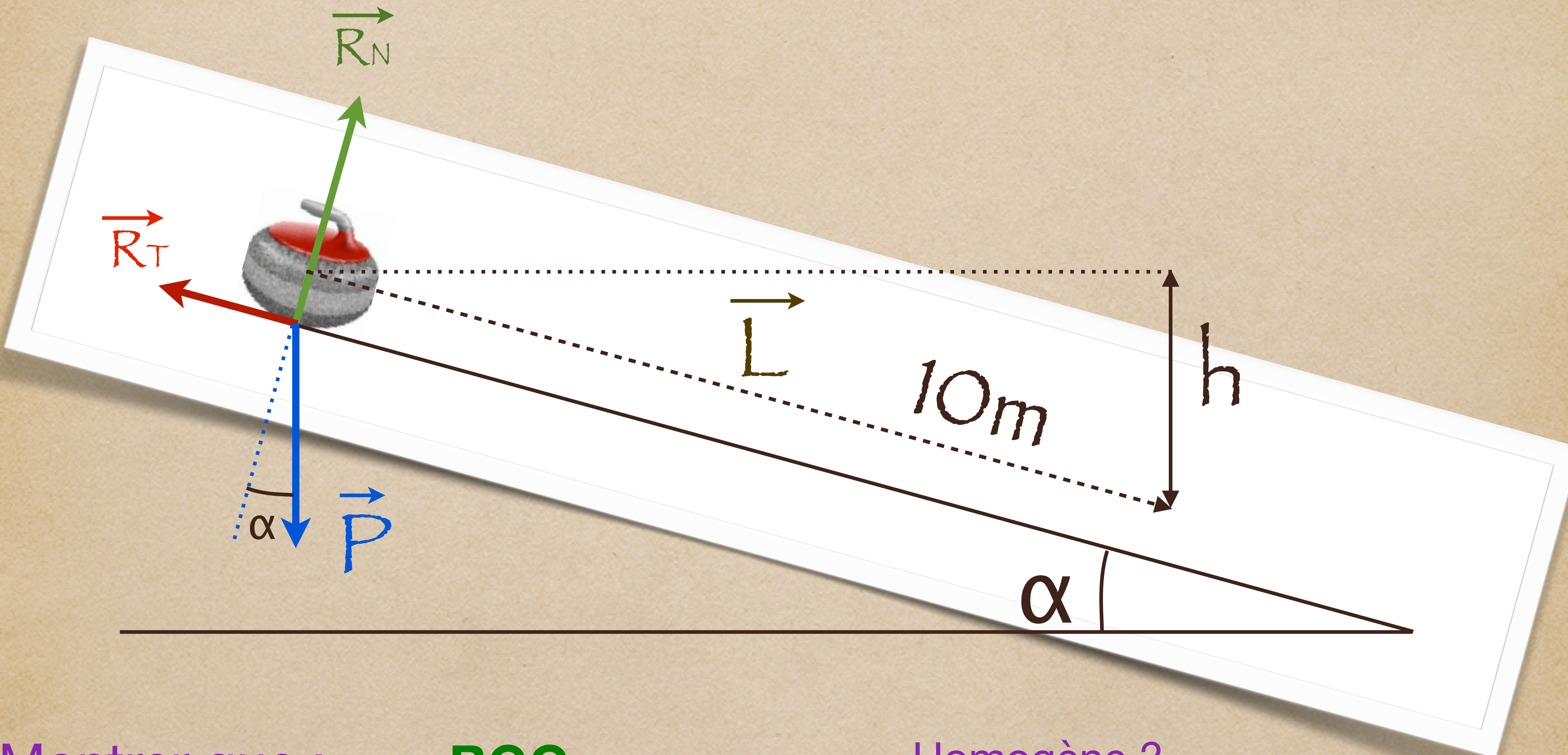
LEG

Bilan d'énergie :

BGC

$$W^{nc}_{A \to B}(\Gamma) = E_m(B) - E_m(A)$$

Exemple de bilan : on lâche la pierre sans vitesse initiale.



Montrer que : **BGC**

$$v_f = \sqrt{2gL\cos(\alpha)[\tan(\alpha) - f_d]}$$

- Homogène ?
- ECL : fd=0 g=0
- PB de signe possible ou non ??

V - Intégrale première de l'NRJ :

Résolution d'un Pb. de méca. par la méthode de l'NRJ

Hyp :

- Il n'y a aucune force non conservative => Em conservée
- On considère un Pb à un degré de liberté (quantifié par x, θ ou autre).

$$\boxed{Em(x, \dot{x}) = Cte}$$

Trouver l'expression des Em …

… et retrouver :

Ex 1 : champ de pesanteur $Em(z, \dot{z}) = ?$ —> eq° chute libre

Ex 2 : système masse ressort $Em(x, \dot{x}) = ?$ —> eq° OH

Méthode générale en 1D : Comment faire en présence de frottement?

— En classe —

III Dynamique et état d'équilibre d'un pt. mat. pour les pb. à un degré de liberté (ddl) en évolution conservative.

ouf !

Cadre d'étude :

- Pb. unidimensionnel (1 ddl) : une seule variable de positionnement X
- Em conservée : pas de force non conservative
- Ep(X) est une fct. non triviale : il n'y a pas de résolution analytique.

