Modélisation des réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

Motivation : C'est un <u>cadre d'étude très général</u> : tous les signaux peuvent s'écrire comme une superposition de signaux sinusoïdaux

Objectif :

- Retour sur le formalisme complexe pour décrire le régime sinusoïdal
- Décrire les caractéristiques des dipôles linéaires en régime sinusoïdal : notion d'impédance complexe $\underline{Z}$

Prérequis :
- Trigo de base
- eq. diff. lin. à coef. cts.
- Nombres complexes

Plan

Préparer une copie double

I Etude du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

1 - Etude du régime transitoire + RSE avec des signaux réels

2 - Modélisation en Complexe du RSE dans un circuit RLC série

II Modélisation $\mathbb{C}$ des dipôles linéaire usuels

1 - Les lois de Kirchhoff

2 - Notion d'impédance $\mathbb{C}$

3 - Association de dipôles linéaires usuels

4 - Diviseurs de tension et courant

5 - Théorème de Millmann

6 - Principe de superposition

7 - Equivalences des générateurs de Thévenin et Norton

III Réponse en courant et tension d'un circuit RLC série en RSE

1 - Réponse en intensité et résonance

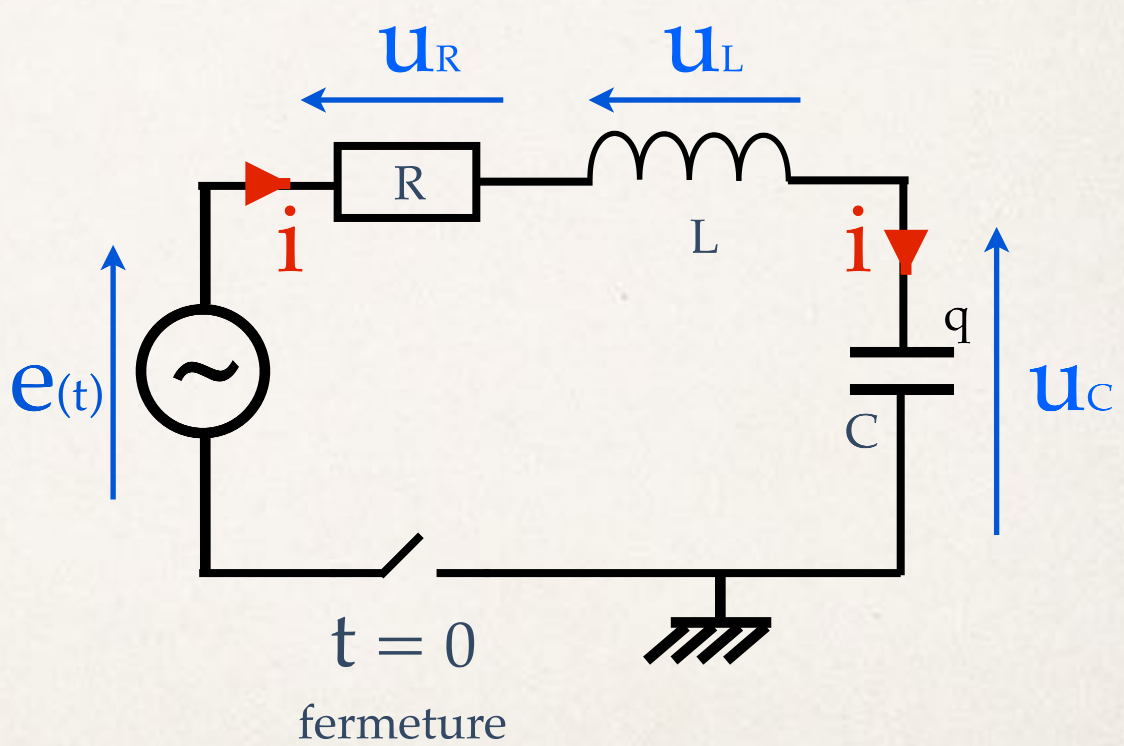
2 - Réponse en tension et résonance

3 - Aspects énergétiques

I Etude du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

On considère le circuit RLC série mais avec une alimentation sinusoïdale :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t)$$



Attention :

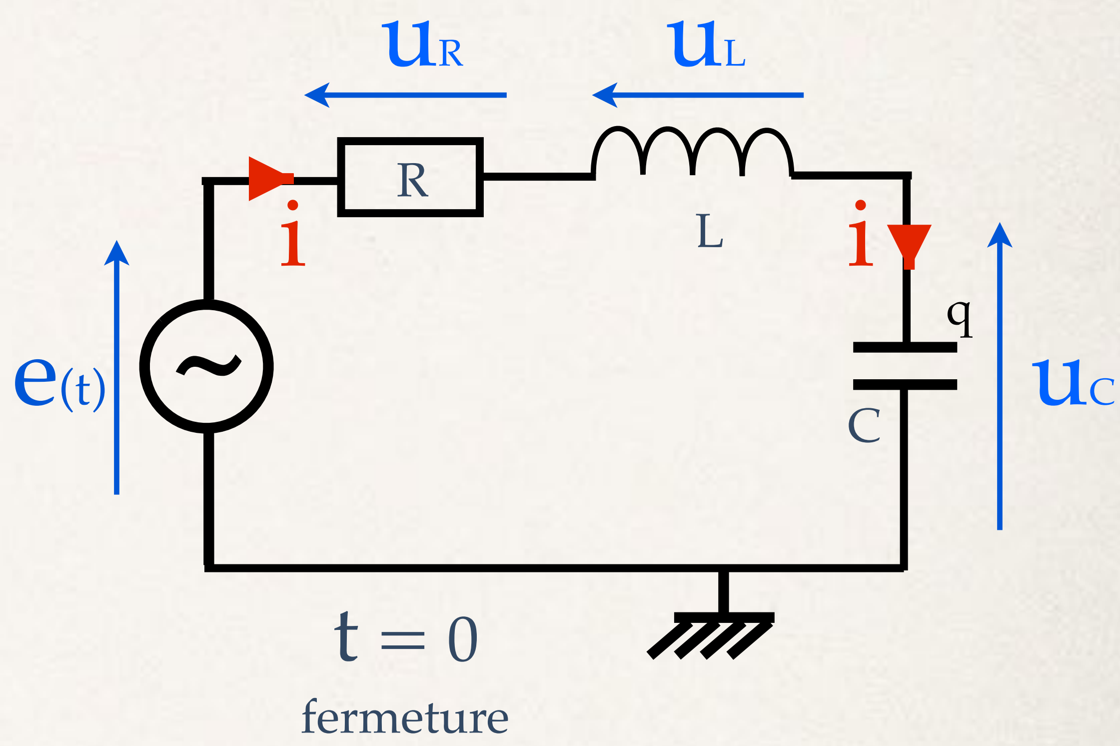
Ne pas confondre

ω => variable imposée par le GBF

ω_0 => constante : fréquence du régime libre

1 - Etude du régime transitoire + RSE avec des signaux réels

α - Mise en équation



LDM => obtenir :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=-\frac{e_0\omega}{L}\sin(\omega t)}$$

β - Résolution

- Recherche des solutions homogènes #ToolBox

$Q<\frac{1}{2}$ $$i^H=e^{-\lambda t}\left[A\,ch(\Omega t)+B\,sh(\Omega t)\right]\qquad \Omega=\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$$

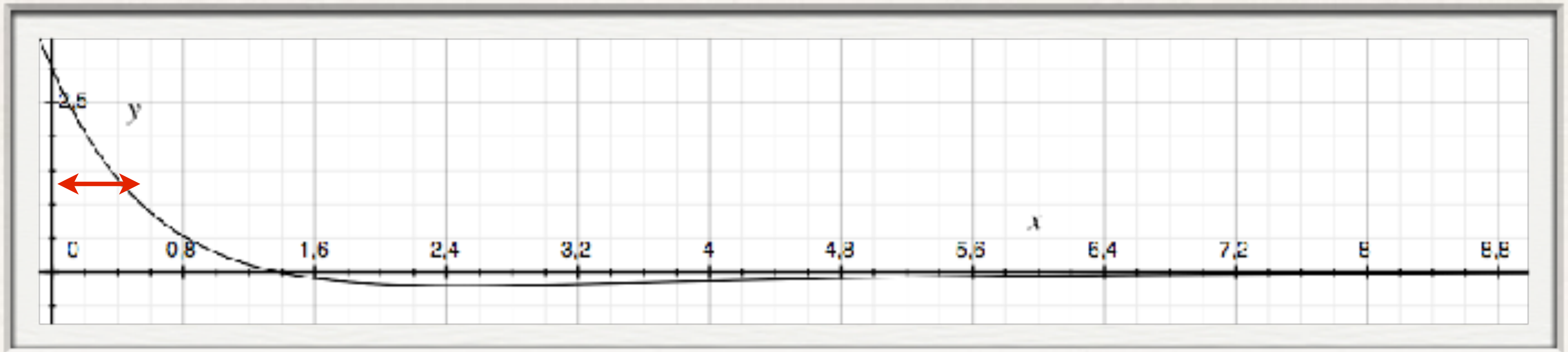
$Q=\frac{1}{2}$ $$i^H=e^{-\lambda t}\left[A+Bt\right]\qquad \omega_0=\lambda$$

$Q>\frac{1}{2}$ $$i^H=e^{-\lambda t}\left[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right]\qquad \Omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

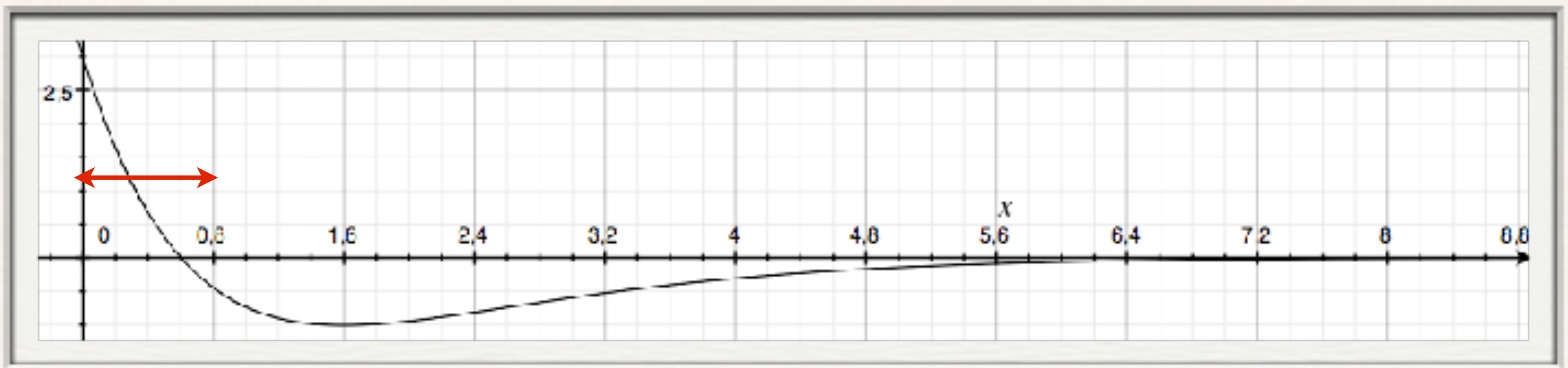
Caractéristique commune à toutes ces solutions :

Toutes les solutions homogènes tendent vers 0 après un temps τ :

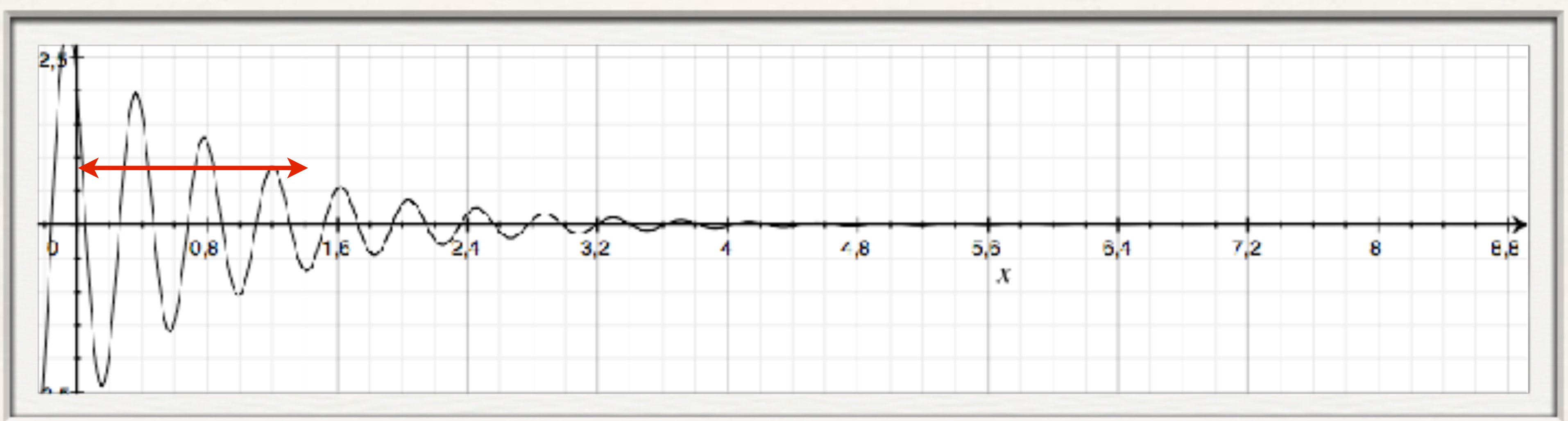
$Q < \frac{1}{2}$



$Q = \frac{1}{2}$



$Q > \frac{1}{2}$



Temps τ qui augmente avec le facteur de qualité

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

✳ Recherche d'une solution particulière

$$\boxed{i^P = ?}$$

On peut faire toute cette étude en réel : c'est une mauvaise idée
Les diapos qui suivent devraient vous en convaincre …
—> très long et difficile.

