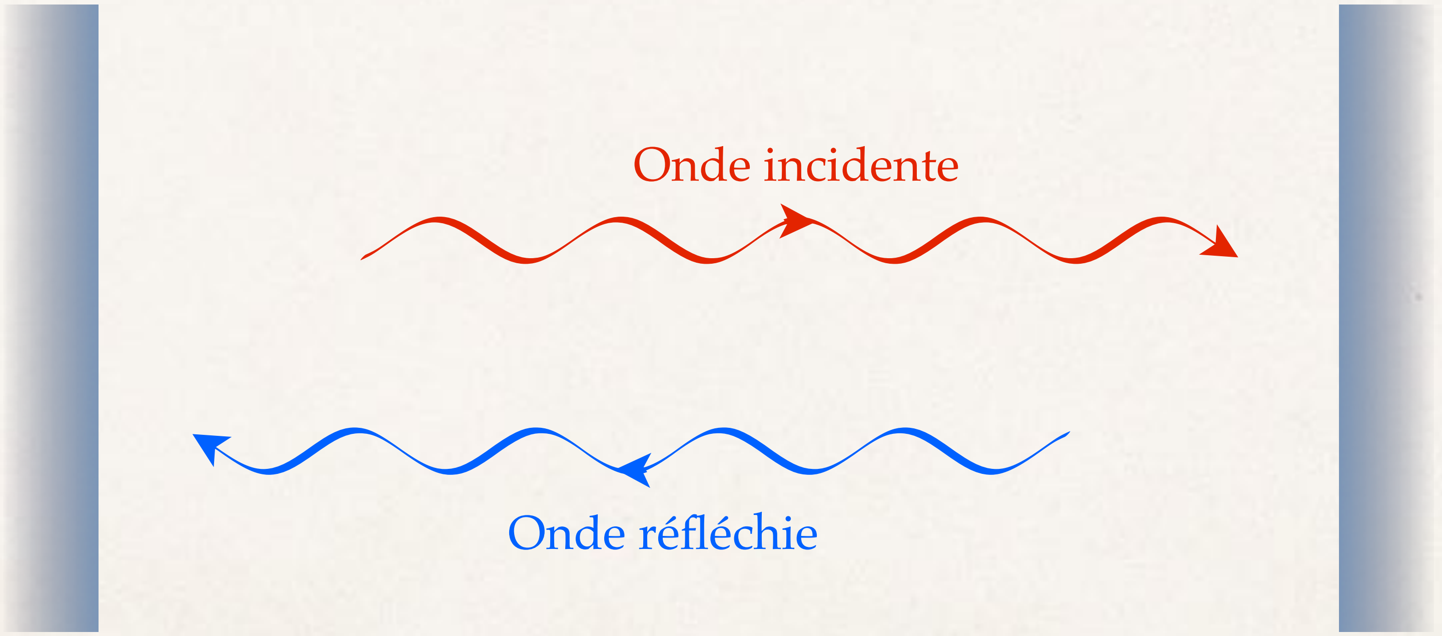
5 - Ondes stationnaires

Il existe une distinction fondamentale entre une propagation dans un milieu illimité, et dans un milieu borné :