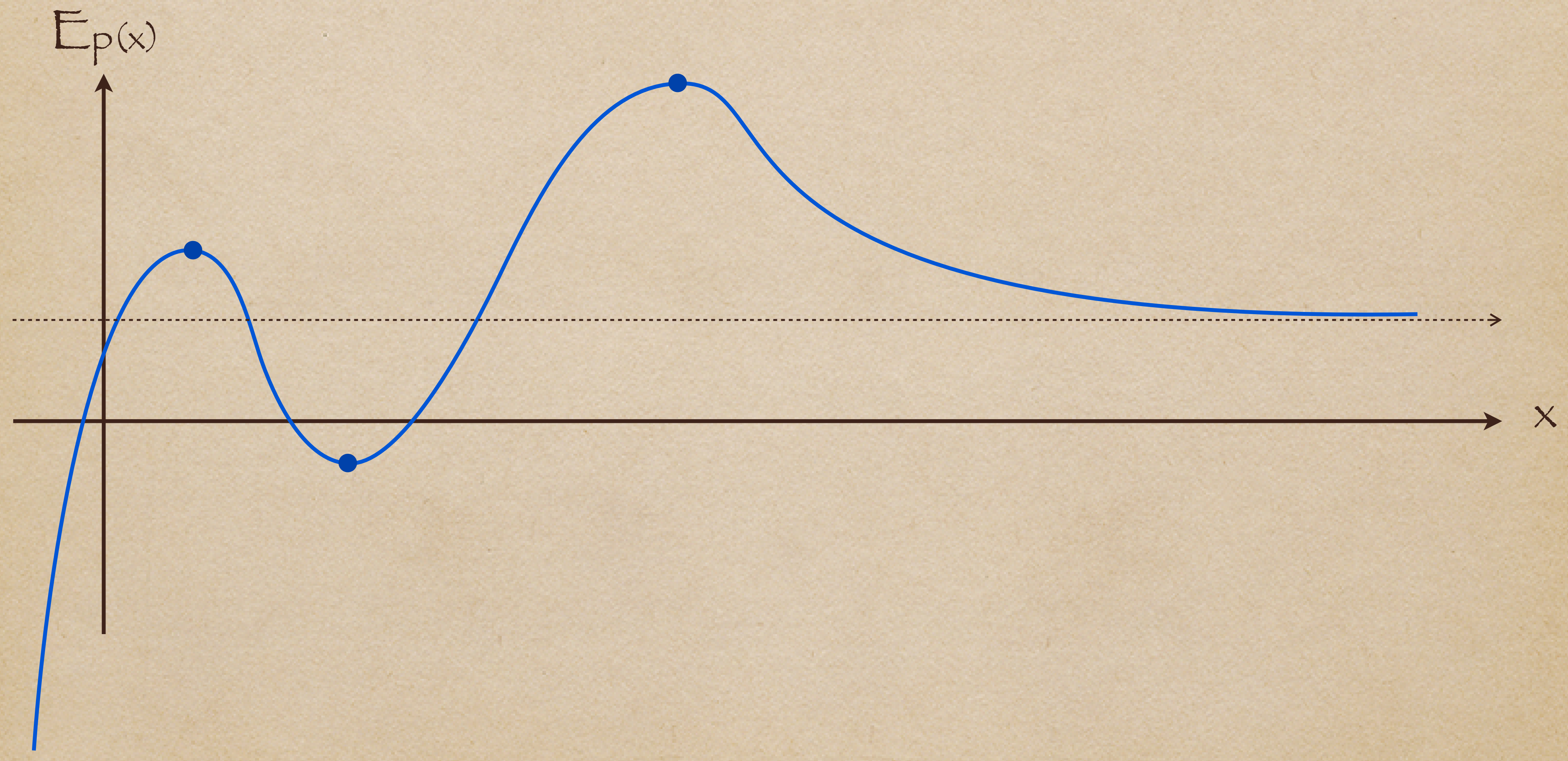
$\hookrightarrow$ Etude graphique

Montrer que l'on doit toujours avoir : $E_p(x) \leq E_m \quad \forall x$

Nous allons obtenir des résultats généraux par l'étude graphique d'un cas particulier

1 - Dynamique et état d'équilibre

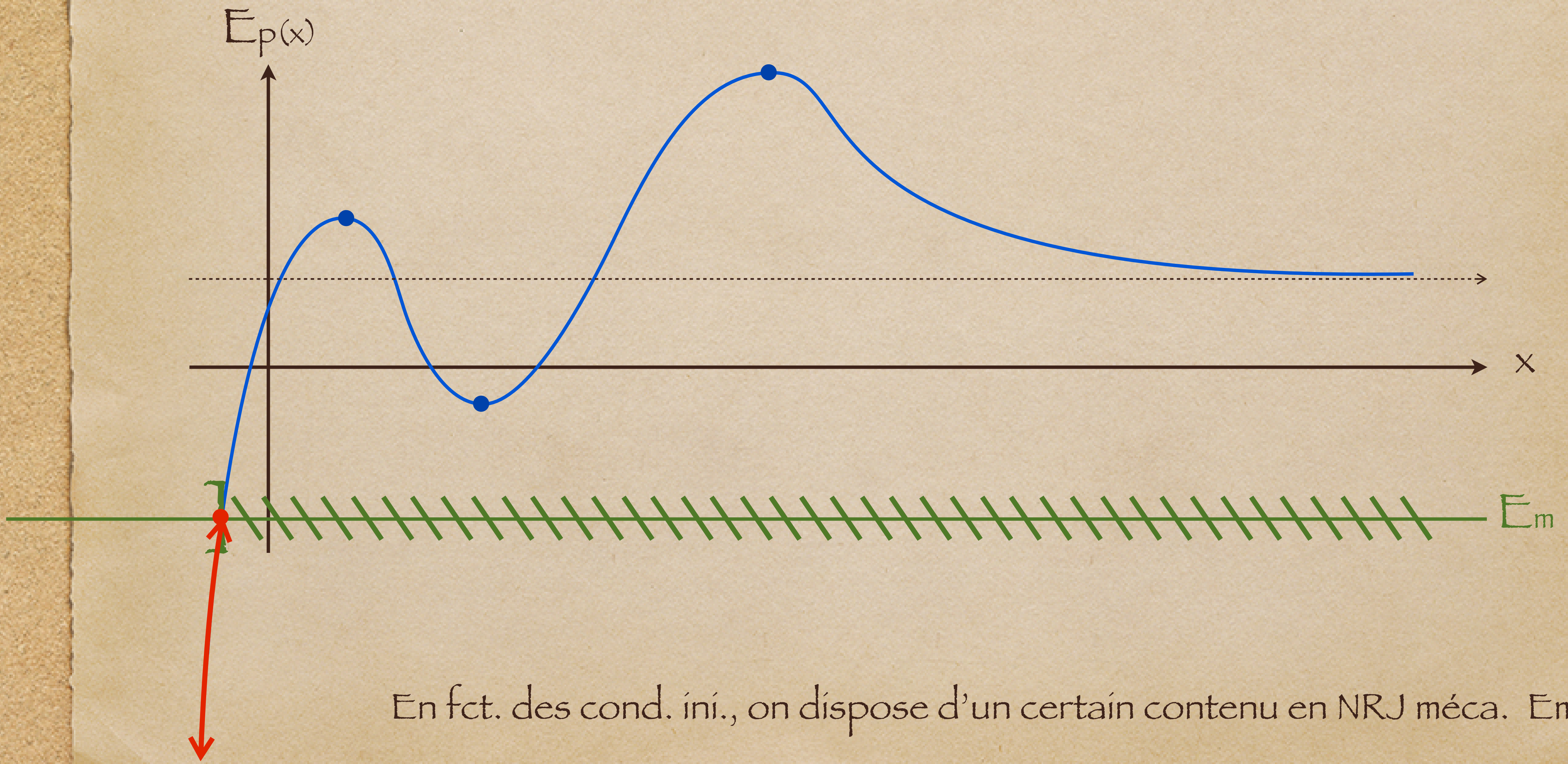
α - Etude de Ep(X) :