Dans la suite nous allons introduire le formalisme en complexe qui permet d'effectuer cette recherche en quelques lignes

✳ Recherche d'une solution particulière

$$\boxed{i^P = i_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

On injecte cette solution dans l'équation différentielle :

Ne pas noter

$$i_0\left[-\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\lambda\omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi)\right] = -\frac{e_0\omega}{L}\sin(\omega t)$$

Ne pas noter

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)$$

$$i_0\left[-\omega^2 \cos(\varphi) - 2\lambda\omega \sin(\varphi) + \omega_0^2 \cos(\varphi)\right]\cos(\omega t) + i_0\left[-\omega^2 \sin(\varphi) - 2\lambda\omega \cos(\varphi) - \omega_0^2 \sin(\varphi)\right]\sin(\omega t) = -\frac{e_0\omega}{L}\sin(\omega t) \qquad \forall t$$

$\omega t = 0$ $$-\omega^2 \cos(\varphi) - 2\lambda\omega \sin(\varphi) + \omega_0^2 \cos(\varphi) = 0$$

$\omega t = \frac{\pi}{2}$ $$\omega^2 \sin(\varphi) - 2\lambda\omega \cos(\varphi) - \omega_0^2 \sin(\varphi) = -\frac{e_0\omega}{Li_0}$$

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cos(\varphi) + 2\lambda\omega \sin(\varphi) = 0 \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin(\varphi) + 2\lambda\omega \cos(\varphi) = -\dfrac{e_0\omega}{Li_0} \end{cases}$$

Deux eq° à deux inconnues

$$\begin{cases} \left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos(\varphi)+2\lambda\omega\sin(\varphi)=0 \\ \left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin(\varphi)+2\lambda\omega\cos(\varphi)=-\dfrac{e_0\omega}{Li_0} \end{cases}$$

Ne pas noter

$$-\frac{e_0\omega}{Li_0}=-\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\cos(\varphi)\frac{1}{2\lambda\omega}-2\lambda\omega\cos(\varphi)=-\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\frac{1}{2\lambda\omega}+2\lambda\omega\right)\cos(\varphi)$$

$$-\frac{e_0\omega}{Li_0}=\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin(\varphi)+\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\sin(\varphi)=\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2\right)\frac{\sin(\varphi)}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$\cos(\varphi)=\frac{\dfrac{e_0\omega}{Li_0}}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\dfrac{1}{2\lambda\omega}+2\lambda\omega}$$

$$\sin(\varphi)=-\frac{e_0\omega}{Li_0}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}$$

$$\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2=1$$

$$\left(\frac{\dfrac{e_0\omega}{L}}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\dfrac{1}{2\lambda\omega}+2\lambda\omega}\right)^2+\left(-\frac{e_0\omega}{L}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}\right)^2=i_0^2$$

Ne pas noter

$$\left(\frac{e_0\omega}{L}\right)^2\left[\left(\frac{2\lambda\omega}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}\right)^2\right]=i_0^2$$

$$2\lambda=\frac{\omega_0}{Q}\quad\Rightarrow\quad 2\lambda\omega=\frac{\omega\omega_0}{Q}$$

$$i_0^2=\left(\frac{e_0\omega}{L}\right)^2\left[\frac{\left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2\right]^2}\right]\quad\Rightarrow\quad i_0^2=\frac{\left(\dfrac{e_0\omega}{L}\right)^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}$$

Comme $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ On obtient :

$$\boxed{i_0(\omega) = \frac{\omega C e_0}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Ne pas noter

On ré-injecte le i0 trouvé dans cosinus et sinus :

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{e_0\omega}{Li_0}\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{e_0\omega}{Li_0}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}$$

On obtient :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\sin(\varphi) = \frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

On retiendra simplement le résultat obtenu avec les réels, mais que nous re-démontrerons bien plus simplement en complexe :

$\boxed{i^P = i_0 \cos(\omega t + \varphi)}$ est solution particulière de l'équation différentielle si :

1- L'amplitude est une fonction de ω qui vérifie :

$$\boxed{i_0(\omega) = \frac{\omega C e_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

2- La phase est une fonction de ω qui vérifie :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

$$\boxed{\sin(\varphi) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

✳ Solutions générales

SG = SH + SP

$$i(t) = i^h(t) + i^p(t)$$

$$\frac{di}{dt}(t) = \frac{di^h}{dt}(t) + \frac{di^p}{dt}(t)$$

On applique alors les conditions initiales sur SG qui donnent A et B.

$$i(0^+) = 0$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{e_0 \cos(\omega t + \varphi_{fermeture})}{L} \rightarrow al\acute{e}atoire$$

Expression assez lourde !

qui permet de trouver A et B

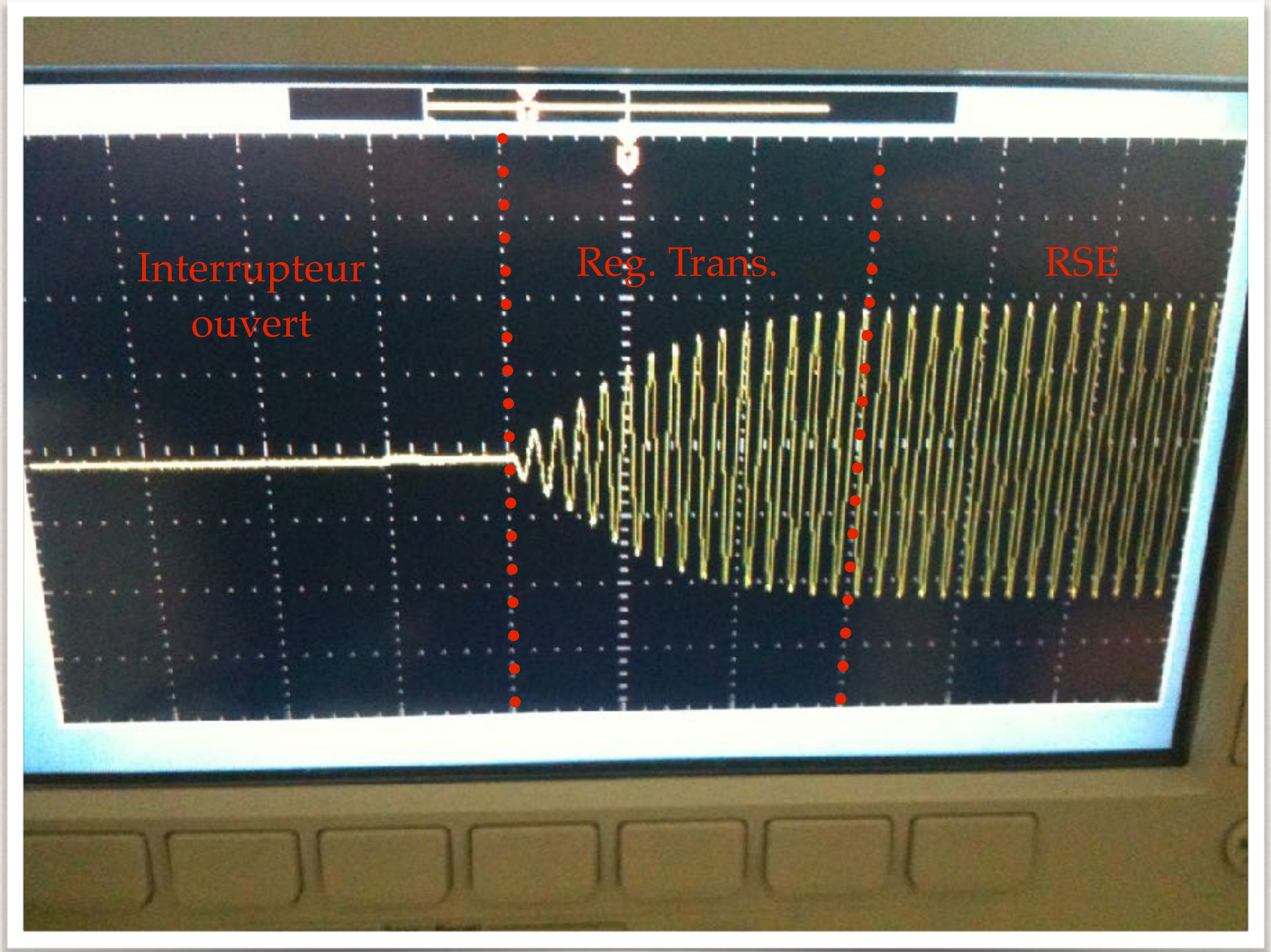
La solution générale se décompose en deux régimes :

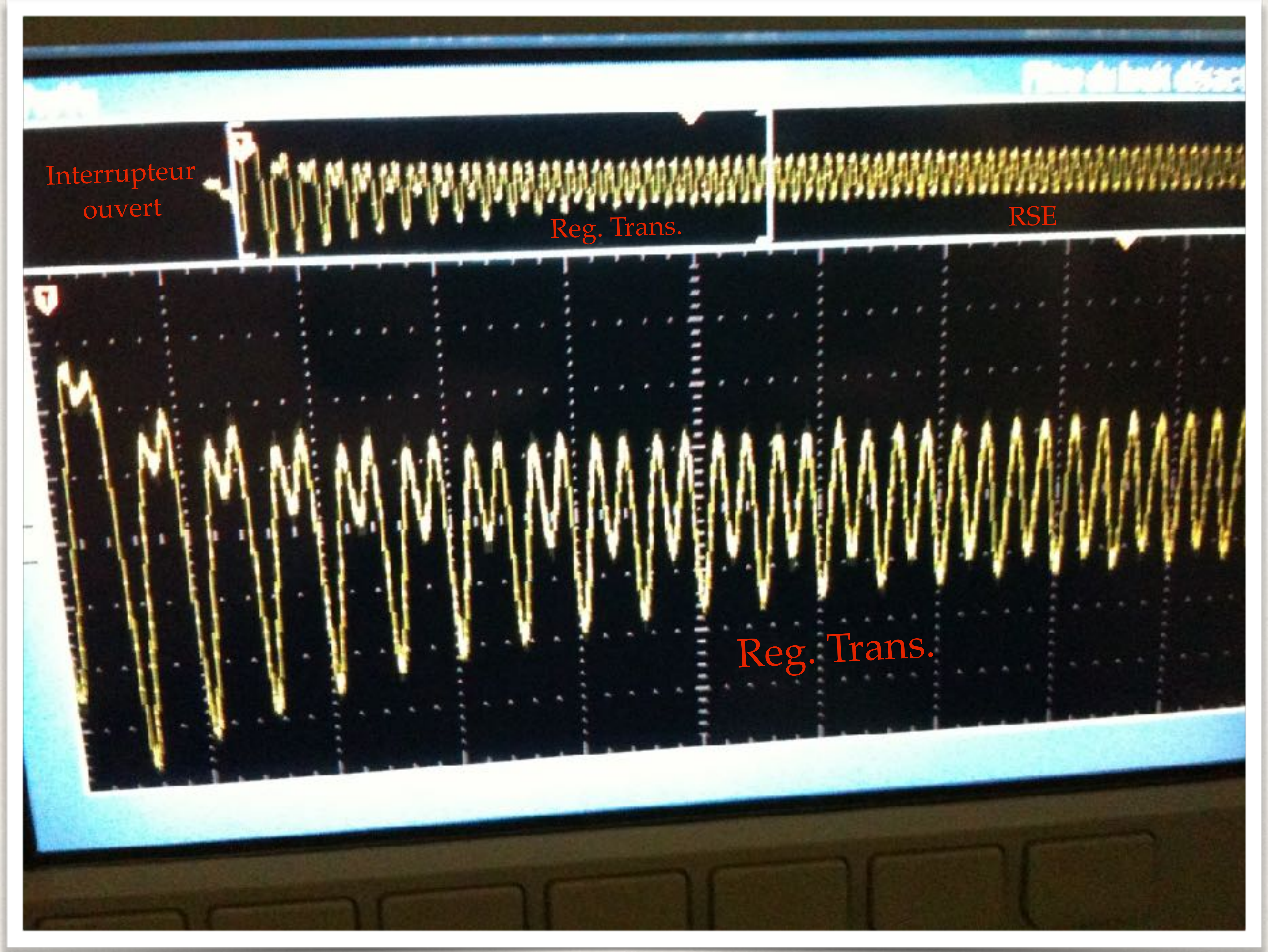
t ~ qq τ -> Un régime transitoire : mélange de SH et SP fonction de Ω et de ω.

C'est le démarrage des oscillations, fonction entre autres des conditions initiales

t >> τ -> Un régime Sinusoïdal établi (RSE) de fréquence ω : caractérisé par $i_0(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

Ce régime est indépendant des CI, mais dépend de ω, de ω_0 et du facteur de qualité Q

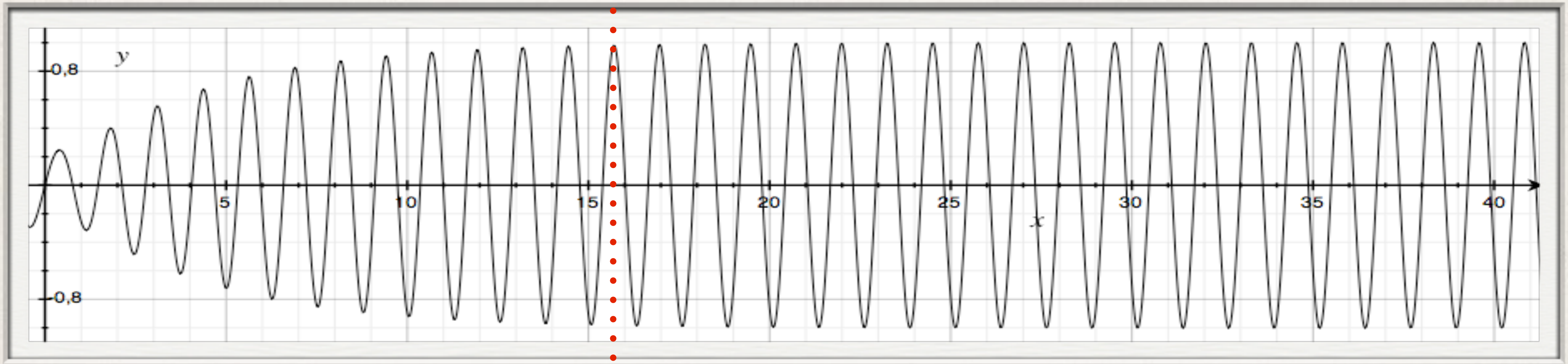

Interrupteur ouvert
Reg. Trans.
RSE


Interrupteur ouvert
Reg. Trans.
RSE
Reg. Trans.

Exemple de démarrage des oscillations :

Reg. Trans.

RSE



Dans tous les cas, une fois la solution homogène amortie, le régime transitoire cède la place au Régime Sinusoïdal Etabli (RSE) caractérisé par :

- une amplitude
- une phase

C'est la solution particulière i_P, paramétrée par ω

REVISION COMPLETE DE SP 1 :

- Représentation complexe du signal sinusoïdal
- Représentation de Fresnel

Noter sur une copie double

2 - Modélisation en Complexe du RSE dans un circuit RLC série

(On ne se préoccupe plus du régime transitoire)

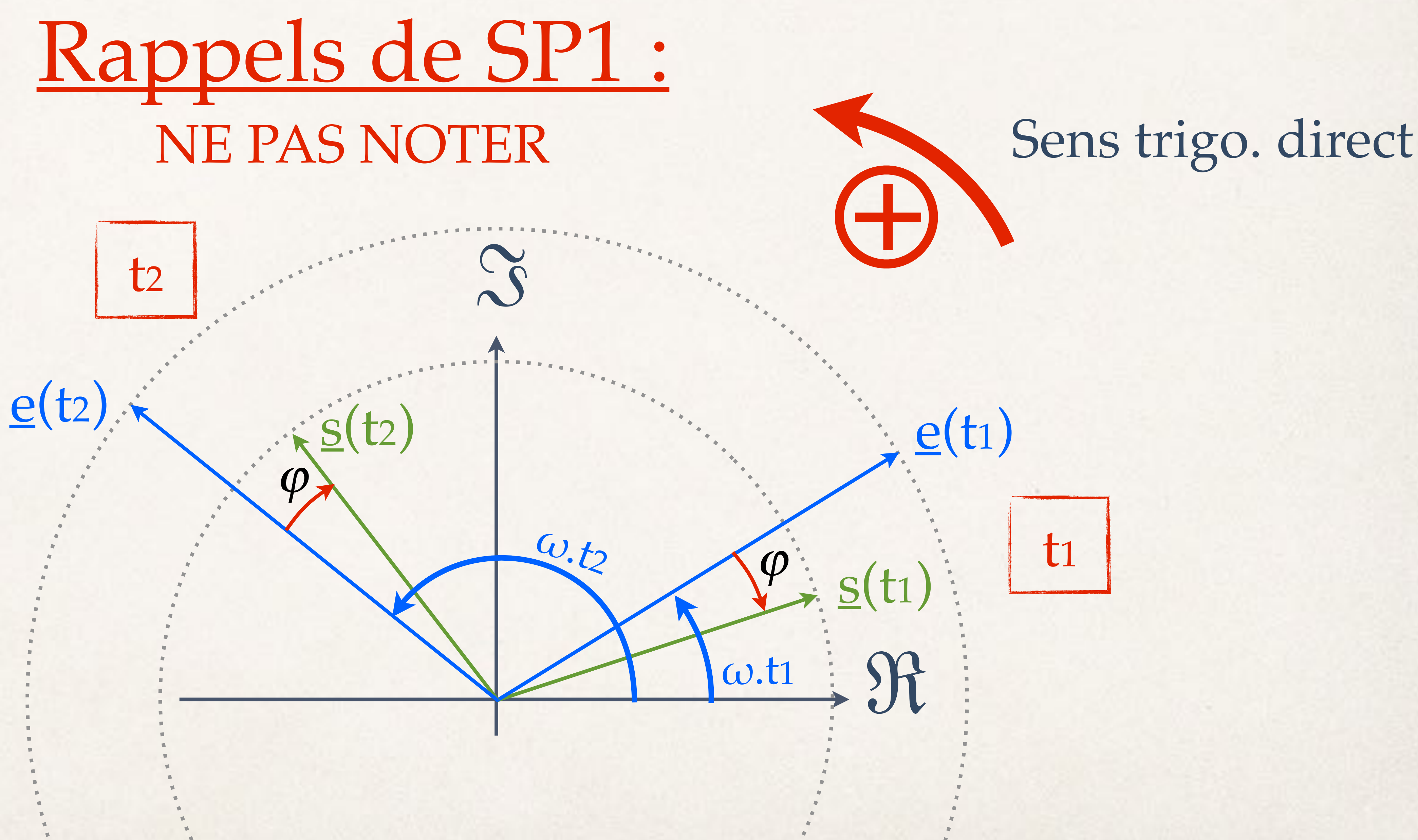
α - Représentation complexe des signaux électriques