- Corde de guitare
- Tuyaux sonores
- Guides d'ondes

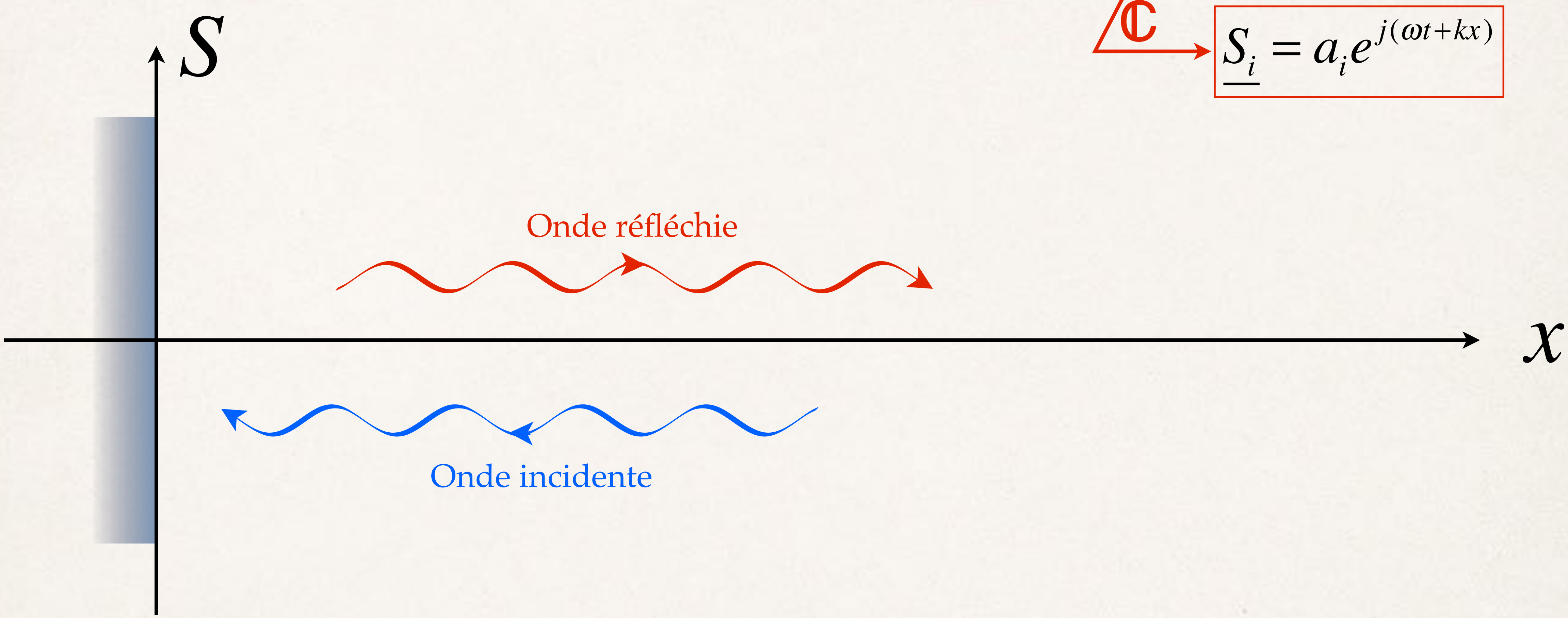


→ Le principe de superposition nous permet de traiter le pb. comme la superposition de deux ondes progressives en sens inverse.

Milieu non dispersif bornée à gauche :

Soit une onde incidente de la droite vers la gauche : $\boxed{S_i = a_i \cos(\omega t + kx)}$

$$\xrightarrow{\mathbb{C}} \boxed{\underline{S}_i = a_i e^{j(\omega t + kx)}}$$



L'origine des temps est choisie pour que le max. soit atteint à t = 0 en x = 0

Que dire de l'onde qui se réfléchie sur la paroi ?

- propagation de la gauche vers la droite ==> $\omega t - kx$
- amplitude inconnue : $a_r > 0$
- déphasage inconnu : φ

On propose donc pour l'onde réfléchie : $\boxed{S_r = a_r \cos(\omega t - kx + \varphi)}$

$\mathbb{C}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{S_r} = a_r e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{a_r} e^{j(\omega t - kx)}}$

Condition limite :

⚠ porte sur S total ⚠

[celle-ci doit être spécifiée dans le sujet]

$\longrightarrow$ dépend du pb. physique

- Signal nul sur le bord : $\boxed{S(0) = 0}$

- Onde acoustique en vitesse
- Champ électrique
- Corde attachée

- Signal à dérivée nulle sur le bord : $\boxed{\dfrac{dS}{dx}(0) = 0}$

- Onde acoustique en pression
- Champ magnétique

Supposons ici que le signal soit nul en x = 0 :

$$\boxed{\underline{S}(0) = 0 \qquad \forall t}$$

On pose :

$$\boxed{\underline{r} \equiv \frac{\underline{a_r}}{\underline{a_i}}}$$

— EN CLASSE —

$$\underline{S_i} = a_i e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\underline{S} =$$

$$\underline{S_r} = -a_i e^{j(\omega t - kx)}$$

$S =$

$$\boxed{S(x,t) = -2a_i \sin(kx)\sin(\omega t)}$$

de la forme

$$\boxed{S(x,t) = f(x)g(t)}$$

Onde stationnaire

Définition :

On parle d'onde stationnaire lorsque la dépendance spatiale f(x) du signal S(x, t), est indépendante de sa dépendance temporelle g(t) :

$$S(x,t) = f(x)g(t)$$

Pour toute position x, le signal vibre sur place selon g(t) ;
il n'y a plus de propagation du signal.

Rq : Ceci reste vrai au niveau énergétique :

L’énergie n’est plus transportée par l’onde, dans un sens ou dans l’autre, mais fait du «sur-place» en oscillant autour d’une position moyenne.

Tracé de la courbe :