En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

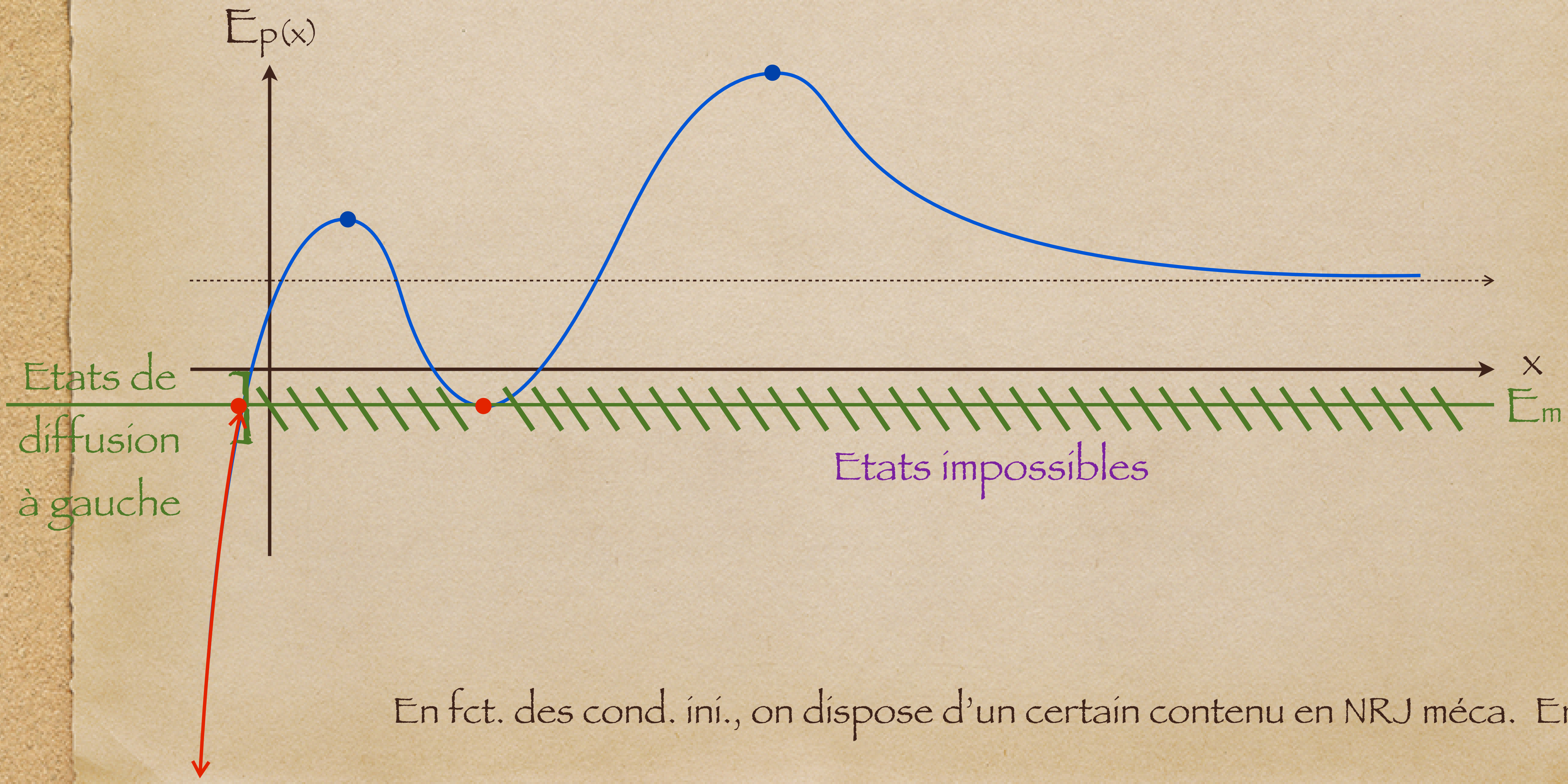
α - Etude de Ep(X) :