* Le signal électrique en Complexe

✳ Représentation dans le plan $\mathbb{C}$: Représentation de Fresnel

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t)$$

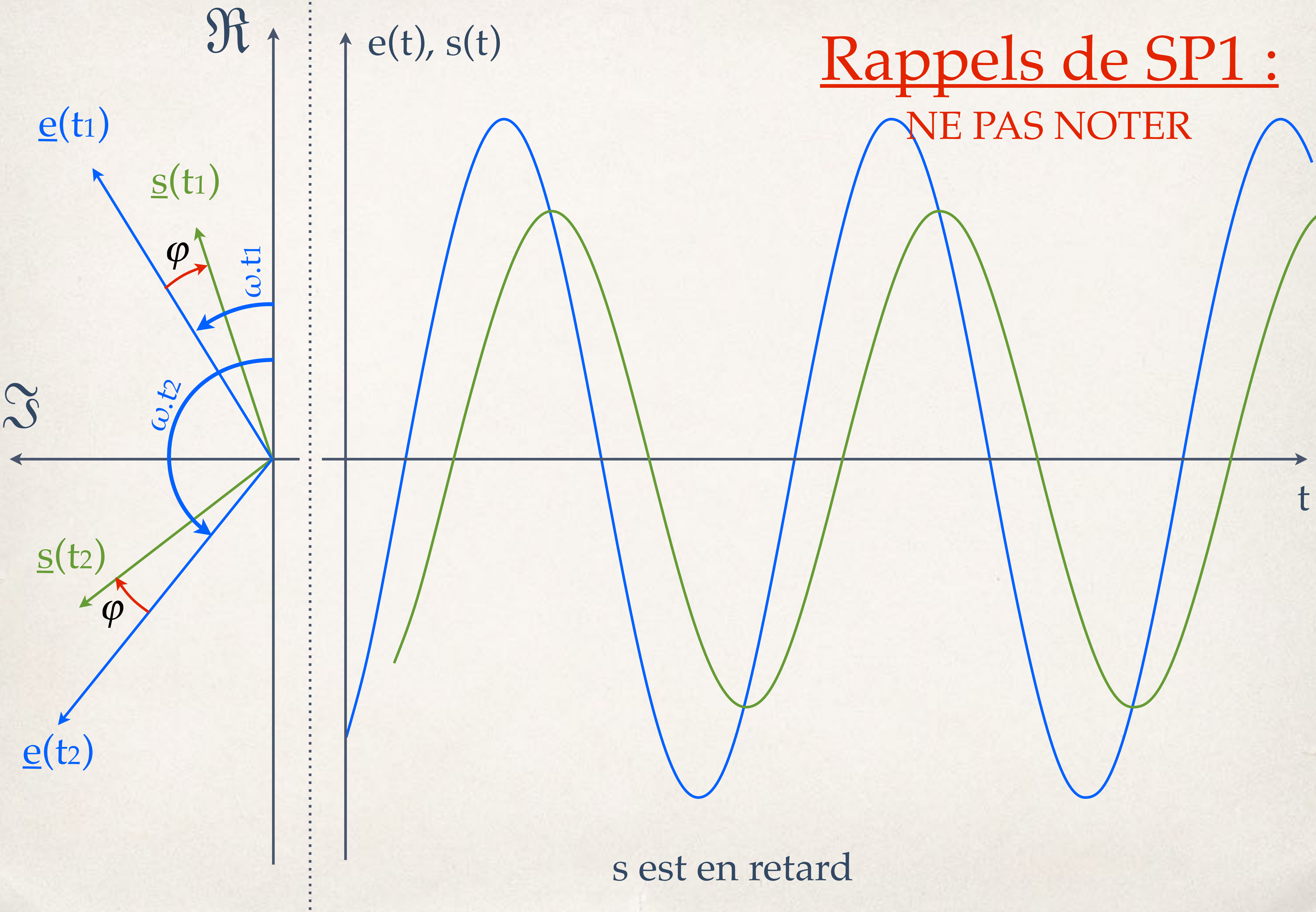
$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



Les signaux $\mathbb{C}$ tournent autour de l'origine à la vitesse angulaire ω

Rappels de SP1 :

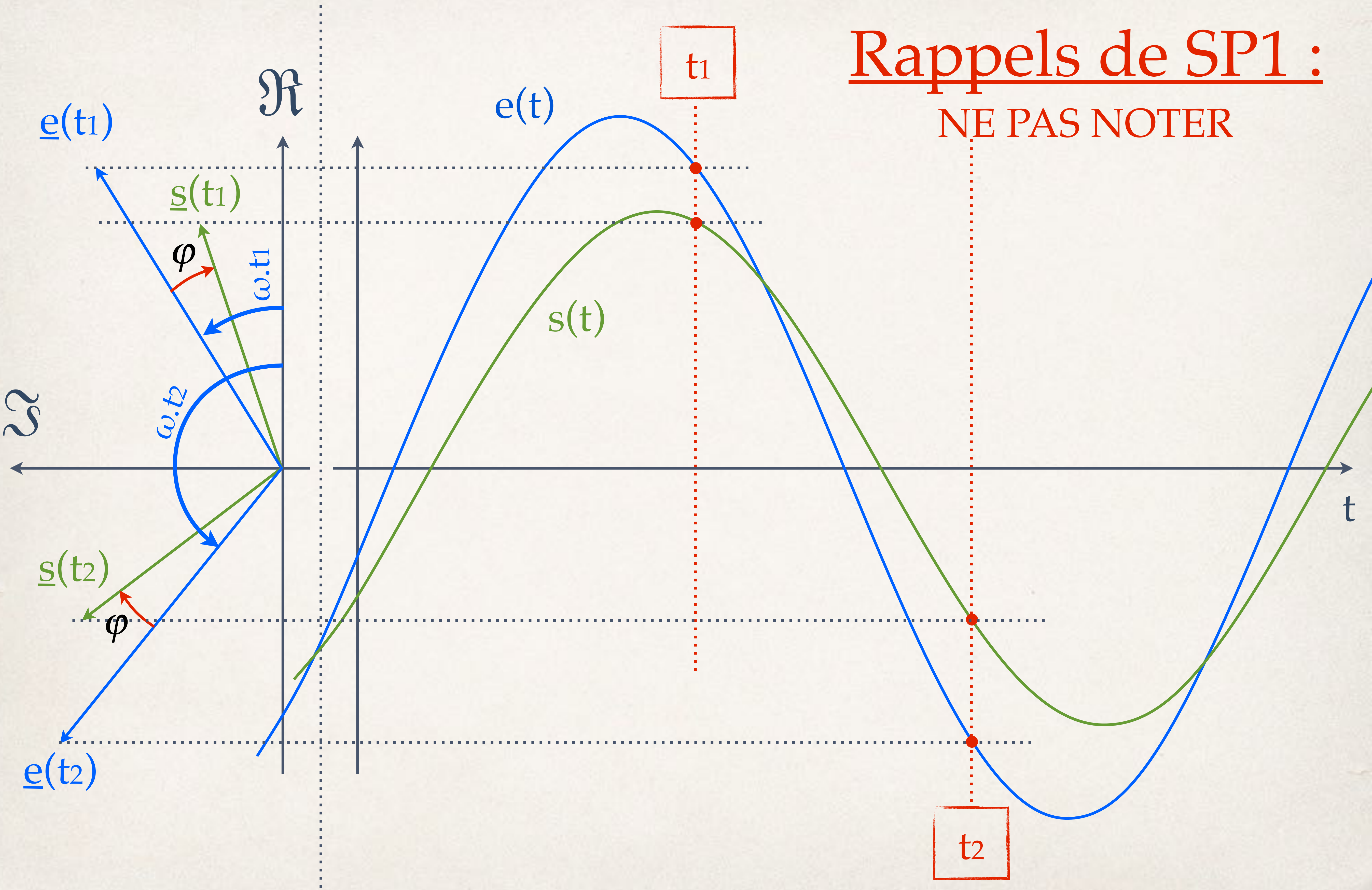
NE PAS NOTER



s est en retard

Rappels de SP1 :

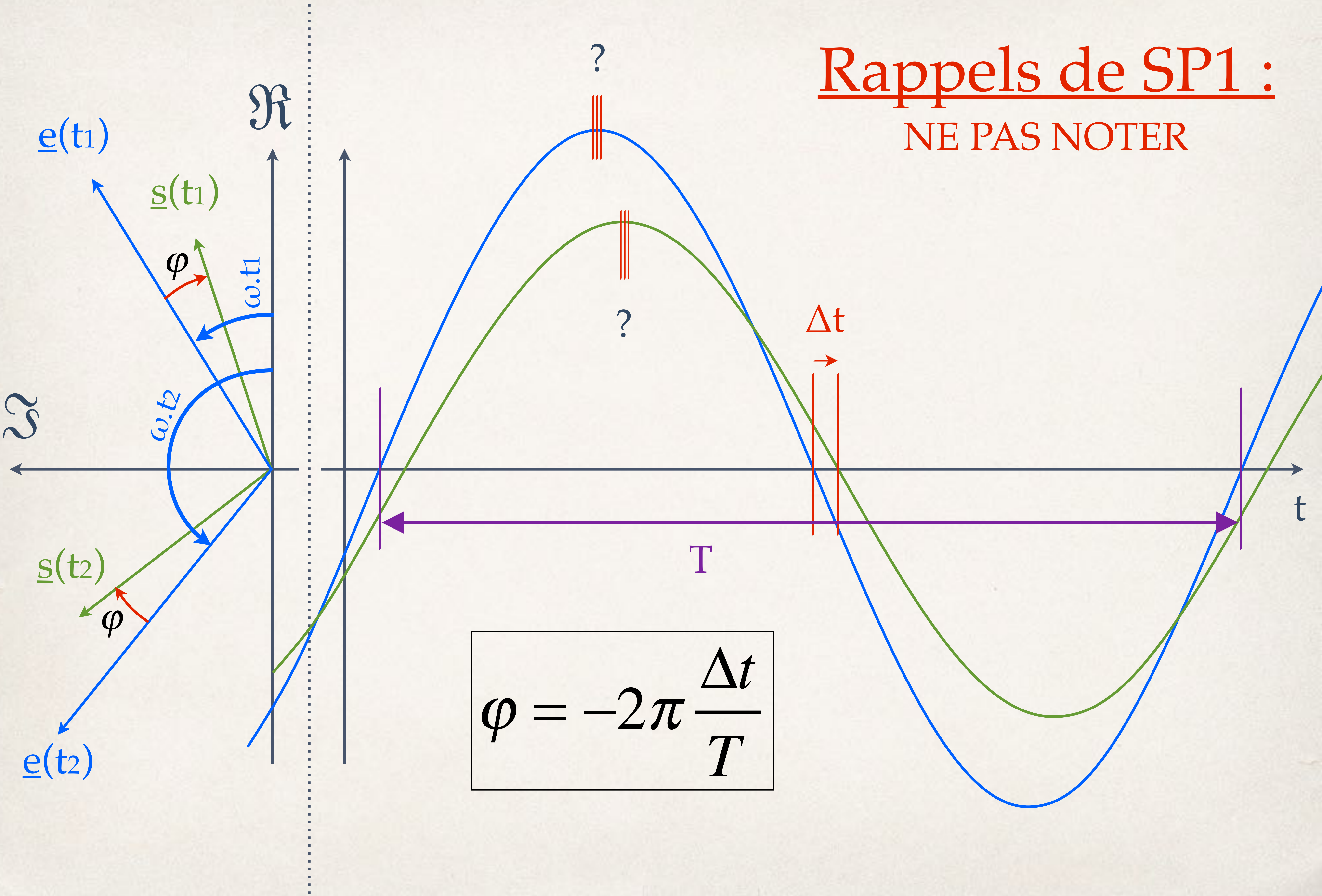
NE PAS NOTER



RQ : pour les mesures de phases, on utilise pas les min-max mais les zéros de la courbe

Rappels de SP1 :

NE PAS NOTER



$$\boxed{\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T}}$$

✳ Conditions d'utilisation !

On peut mener tous les calculs de l'EC avec les $\mathbb{C}$, tant que les opérations effectuées sont linéaires.

Exemples :

$$\mathrm{Re}(\alpha \underline{S}_1 + \beta \underline{S}_2) = \mathrm{Re}(\alpha \underline{S}_1) + \mathrm{Re}(\beta \underline{S}_2)$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\underline{S}}{dt}\right) = \frac{d\,\mathrm{Re}(\underline{S})}{dt} \qquad \mathrm{Re}\left(\int \underline{S}(t)\,dt\right) = \int \mathrm{Re}(\underline{S}(t))\,dt$$

Contre - exemple : $\mathrm{Re}(\underline{u}\underline{i}) \neq \mathrm{Re}(\underline{u})\mathrm{Re}(\underline{i})$

Soit la puissance électrique : $P_{elec} = \mathrm{Re}(\underline{u})\mathrm{Re}(\underline{i})$

On ne peut pas multiplier des signaux complexes !
Ce n'est pas une opération linéaire.

Interêt pratique des Complexes

Soit : $\underline{s}(t) = s_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{s}_0 e^{j\omega t}$

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s}_0 e^{j\omega t} = j\omega \underline{s}$$

$$\int \underline{s}\ dt = \frac{\underline{s}_0 e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{j\omega}$$

Propriété :

Les opérateurs de calcul différentiel-intégral deviennent purement algébriques :

$$\frac{d\ ?}{dt} \rightarrow\ ?\times j\omega \qquad \qquad \int ?\ dt \rightarrow \frac{?}{j\omega}$$

Rq : tous nos signaux ont une valeur moyenne nulle en RSE

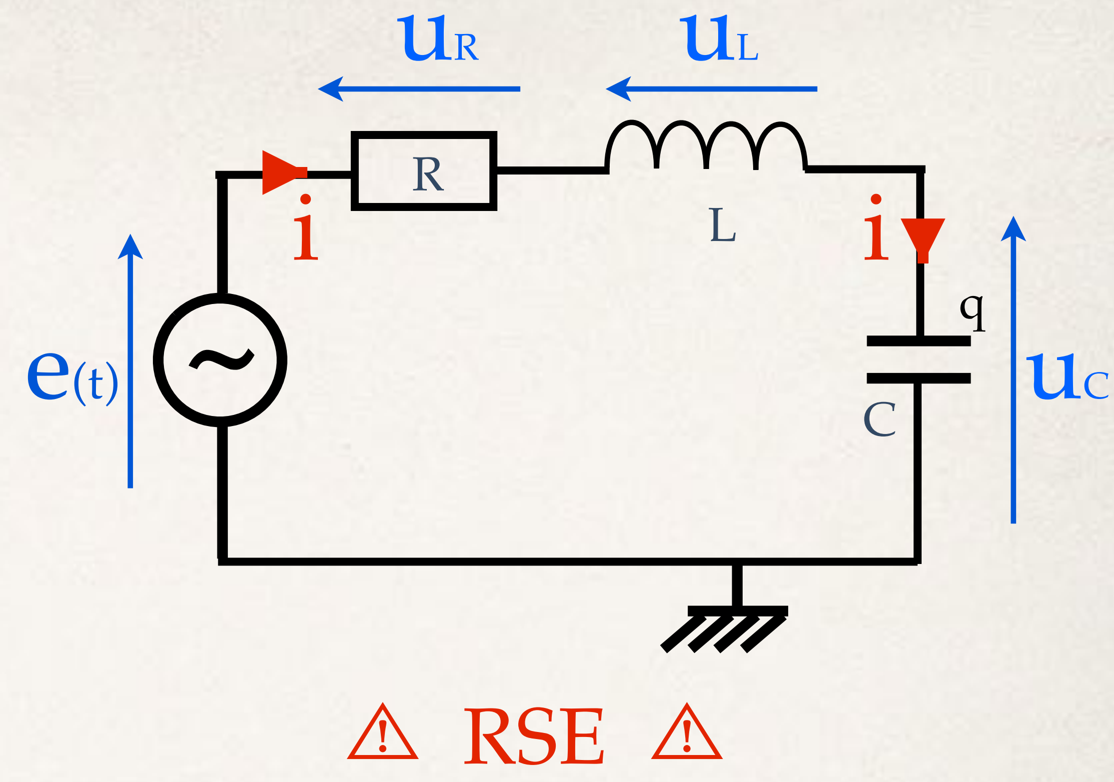
Pb en réel : $\dfrac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\sin(\omega t)$ $\qquad$ $\dfrac{d\sin(\omega t)}{dt} = +\cos(\omega t)$