En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

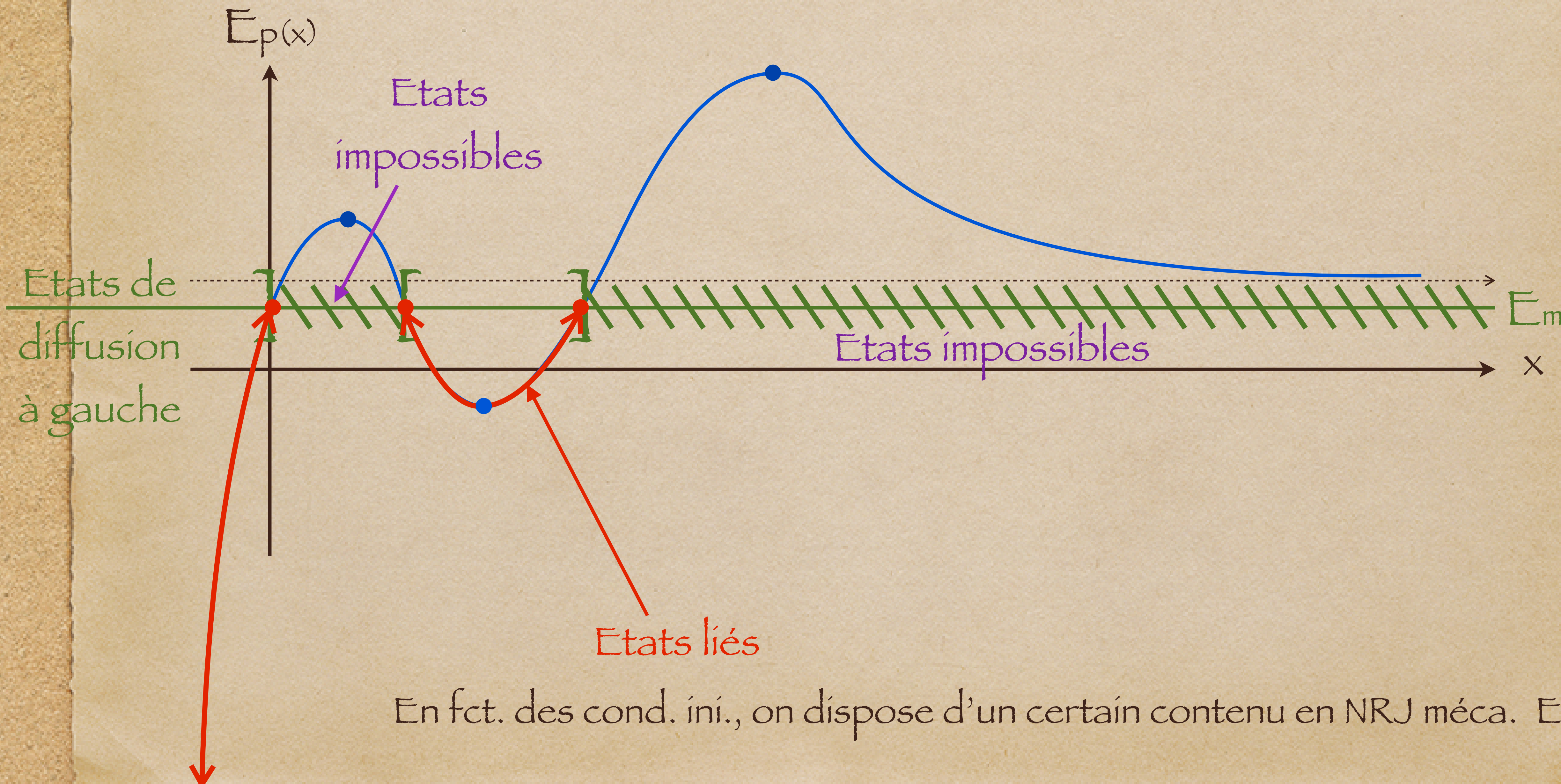
α - Etude de Ep(X) :



En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

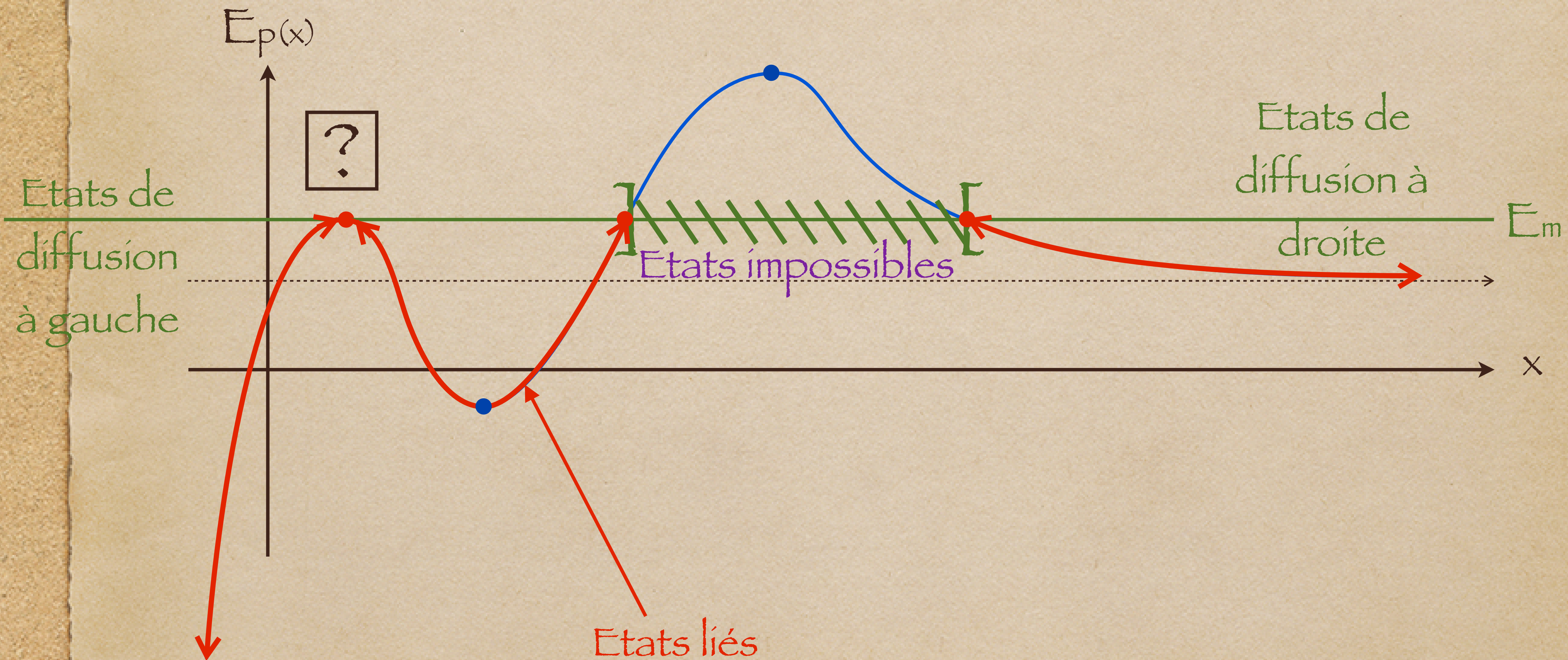
α - Etude de Ep(X) :



En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

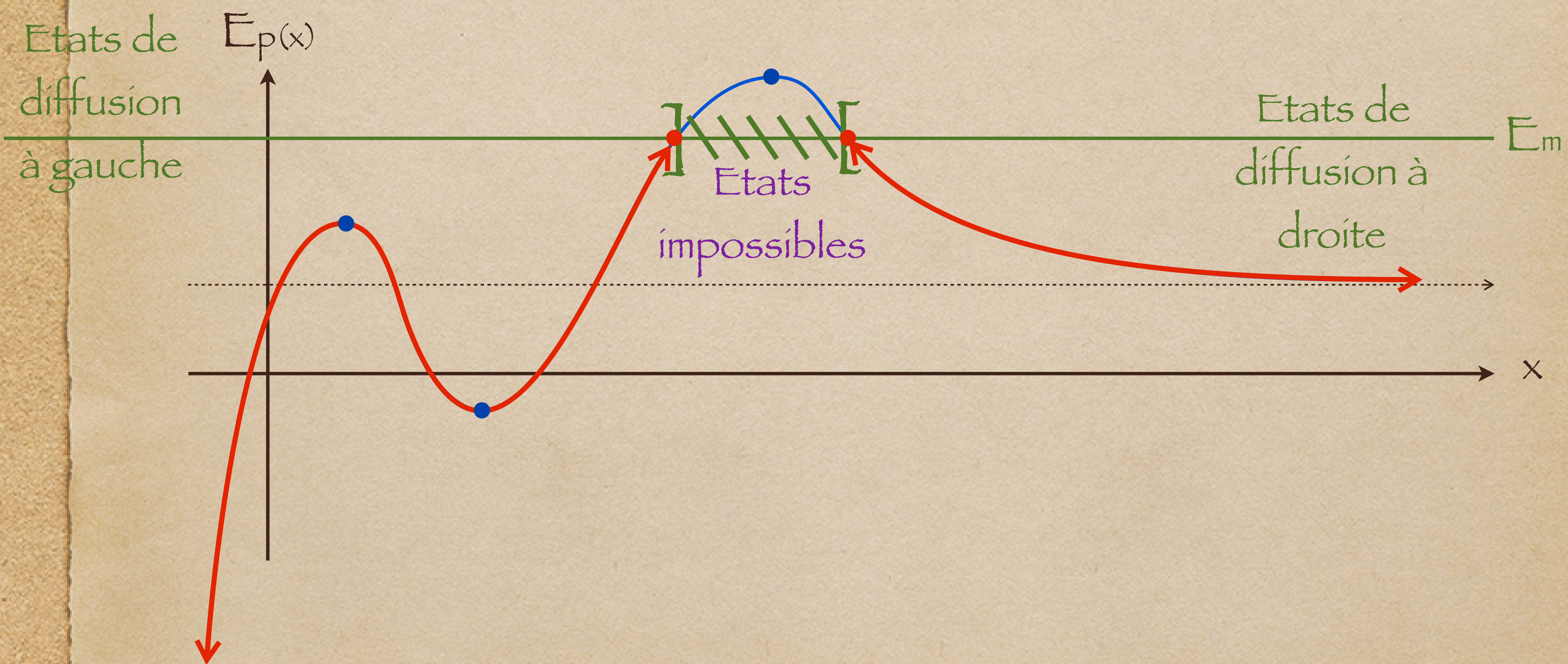
α - Etude de Ep(X) :



En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

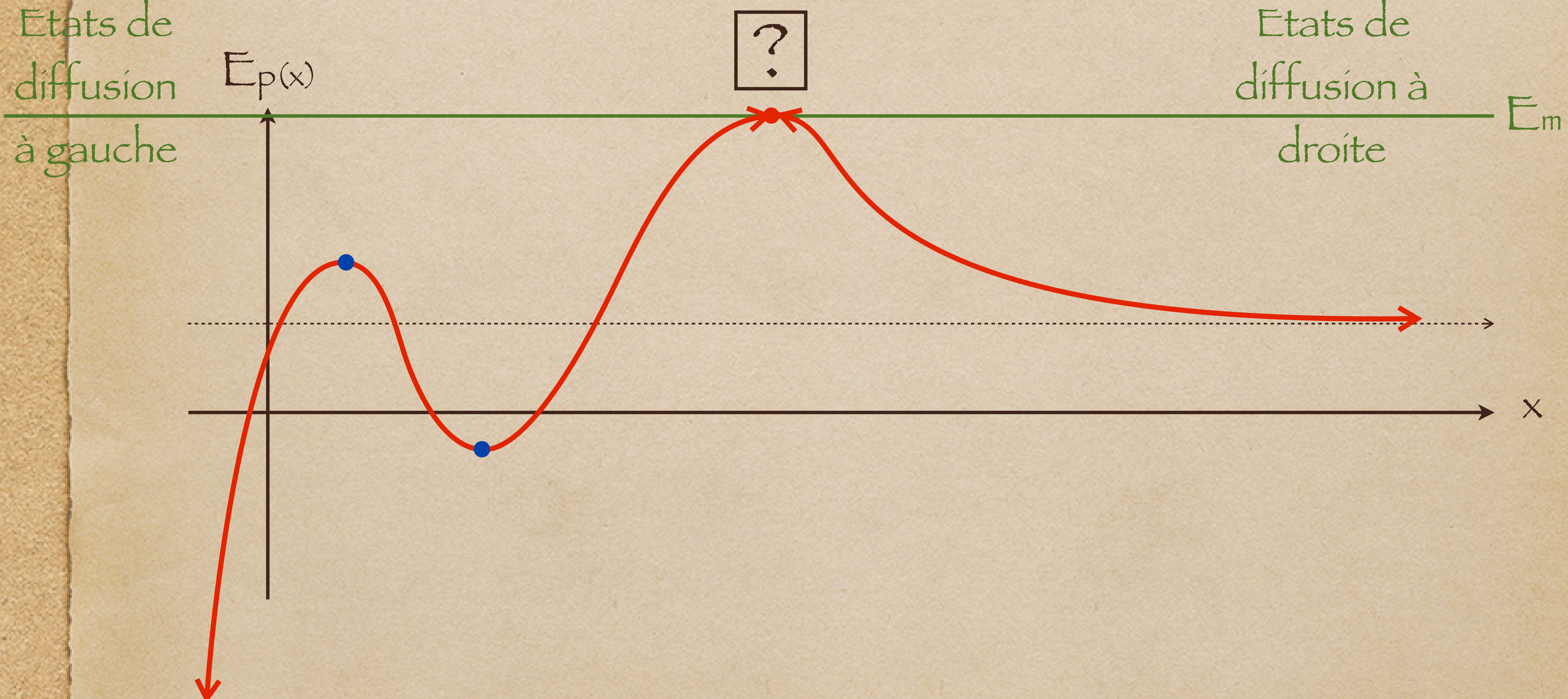
α - Etude de Ep(X) :