Les opérations sont di-symétriques

β - Application au RLC série

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t) \qquad \underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t}$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad \underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{i}_0 e^{j\omega t}$$



- Mise en eq° :

LDM => obtenir : $\boxed{L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{de}{dt}}$

-on remplace les dérivées par jω

- Passage aux $\mathbb{C}$

$$\boxed{\underline{e} = \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right] \underline{i}}$$

-on simplifie les exp(jω)

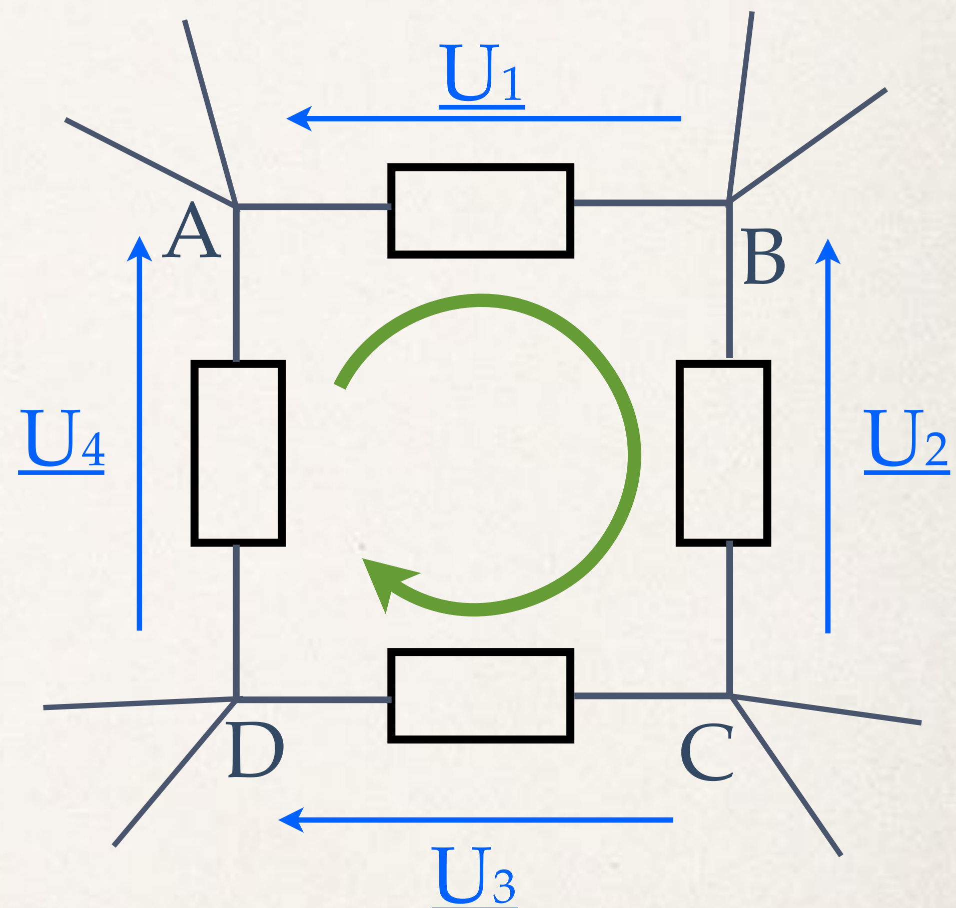
- Résultat : $\boxed{\underline{i}_0 e^{j\varphi} = \dfrac{\dfrac{e_0}{R}}{1 + \dfrac{j\omega L}{R} + \dfrac{1}{j\omega RC}}}$

Dans toute la suite on reprend EC 1 en passant aux complexes

II Modélisation $\mathbb{C}$ des dipôles linéaires usuels

1 - Les lois de Kirchhoff

La loi des mailles :



Loi EC 1 en réel :

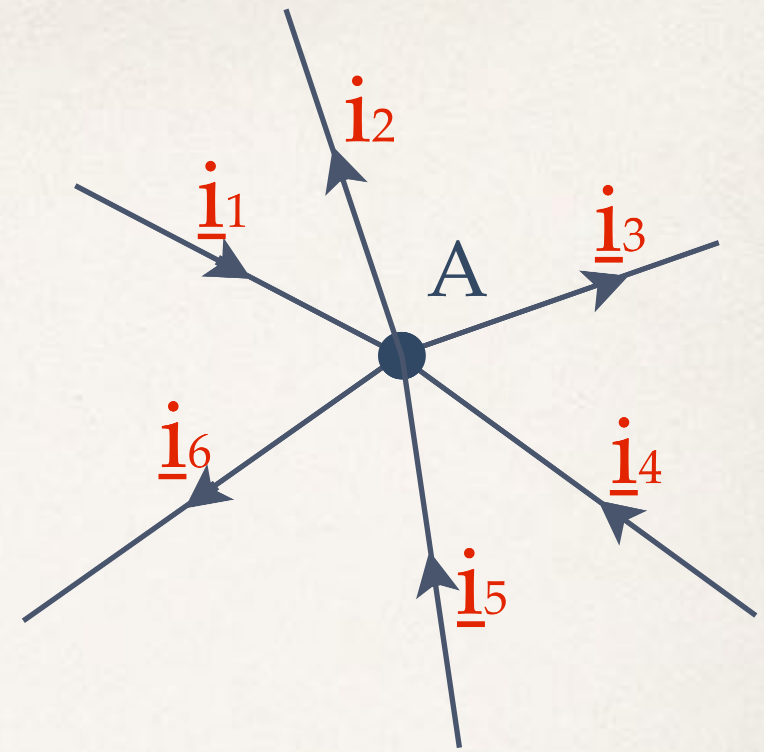
$\xrightarrow{\mathbb{C}}$

$\mathbb{C}$ => obtenir : $$\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$$

Erratum :
epsilon n'est pas souligné

La loi des noeuds :

ne pas noter le schéma



$\mathbb{R}$:

Loi EC 1 en réel :

$\mathbb{C}$

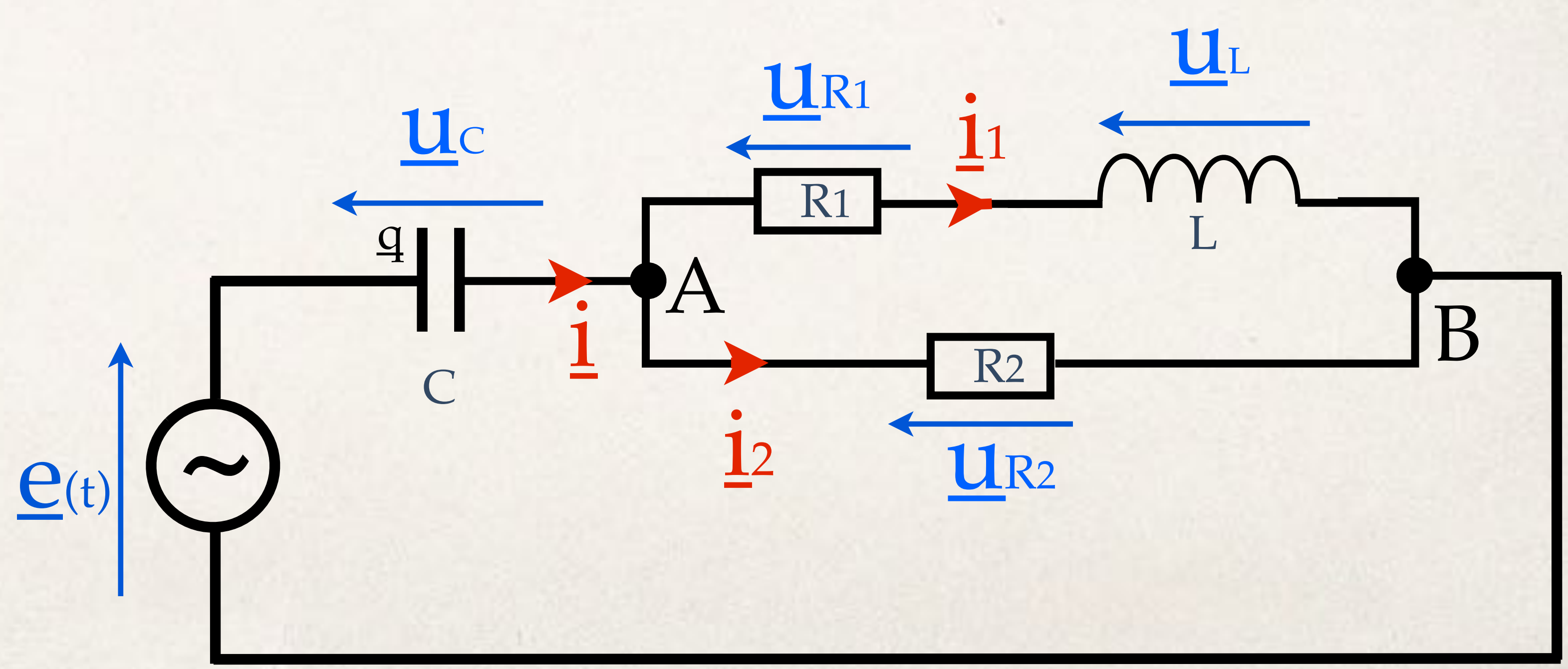
$\mathbb{C}$ => obtenir :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$$

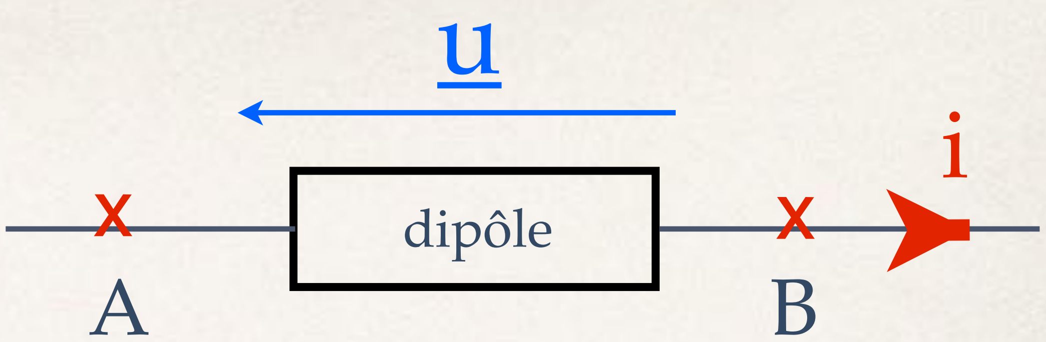
Erratum :
epsilon n'est pas souligné

Application directe :

IDEM



2 - Notion d'impédance $\mathbb{C}$:



α - Définition et propriétés

On considère des dipôles linéaires et passifs.

Déf. dipôle linéaire + passif : — En classe —

$\xrightarrow{\mathbb{C}}$ rq : reprendre la relation générale de linéarité des dipôles

Soit la relation générale : $\boxed{\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i}}$

Volt (V) Ohm (Ω) Ampère (A)

Propriétés de l'impédance $\mathbb{C}$:

Ecriture exponentielle

$\underline{Z}$ =

$\underline{Z}$ =

$|\underline{Z}|$ =

— En classe —

$\tan(\varphi(\underline{Z})) =$

On pose :

$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} =$

$|\underline{Z}|$ =

$\varphi(\underline{Z}) =$

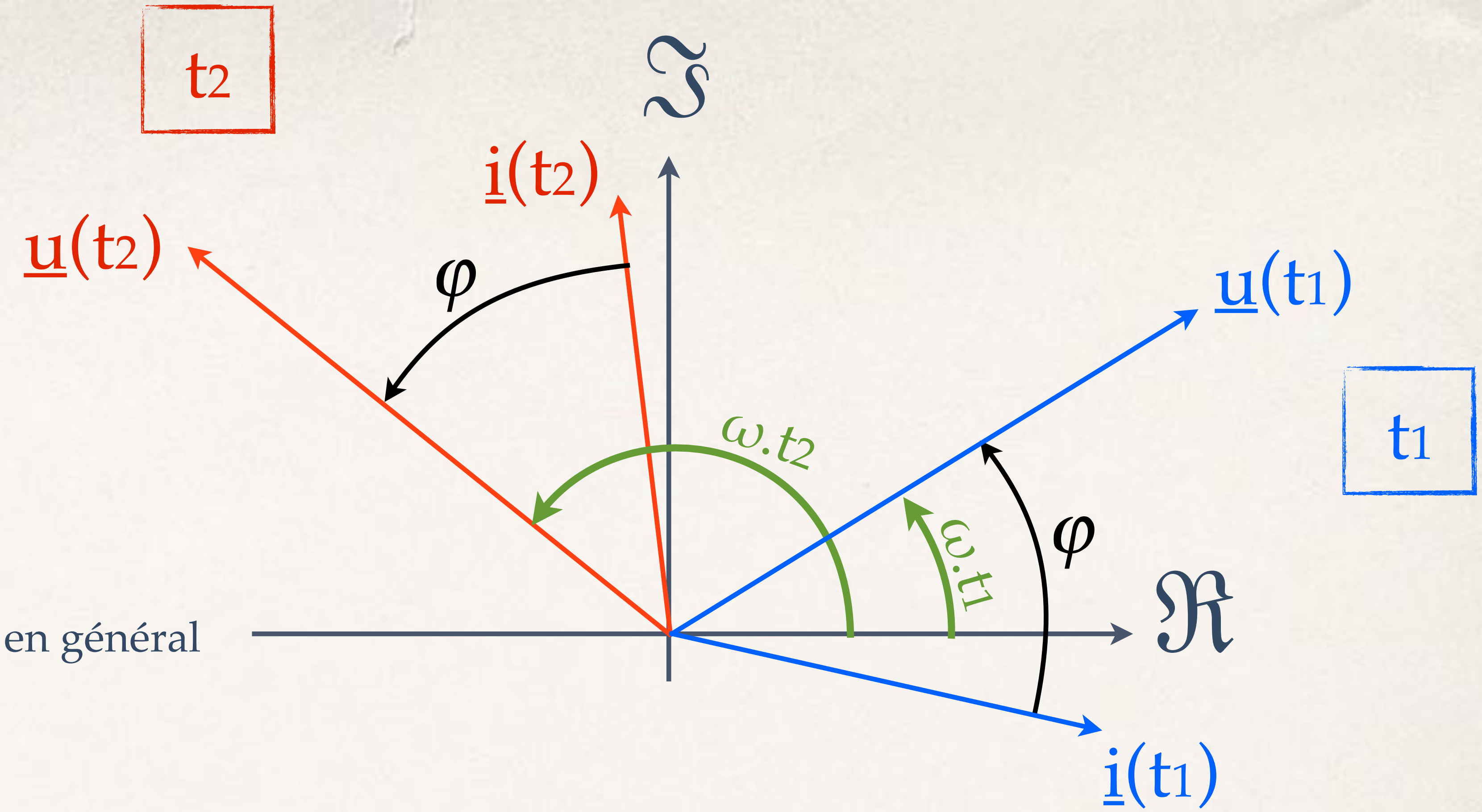
Csq 1 : L'impédance $\mathbb{C}$ relie les amplitudes de u et i par son module

⚠ ⚠ $\boxed{\text{Csq 2 : L'impédance } \mathbb{C} \text{ est responsable d'un déphasage entre } \underline{u} \text{ et } \underline{i}}$ ⚠ ⚠

En RSE u(t) et i(t) ne sont plus en phase en général

Signaux $\mathbb{C}$:

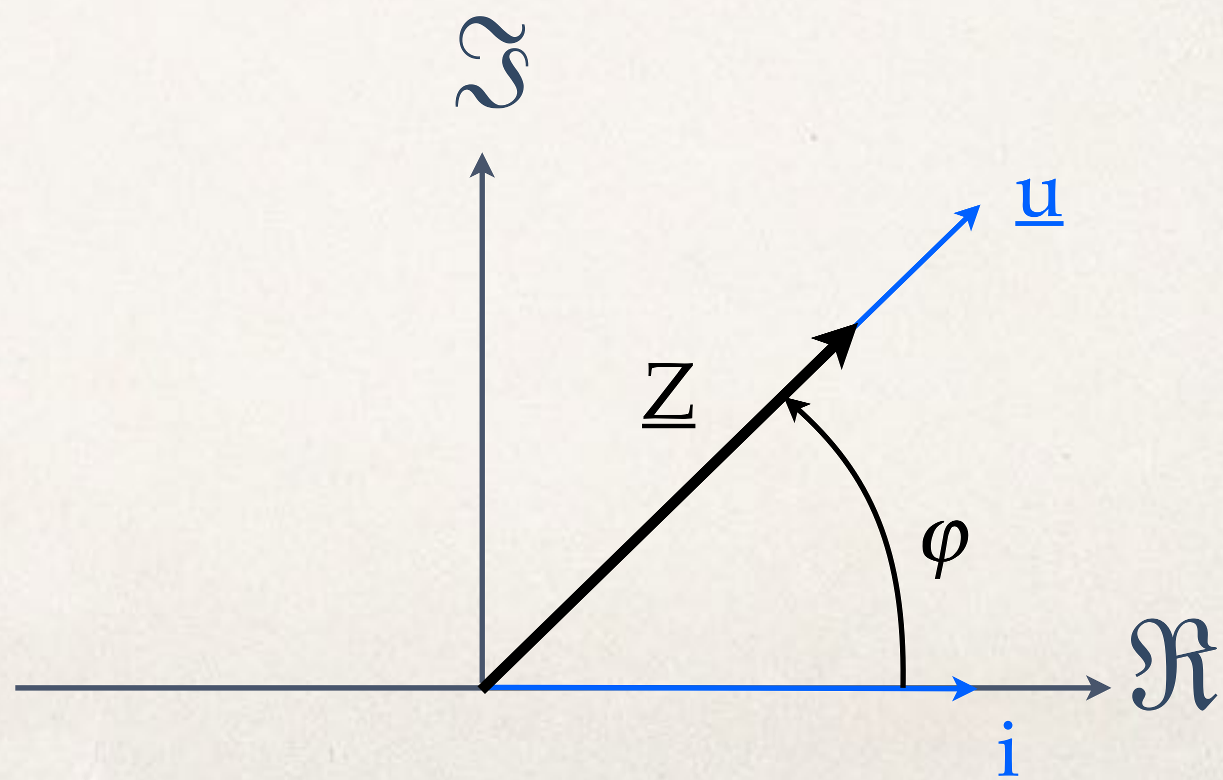
En RSE u(t) et i(t) ne sont plus en phase en général

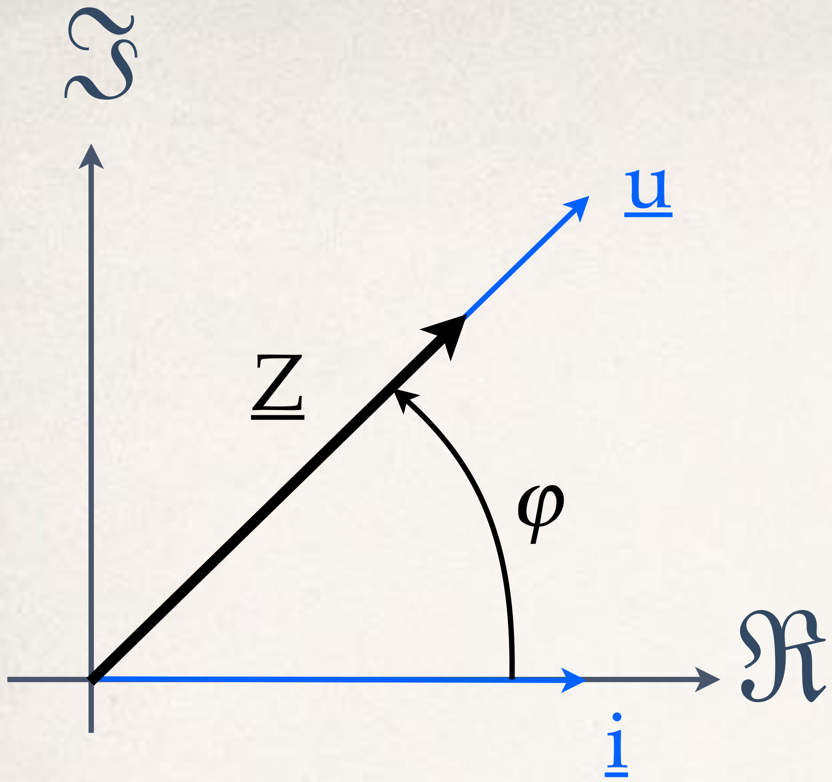


Représentation de Fresnel de l'impédance :

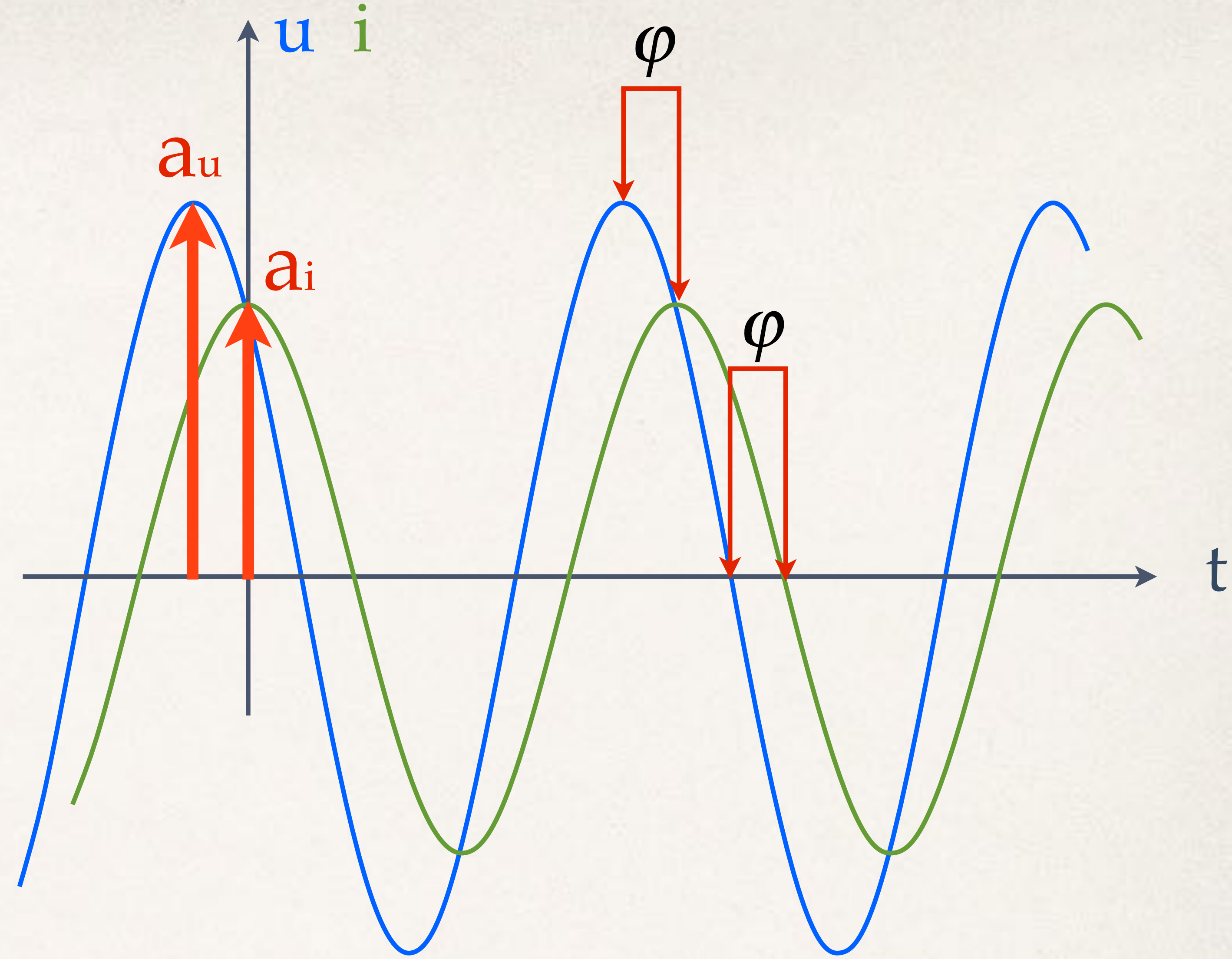
On représente $\underline{Z}$ dans le plan complexe

$\underline{i}$ est pris comme référence





i est pris comme référence



Concrètement : quand un dipôle est parcouru par un courant, le courant et la tension à ses bornes ne sont pas en phase a priori

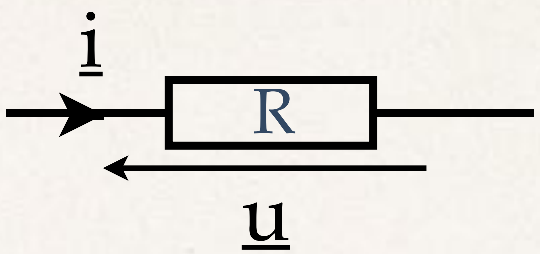
Rq : On définit l'admittance $\mathbb{C}$:

$$\boxed{\underline{Y} \equiv \frac{1}{\underline{Z}}}$$

en Siemens (S)

β - Impédances des dipôles usuels :

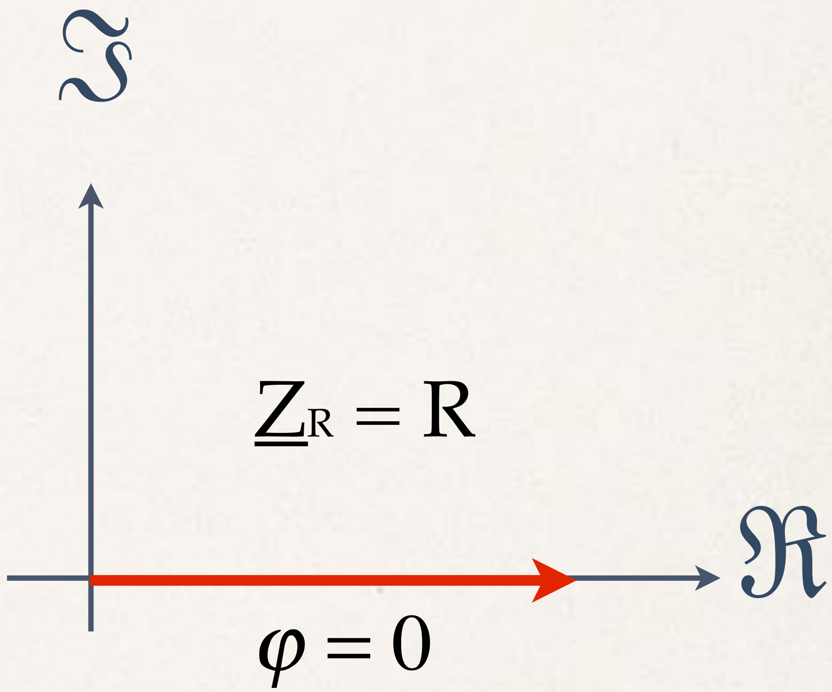
✳ La résistance :



$u =$ $\xrightarrow{\mathbb{C}}$ $\underline{u} =$

— très simple —

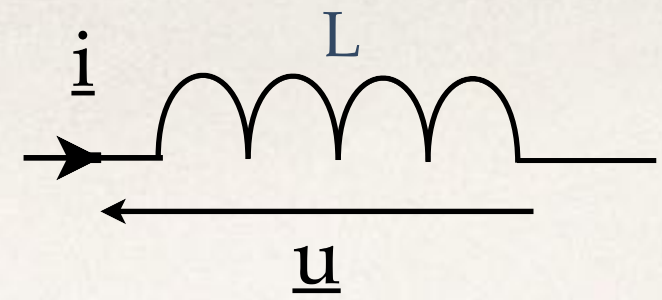
Soit $\underline{Z}_R =$



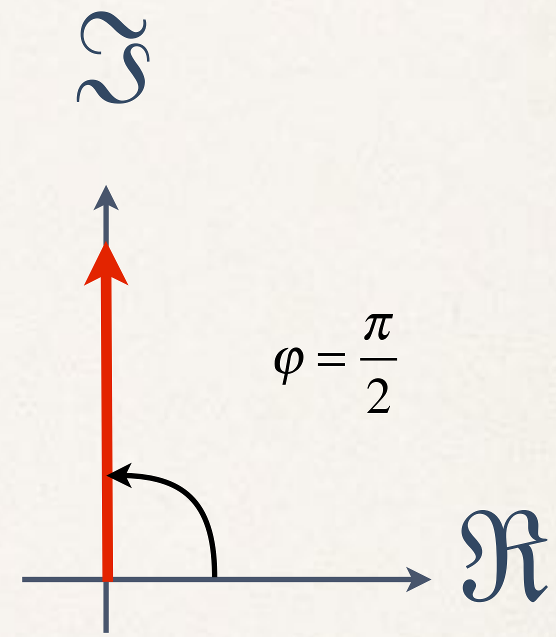
Propriété :

Aux bornes d'une résistance, courant et tension restent en phase, son comportement ne dépend pas de la fréquence.

L'inductance :



$$u_L = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{u}_L = ?\times \underline{i}$$



Soit $\underline{Z}_L =$

— A compléter —

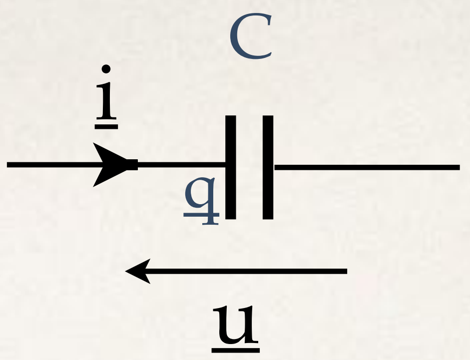
Comportements asymptotiques :

$\omega = 0$

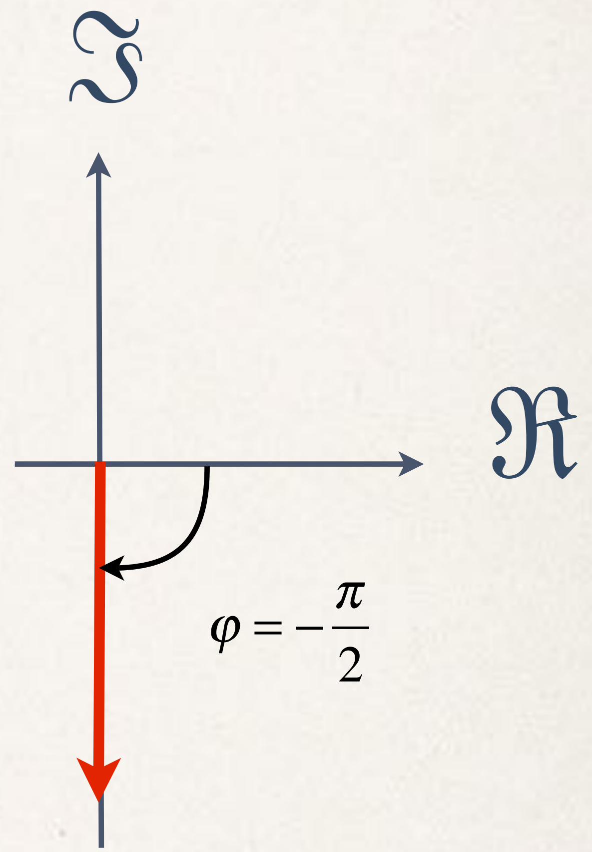
$\omega \to \infty$

$\varphi(\omega) =$

✳ Le condensateur :



$$i = C\frac{du_c}{dt} \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{u}_c = ?\times \underline{i}$$



Soit $\underline{Z}_C =$

— A compléter —

Comportements asymptotiques :

$\omega = 0$

$\omega \to \infty$

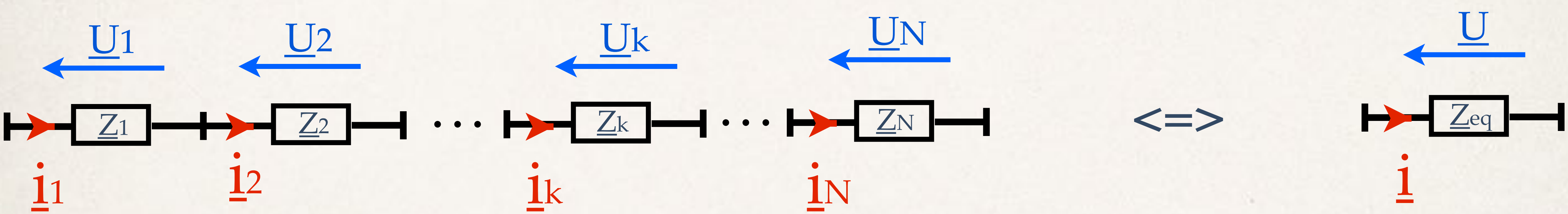
$\varphi(\omega) =$

3 - Association de dipôles linéaires usuels :

Très simple en $\mathbb{C}$: Formellement elle est analogue à l'association de résistances car on a toujours $\underline{u} = \underline{Z} \,.\, \underline{i}$ pour tout dipôle linéaire.