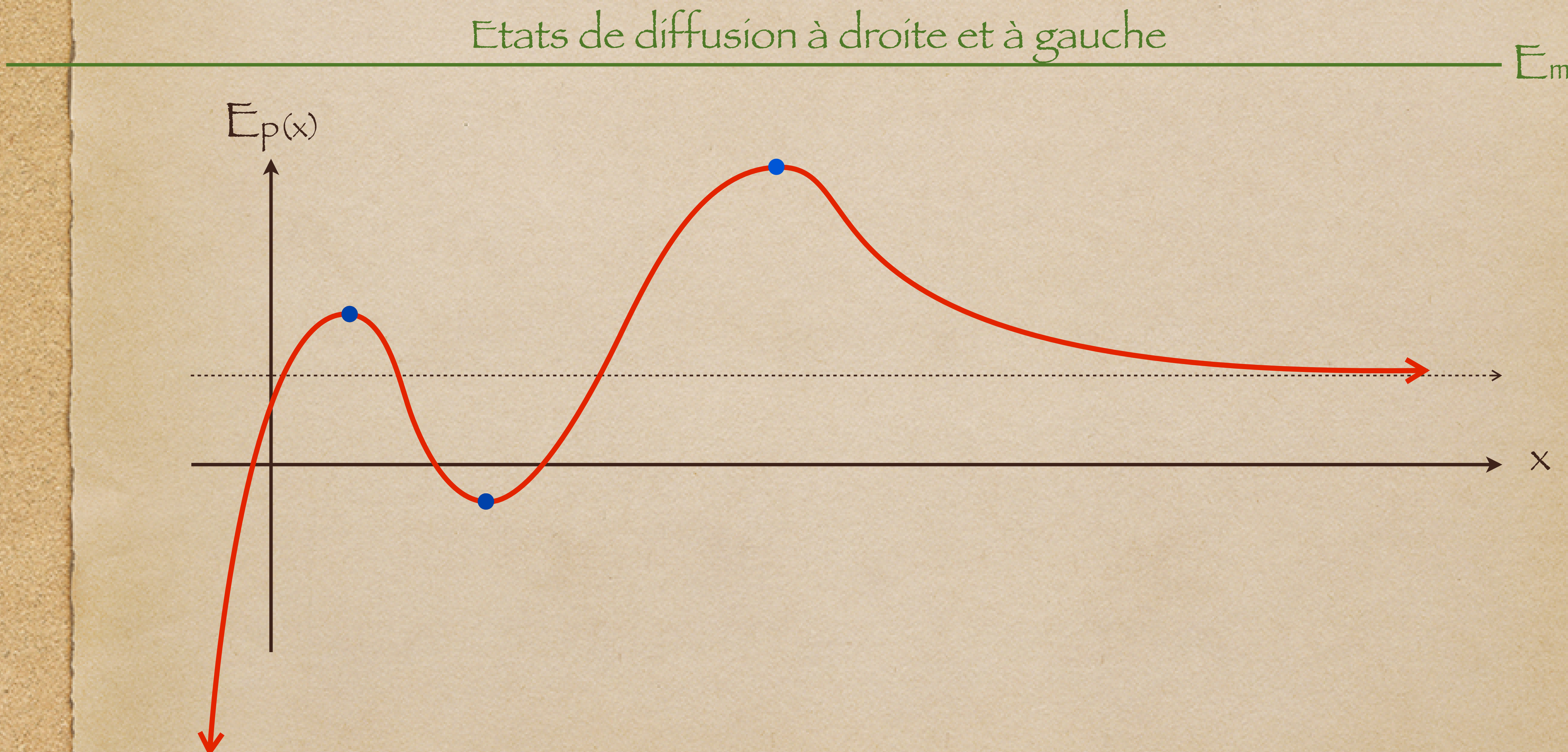
En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

1 - Dynamique et état d'équilibre

α - Etude de Ep(X) :



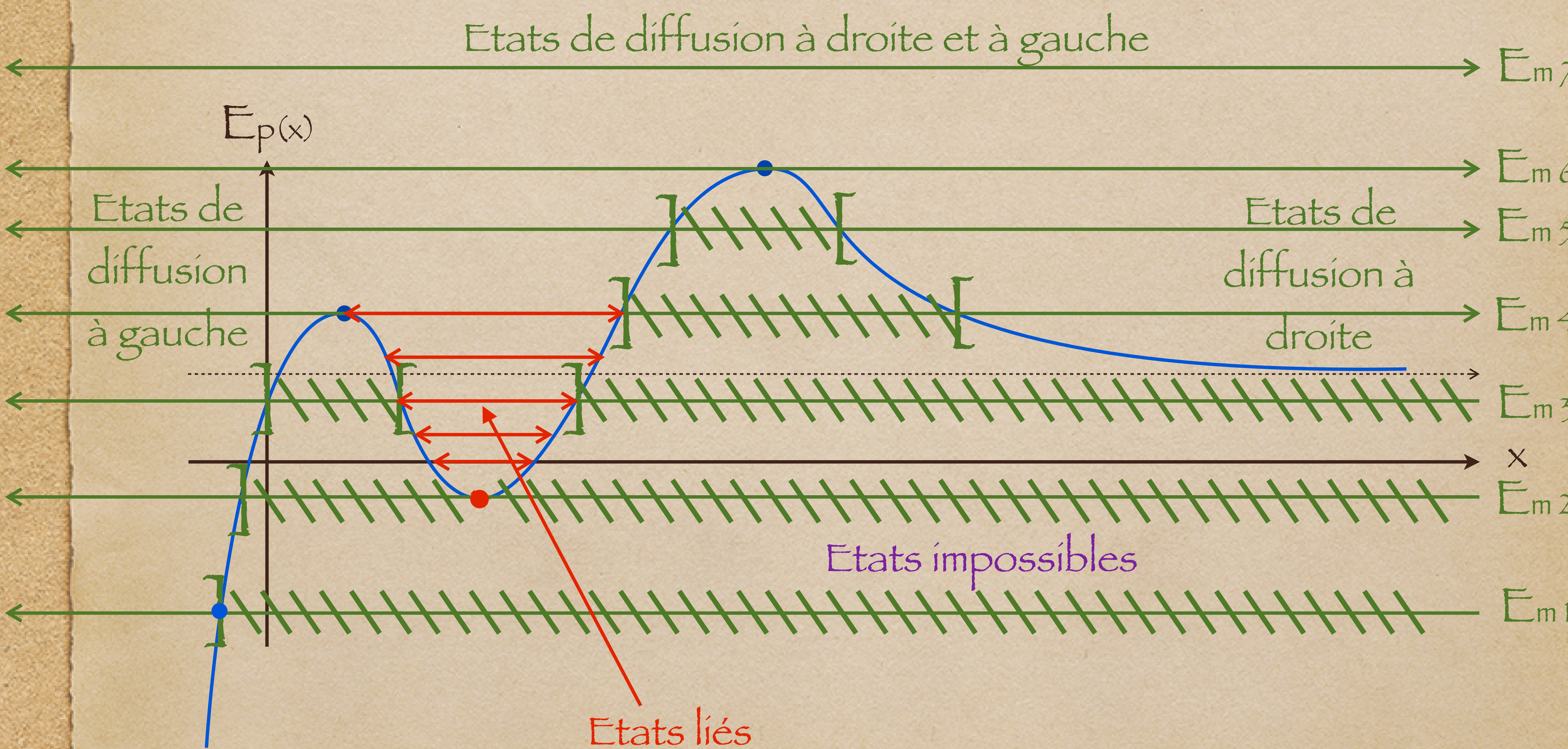
En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em