Reprendre la démo des résistances en série

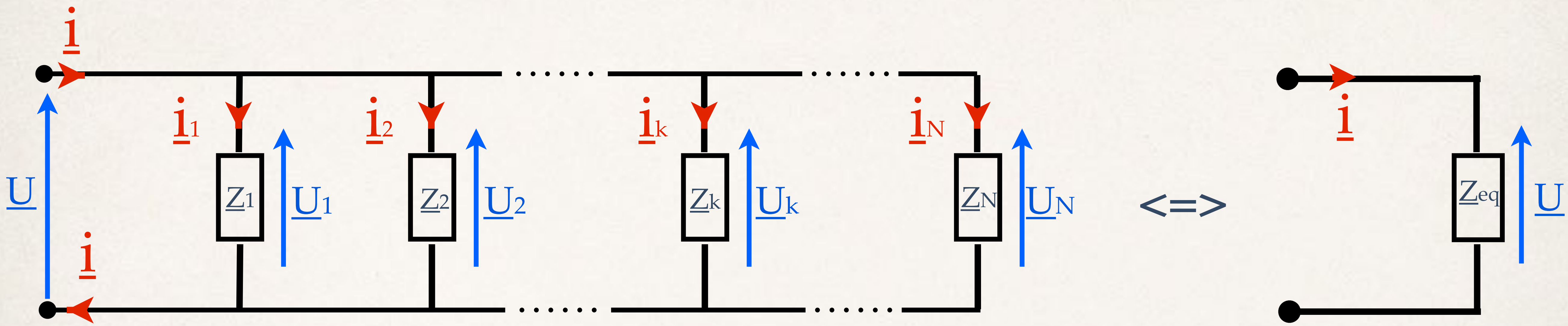
α - Association en série de dipôle linéaires :



$\underline{Z}_{eq} = ?$

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

β - Association en parallèle de dipôle linéaires :



$\underline{Z}_{eq} = ?$

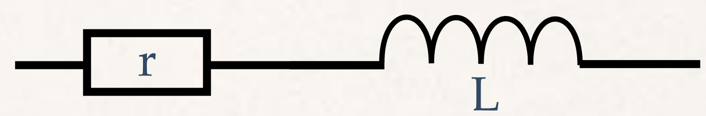
Reprendre la démo des résistances en parallèle

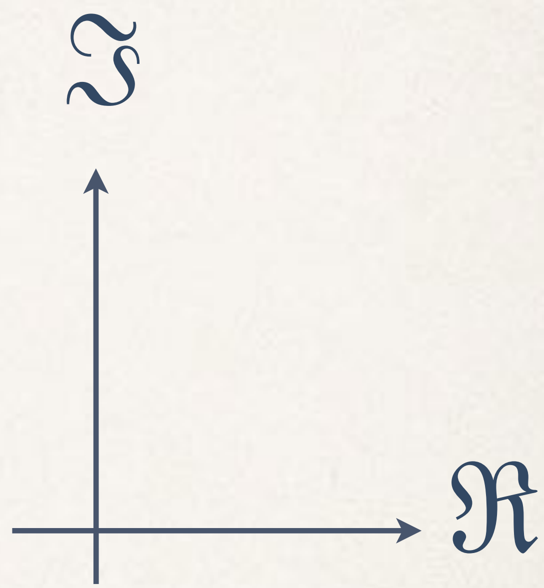
$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

γ - Exemples simples :

1 - Appliquer les règles d'association
2 - Tracer la représentation de Fresnel

Inductance réelle :



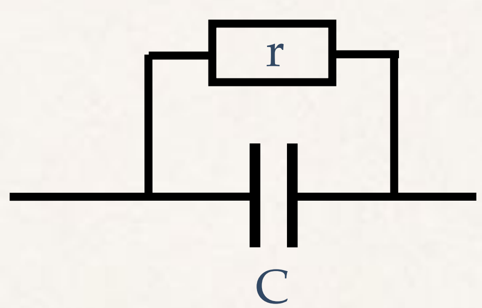


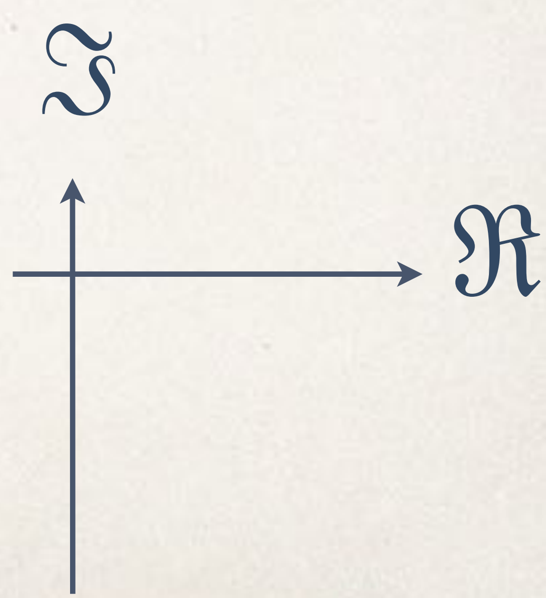
$\underline{Z} =$

$|\underline{Z}| =$

$\arg(\underline{Z}) =$

Condensateur réel :





$\underline{Z} =$

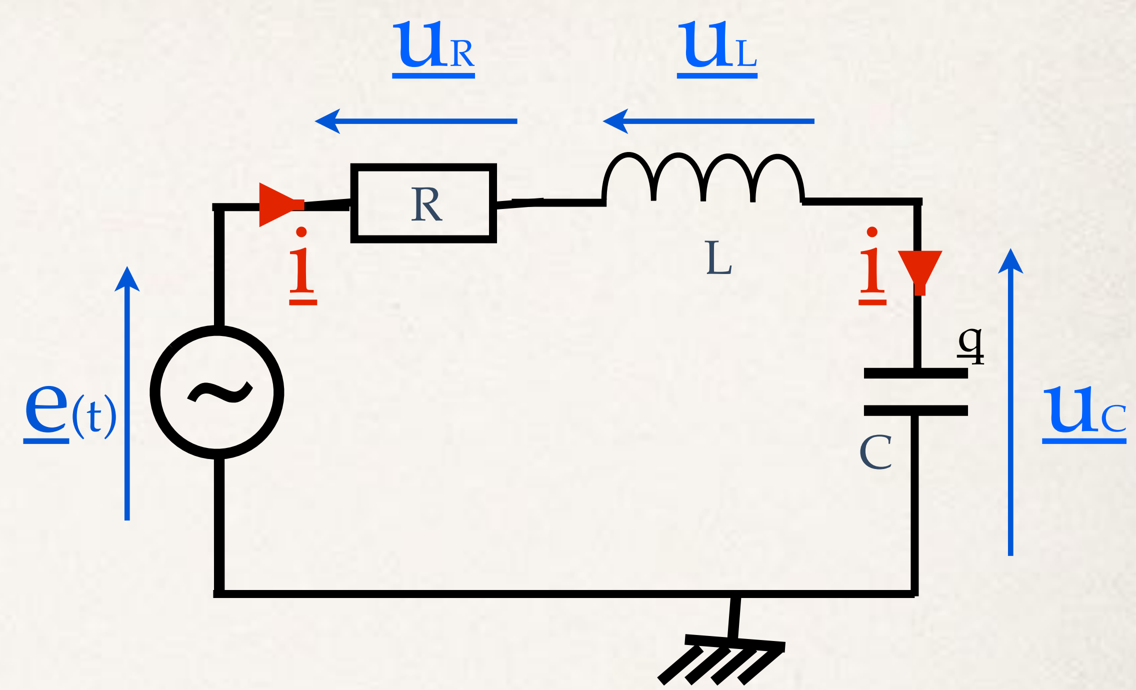
$|\underline{Z}| =$

$\arg(\underline{Z}) =$

Application directe :

Trouvez $\underline{i}(\omega)$?

Version Samouraï :
=> en trois coups de sabre laser !



Ecrire la LDM en utilisant cette fois $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$

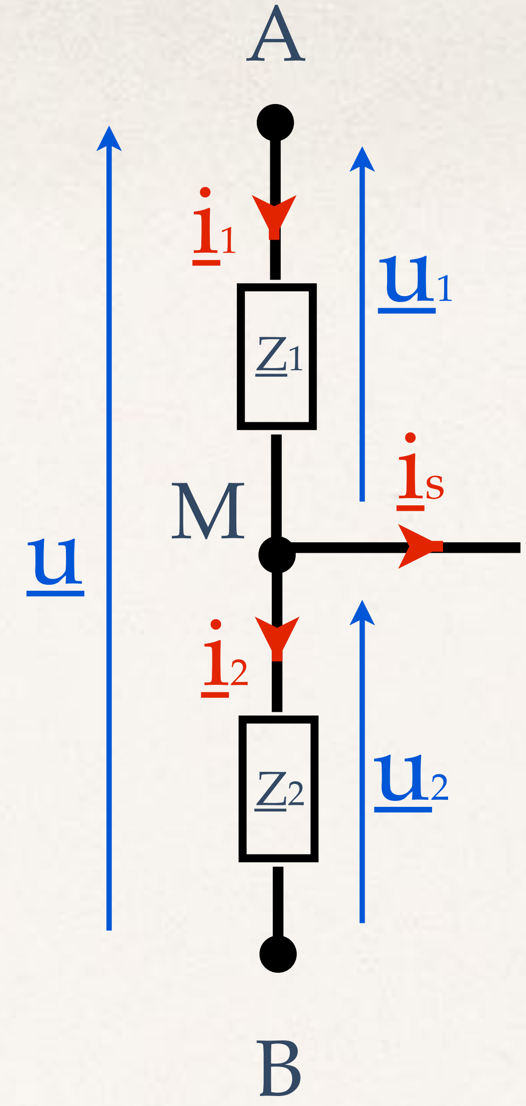
$$\boxed{\underline{i}_0 e^{j\varphi} = \frac{\dfrac{e_0}{R}}{1 + \dfrac{j\omega L}{R} + \dfrac{1}{j\omega RC}}}$$

4 - Diviseurs de tension et courant :

α - Diviseur de tension :

A retrouver

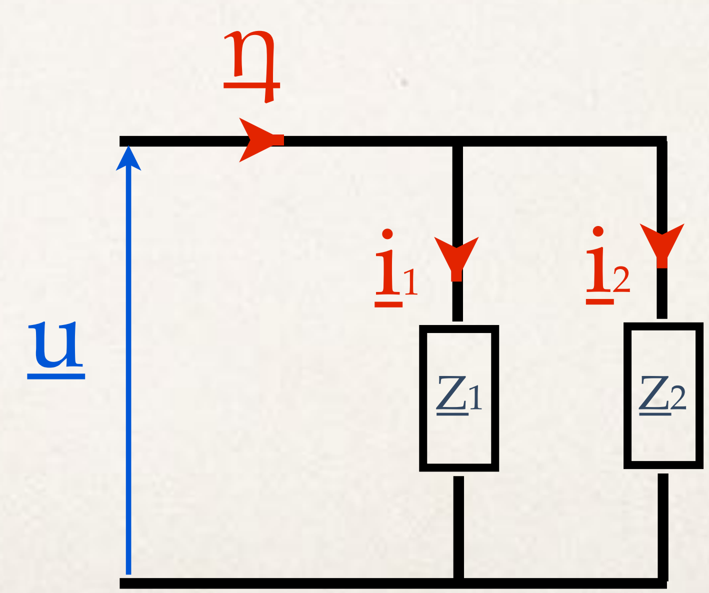
-> mêmes formules en souligné …



Hypothèse

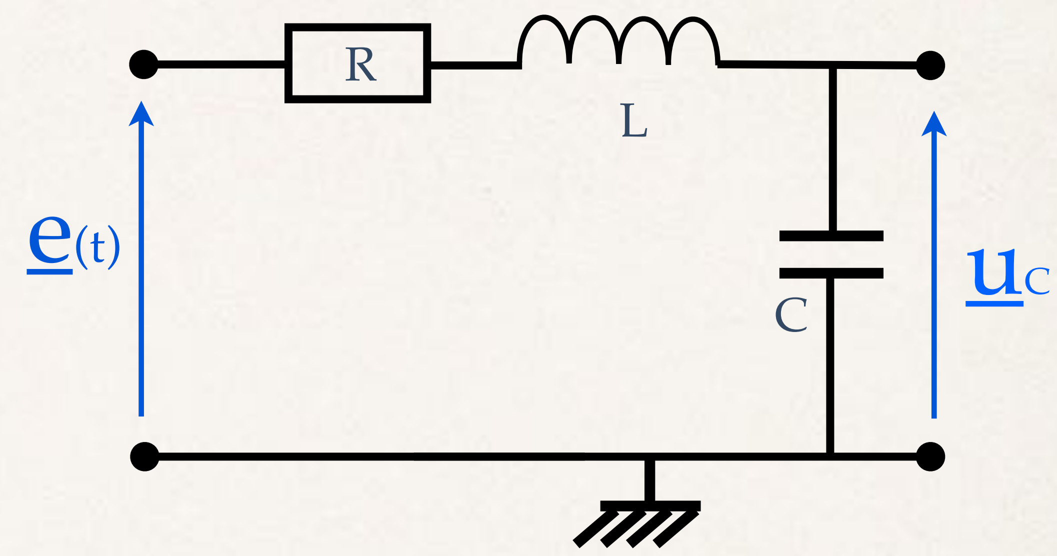
$\underline{i}_s = 0$

β - Diviseur de courant



Application directe :

Exprimez u_c en fonction de e



DT en complexe :

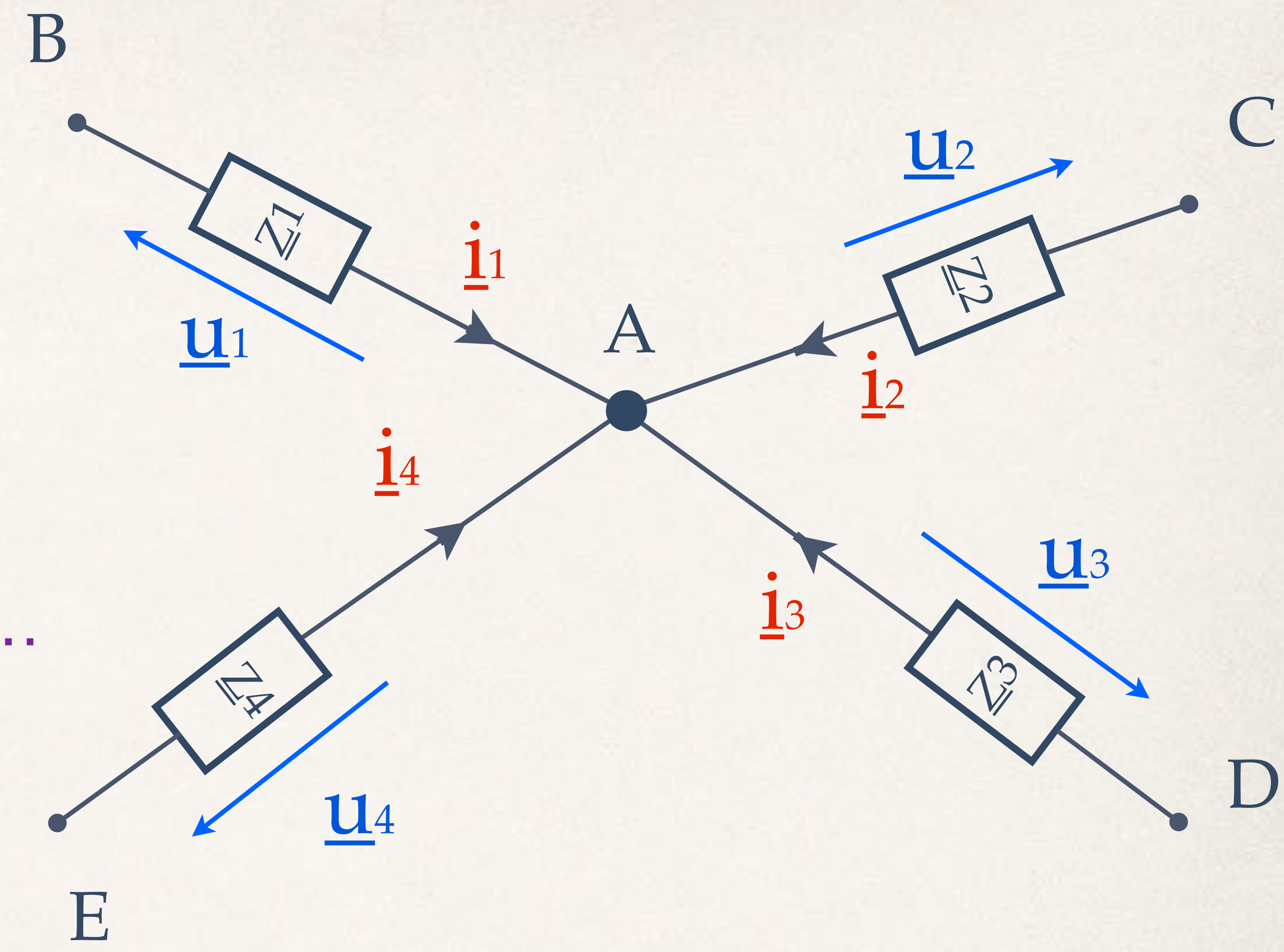
Obtenir :

$$\boxed{\underline{u}_c = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC}}$$

5 - Théorème de Millmann :

A retrouver

-> même Démo …
-> mêmes formules en souligné …



6 - Principe de superposition : (Admis)

Le principe de superposition s'applique toujours en RSE :

- Lois de Kirchhoff linéaires
- Dipôles linéaires : $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$
- Pas besoin de Cond. Ini.

7 - Equivalences des générateurs de Thévenin et Norton :

Th de Thévenin :

Ne pas noter

Soit un réseau linéaire connecté à un autre réseau par ses bornes A et B. Vu depuis ses bornes A et B, le réseau linéaire est équivalent à une source de tension réelle :

- dont la f.e.m est égale à la tension du réseau en circuit ouvert entre A et B.
- dont la résistance interne est égale à celle du réseau toute source éteinte.

(Admis)

Th de Norton :

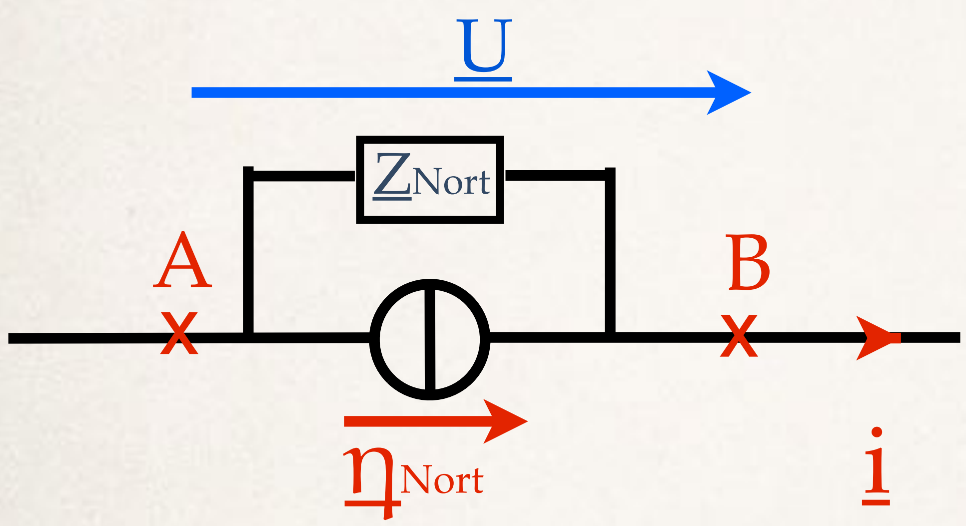
Ne pas noter

Soit un réseau linéaire connecté à un autre réseau par ses bornes A et B. Vu depuis ses bornes A et B, le réseau linéaire est équivalent à une source de courant réel :

- dont le courant est égal au courant de court circuit entre A et B.
- dont la résistance interne est égale à celle du réseau toute source éteinte.

(Admis)

On en déduit l'équivalence entre générateurs de tension et de courant :

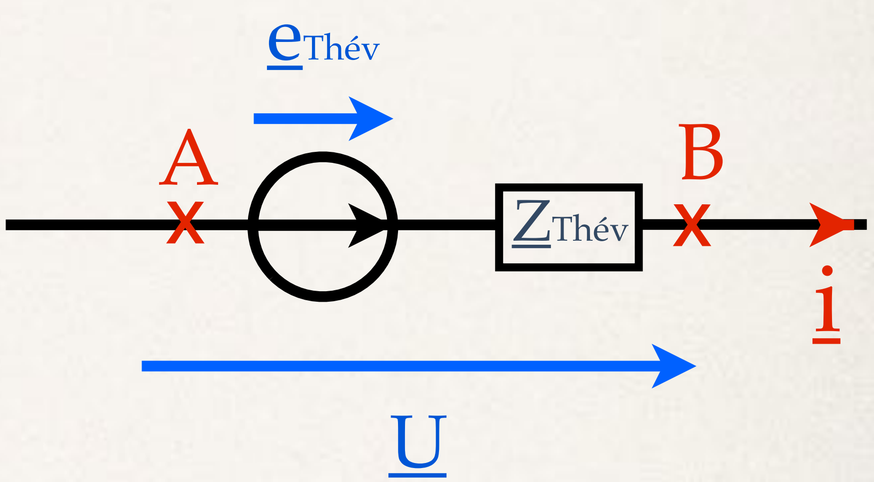


Th. Thévenin

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Th. Norton



$$\underline{\eta}_{Nort} = \frac{\underline{e}_{Thév}}{\underline{Z}_{Thév}}$$

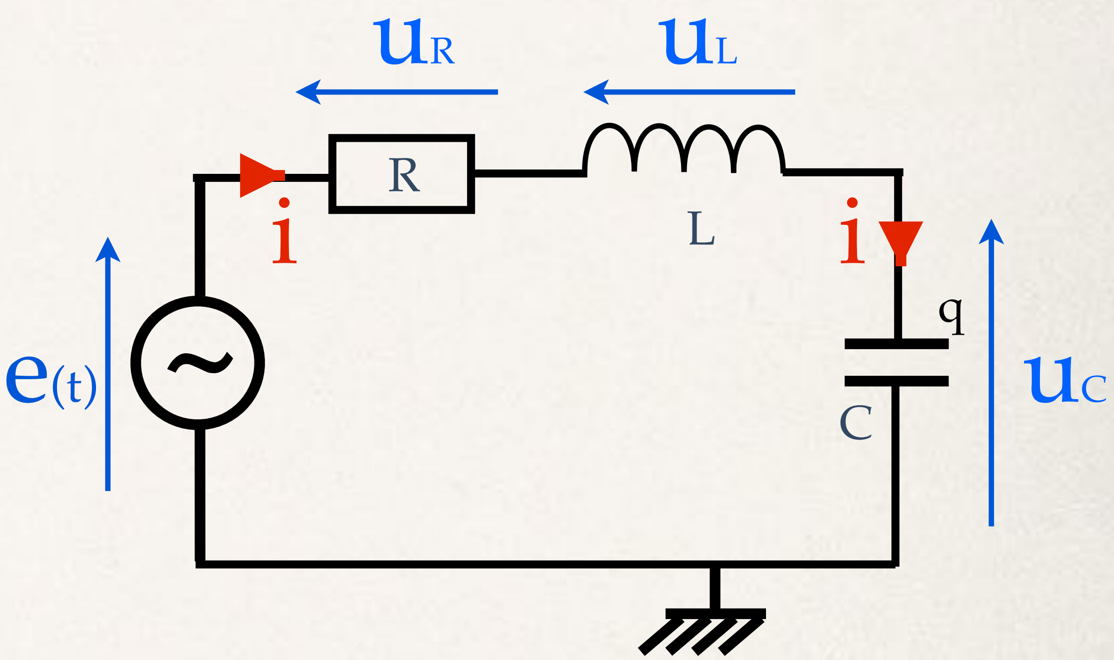
$$\underline{Z}_{Nort} = \underline{Z}_{Thév}$$

$$\underline{e}_{Thév} = \underline{\eta}_{Nort}\,\underline{Z}_{Nort}$$

$$\underline{Z}_{Thév} = \underline{Z}_{Nort}$$

III Réponse en courant et tension d'un circuit RLC série en RSE

Le régime libre du RLC est caractérisé par 2 temps :



- Temps d'amortissement : $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$

- Période propre : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

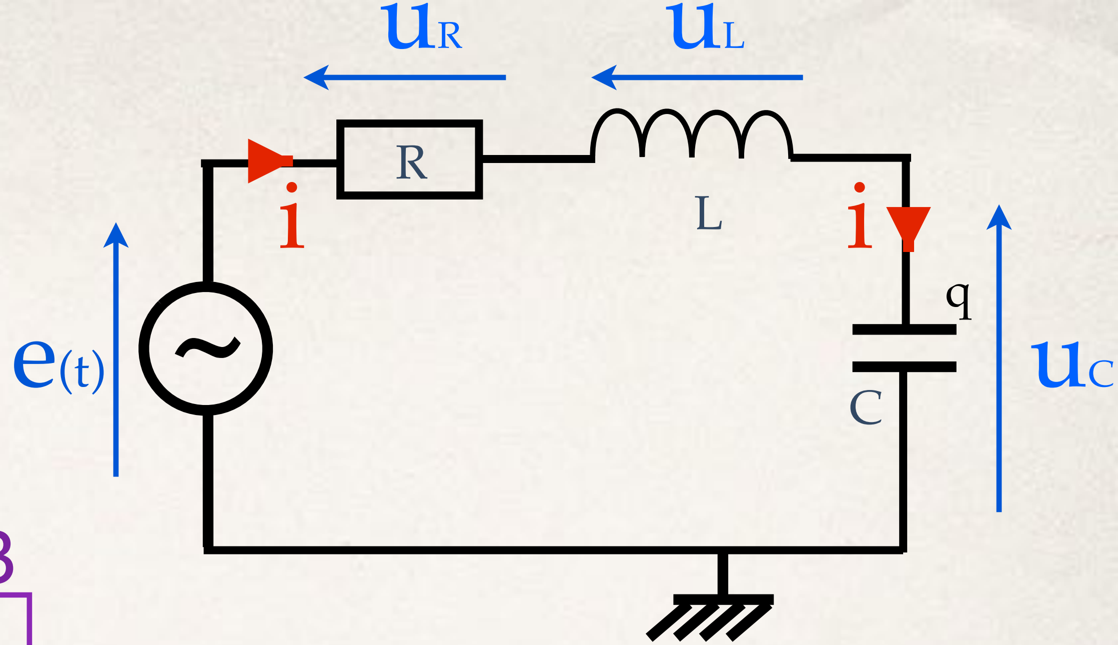
Comment vont répondre les dipôles du circuit si on leur impose une cadence ω qui ne correspond pas nécessairement aux temps propres du circuit ?

-Réponse en courant i(ω) : tension aux bornes de la résistance.

-Réponse en tension $u_C(\omega)$: tension aux bornes du condensateur.

Pont de Tacoma 1940 - vent 65km/h

1 - Réponse en intensité et résonance



Loi des mailles :

Ré-écrire la formule obtenue pour i avec Q et ω_0

Deux formes :

A

$$\underline{i}_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{e_0}{R}}{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}$$

B

$$\underline{i}_0 e^{j\varphi} = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}\frac{e_0}{R}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

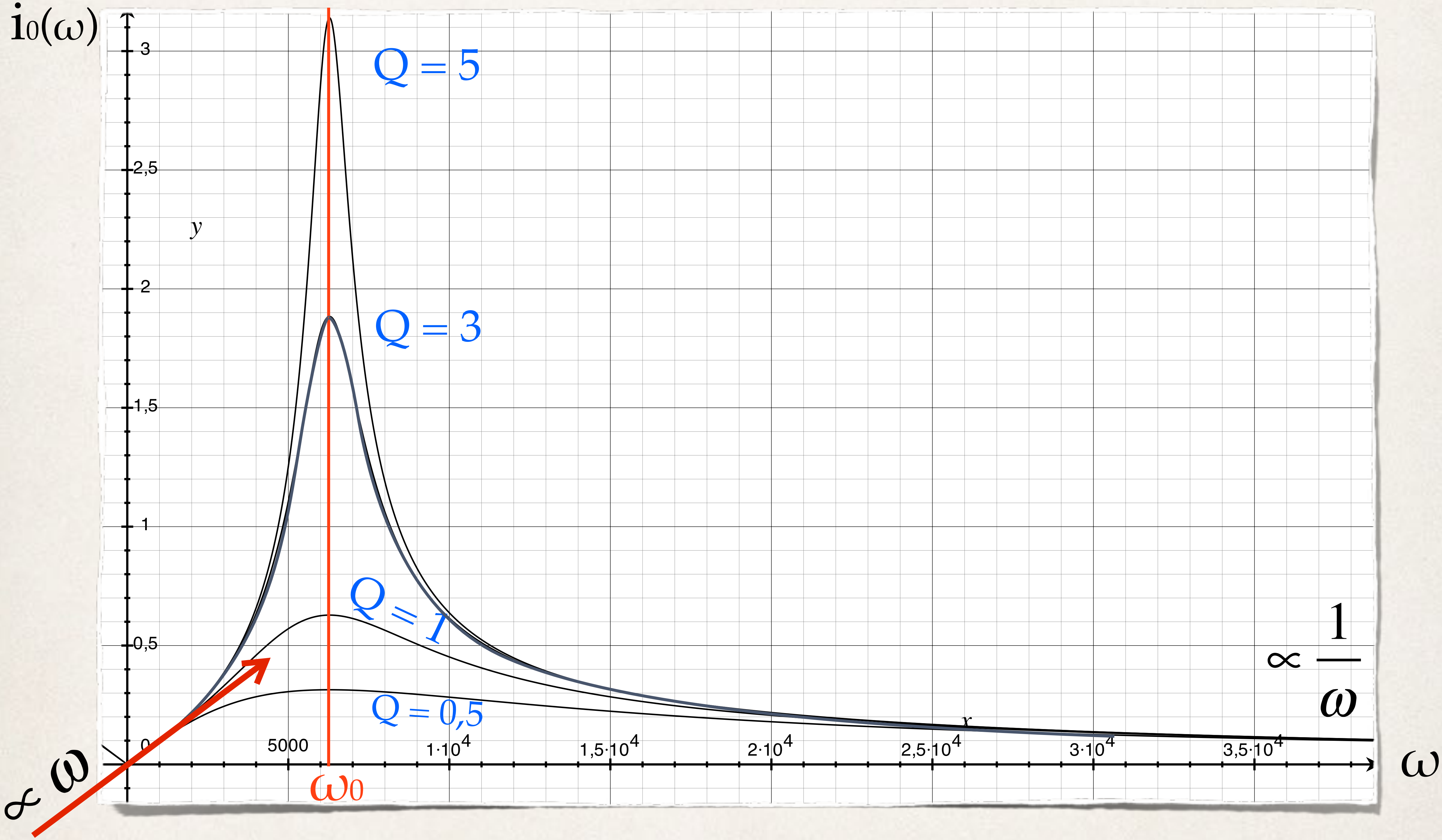
α - Amplitude du courant

Calculer le module et l'argument de i sur la forme A

Obtenir un « équivalent » complexe de i lorsque :

- Comportement aux basses fréquences (BF) : $\omega \ll \omega_0$
- Comportement lorsque $\omega = \omega_0$: Résonance $\omega = \omega_0$
- Comportement aux hautes fréquences (HF) : $\omega \gg \omega_0$

Trouver i_0 max



Etude du maximum d'intensité :

Propriété lors de la résonance :

- Le courant a une amplitude maximale : $i_{max} =$

- Le courant est en phase avec le générateur : $\varphi = 0$

✳ Acuité de la résonance :

Définition de la bande passante :

On appelle bande passante la gamme de fréquence pour laquelle : $i \geq \dfrac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$

i_{max} étant le courant obtenu à la résonance.