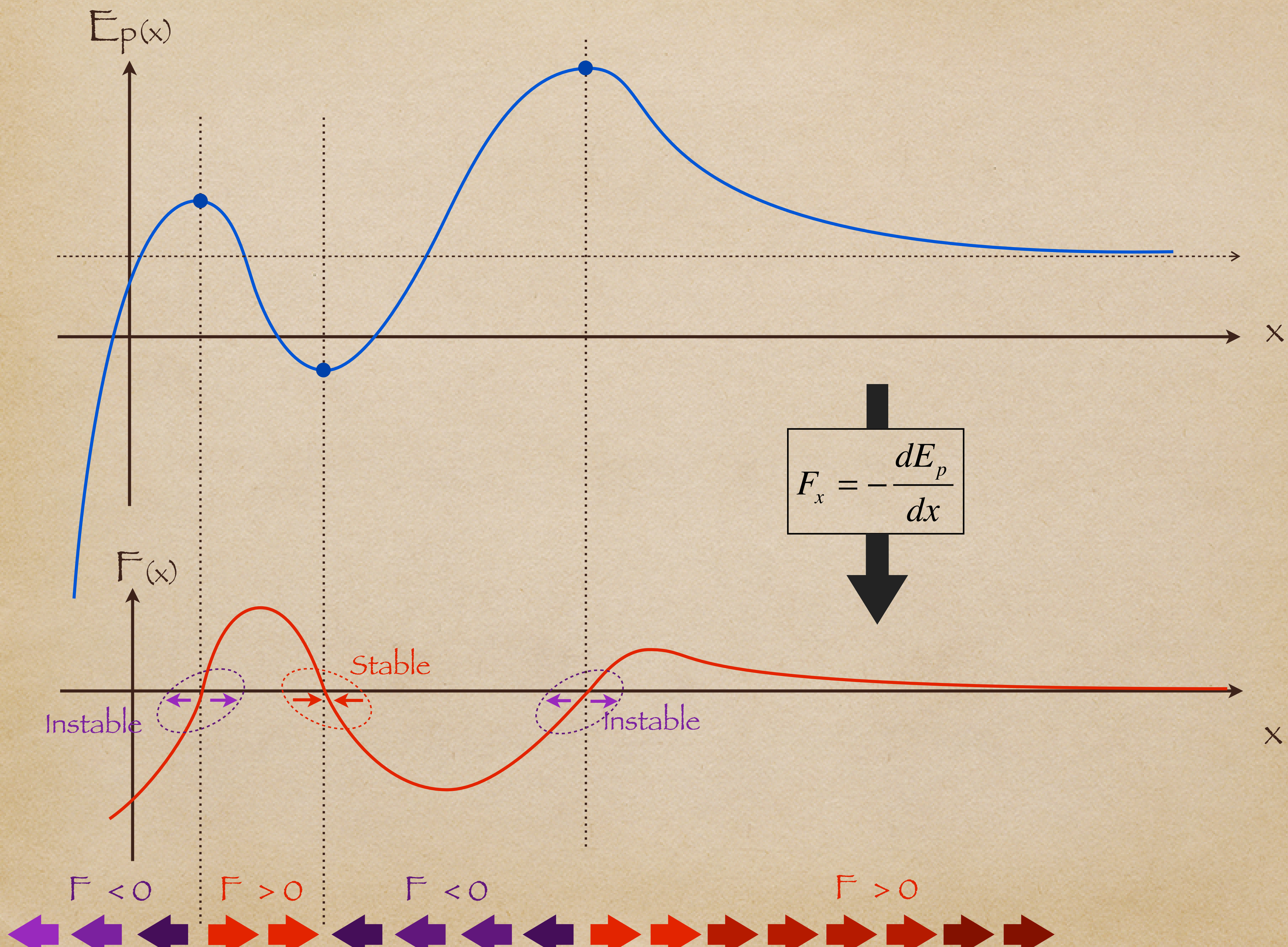
En fct. des cond. ini., on dispose d'un certain contenu en NRJ méca. Em

Résumé :

$$\boxed{\forall E_m,\ \forall x \qquad E_{p(x)} \leq E_m}$$



β - Recherche des points d'équilibres stables :



On généralise ce résultat par deux conditions très précises :

✳ Condition d'équilibre :

X est une position d'équilbre	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{dE_p}{dx}(x) = 0$

C'est donc une équation à résoudre sur la variable x qui permet de trouver xeq :

✳ Condition d'équilibre stable :

Le signe de la dérivée seconde de Ep, évaluée en xeq, permet de savoir si l'équilibre est stable :

$\dfrac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$	$\Rightarrow$	Equilibre en Xeq stable