RQ : on a alors une puissance dissipée divisée par 2 puisque : $P_J = Ri^2$

On va déterminer les deux valeurs ω_- et ω_+ qui vérifient : $$i = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}$$

Bande passante : $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$

— En classe —

Relation facteur de qualité-bande passante :

$$Q =$$

β - Phase du courant

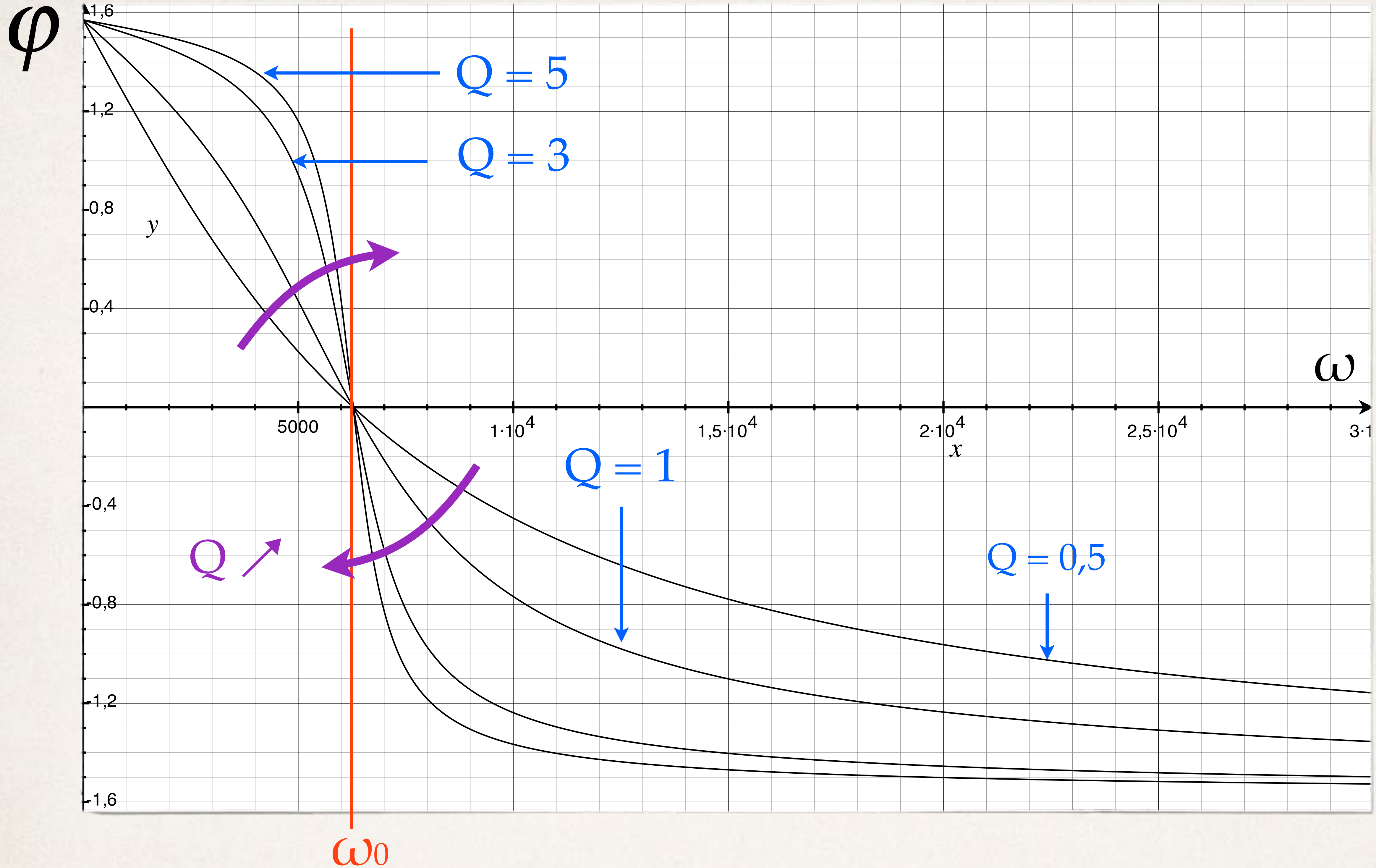
On trouve la phase à partir de l'expression de $\underline{i_0}(\omega)$:

— En classe —

- Comportement aux basses fréquences (BF) :

- Comportement lorsque $\omega = \omega_0$: Résonance

- Comportement aux hautes fréquences (HF) :

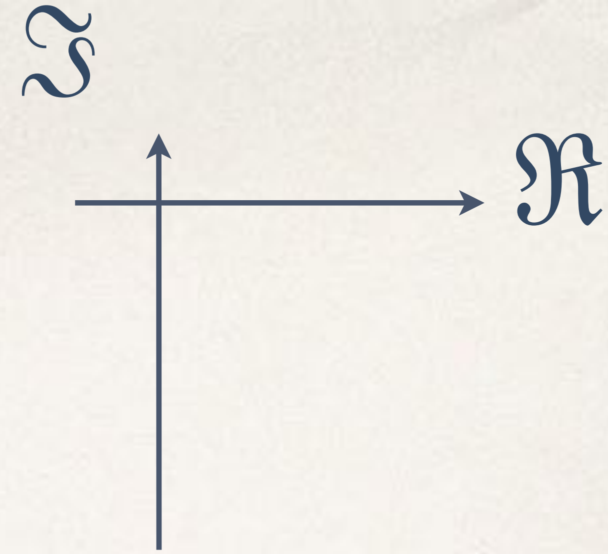


— En classe —

- Comportement lorsque $\omega \sim \omega_0$: voisinage de la résonance

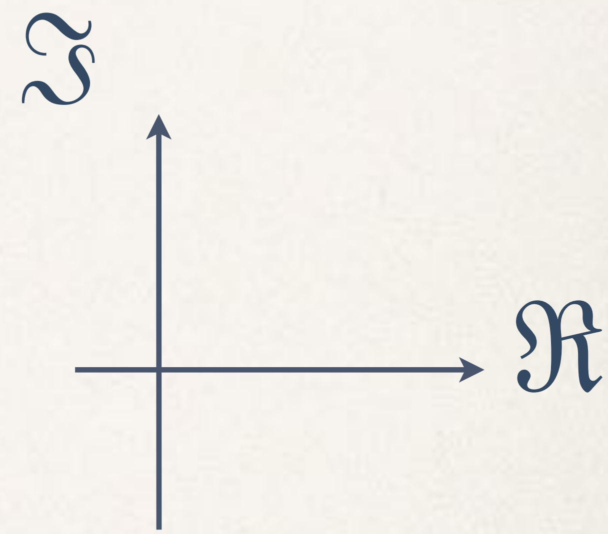
— En classe —

- basses fréquences :

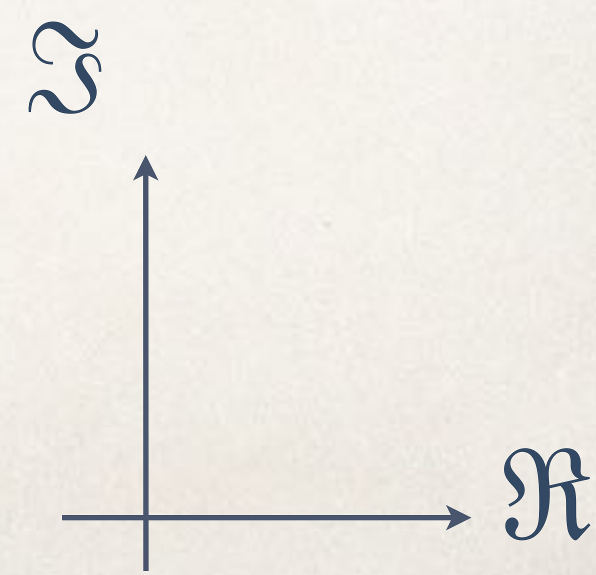


— En classe —

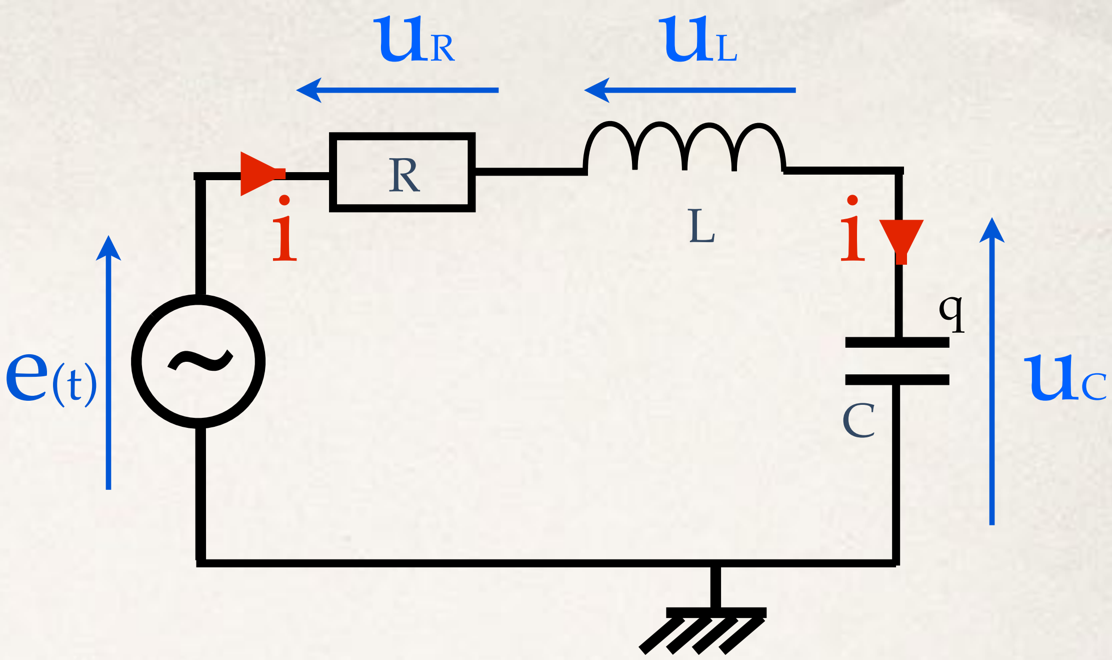
- résonance :



- hautes fréquences :



2 - Réponse en tension et résonance



Diviseur de Tension => obtenir :

$$\boxed{\underline{u}_0 e^{j\varphi_u} = \frac{e_0}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

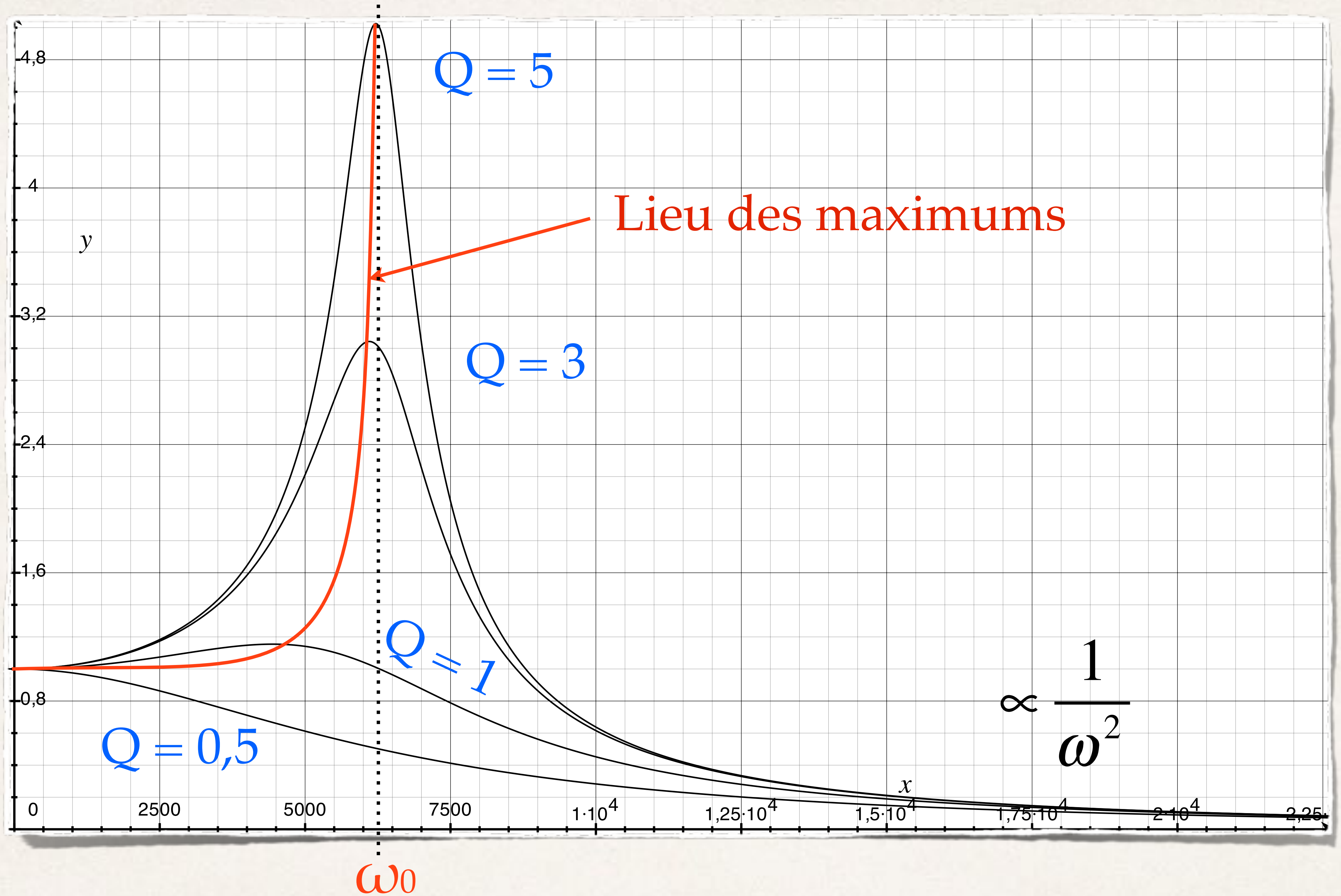
α - Amplitude de la tension

même chose que pour le courant

- Comportement aux basses fréquences (BF) :

- Comportement lorsque $\omega = \omega_0$: Résonance ? -> pas si simple

- Comportement aux hautes fréquences (HF) :



Résonance :

— en classe —

β - Phase de la tension