2 - Petits mouvements au voisinage du point d'équilibre stable

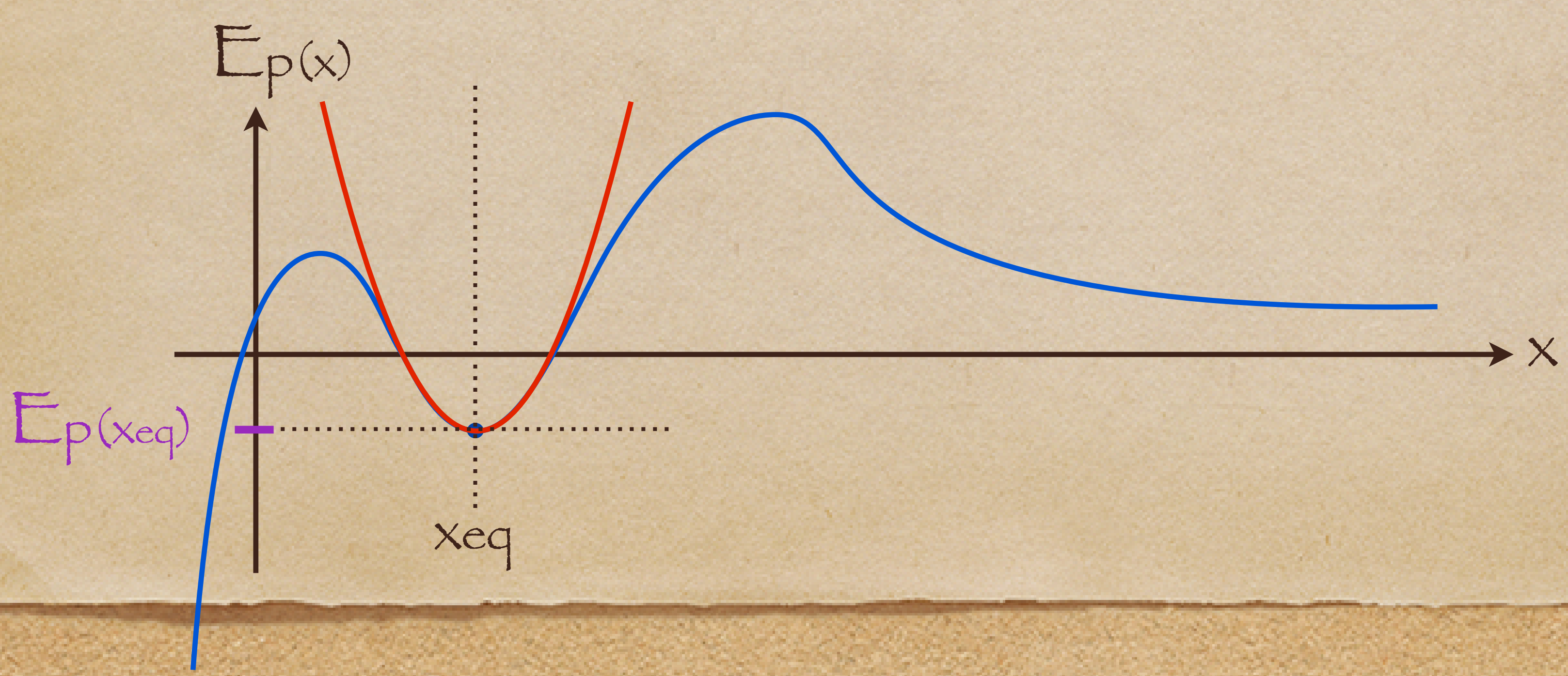
Approximation par un développement de Taylor autour de x_{eq} :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq})\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})$$

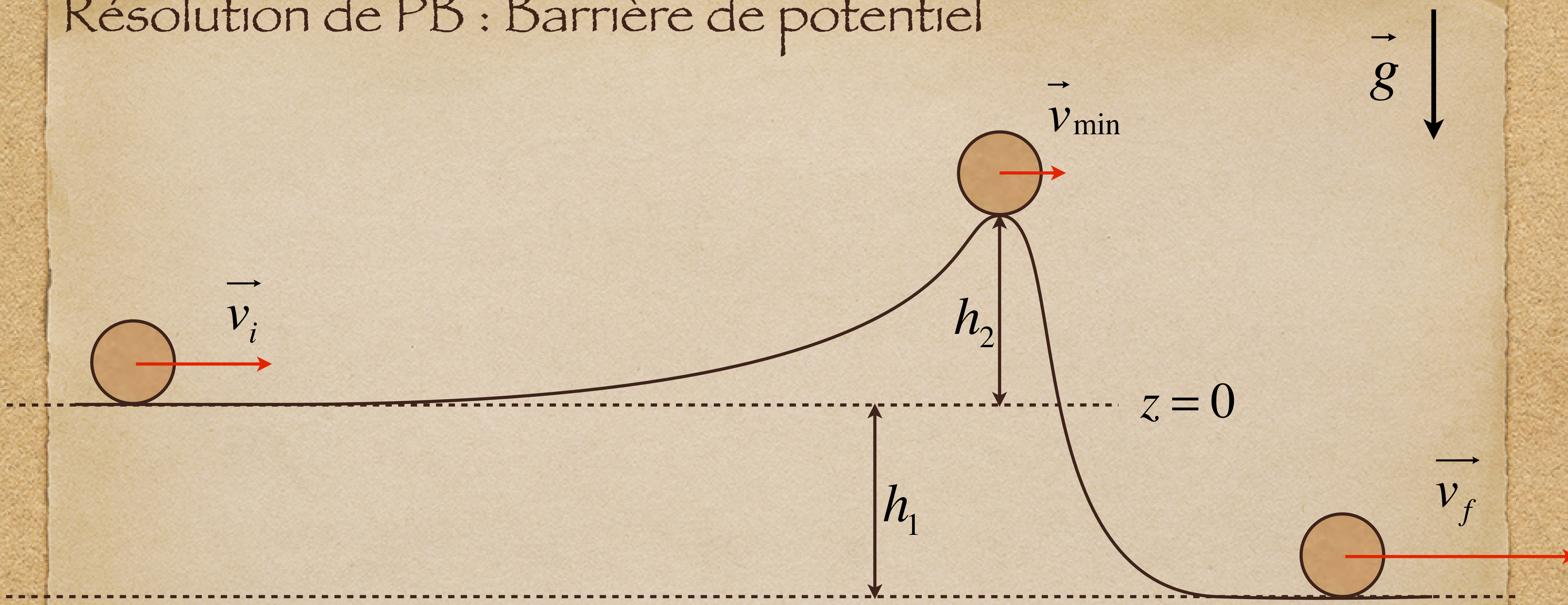
Si x_{eq} est un point d'équilibre : $\boxed{\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0}$ et s'il est en plus stable : $\boxed{\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0}$

Potentiel parabolique :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})$$



Résolution de PB : Barrière de potentiel



On suppose ici qu'il n'y a pas de frottement :

- A quelle condition peut-on franchir la barrière de potentiel ?
- Dans ce cas, quelle est la vitesse finale ?