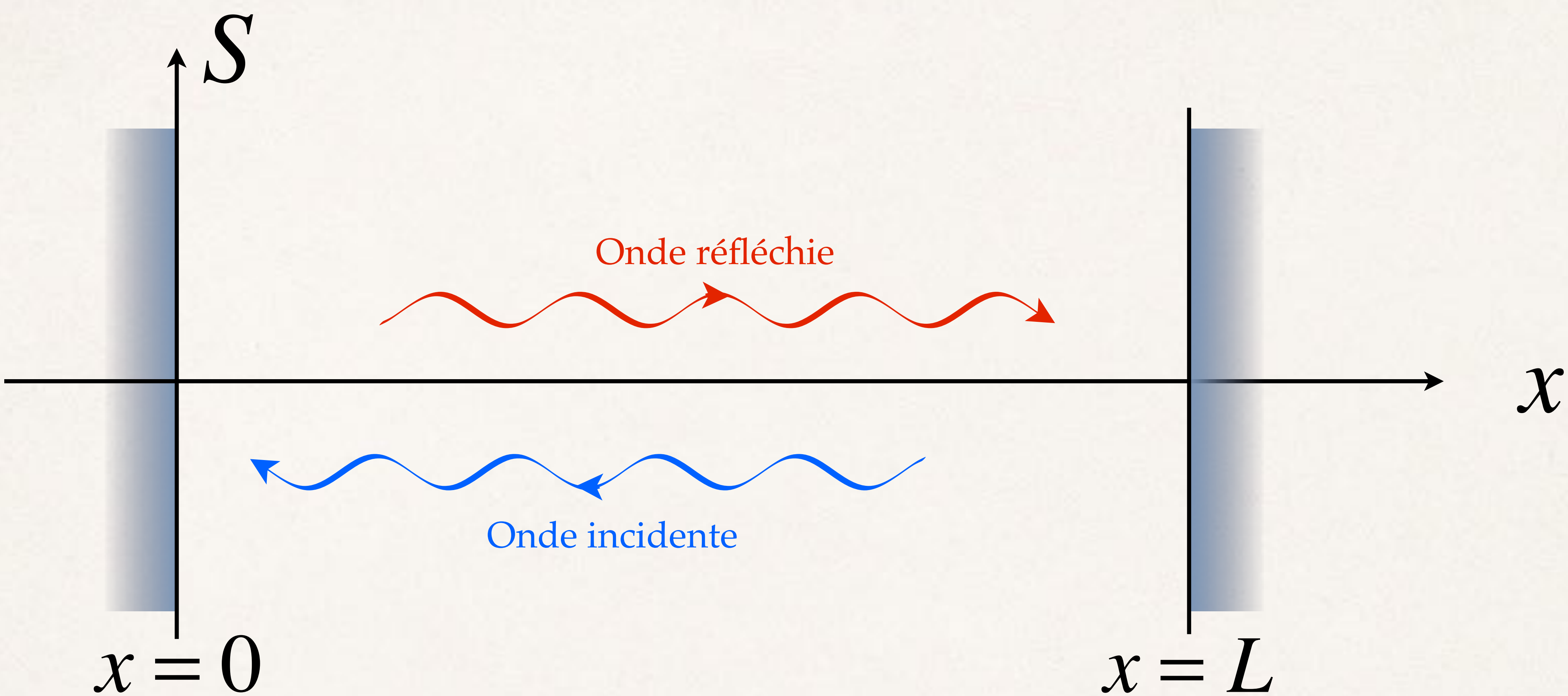
— EN CLASSE —

Ventres et Noeuds :

— EN CLASSE —

Milieu non dispersif bornée à droite et à gauche :

Soit une onde incidente de la droite vers la gauche :



Celle-ci donne naissance à une onde réfléchie de la gauche vers la droite.

Mais ensuite cette onde réfléchie donne naissance à une nouvelle onde réfléchie mais cette fois de la droite vers la gauche.....qui donne naissance à une nouvelle onde.... etc

?!? - Comment faire - !?!

Heureusement, le <u>principe de superposition</u> (P.S) permet de ramener :

- toutes les ondes de la droite vers la gauche à une unique onde incidente,
- toutes les ondes de la gauche vers la droite à une unique onde réfléchie !

Car toutes ces ondes ont la même fréquence !

<u>Le calcul a réaliser est donc exactement le même :</u>

Soit une onde incidente de la droite vers la gauche :

$$\boxed{S_i = a_i \cos(\omega t + kx)} \xrightarrow{\mathbb{C}} \boxed{\underline{S_i} = a_i e^{j(\omega t + kx)}}$$

L'origine des temps est choisie pour que le max. soit atteint à t = 0 en x = 0

<u>On propose donc de même pour l'onde réfléchie :</u>

$$\boxed{S_r = a_r \cos(\omega t - kx + \varphi)} \xrightarrow{\mathbb{C}} \boxed{\underline{S_r} = a_r e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{a_r} e^{j(\omega t - kx)}}$$

Conditions aux limites :

⚠ porte sur S total ⚠

Il y a maintenant deux conditions :

— LESQUELLES ? —

La première amène exactement le même calcul : [condition : S(0) = 0]

$$S(x,t) = -2a_i \sin(kx)\sin(\omega t)$$

PB : cette solution n'est pas toujours compatible avec la seconde condition

$$S(L,t) = 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad -2a_i \sin(kL)\sin(\omega t) \underset{?}{=} 0$$

Quantification du signal

La seconde condition impose :

— EN CLASSE —

$\sin(kL) = 0 \quad \forall t$ soit

Relation de dispersion dans le cas d'un milieu borné

Le confinement de l'onde impose une quantification naturelle des fréquences, spatiales **et** temporelles

Expérience de la corde de Melde

(déplacement transversal d'une corde)

— EN CLASSE —

Expérience du tube de Kundt :

(Cavité acoustique résonnante)

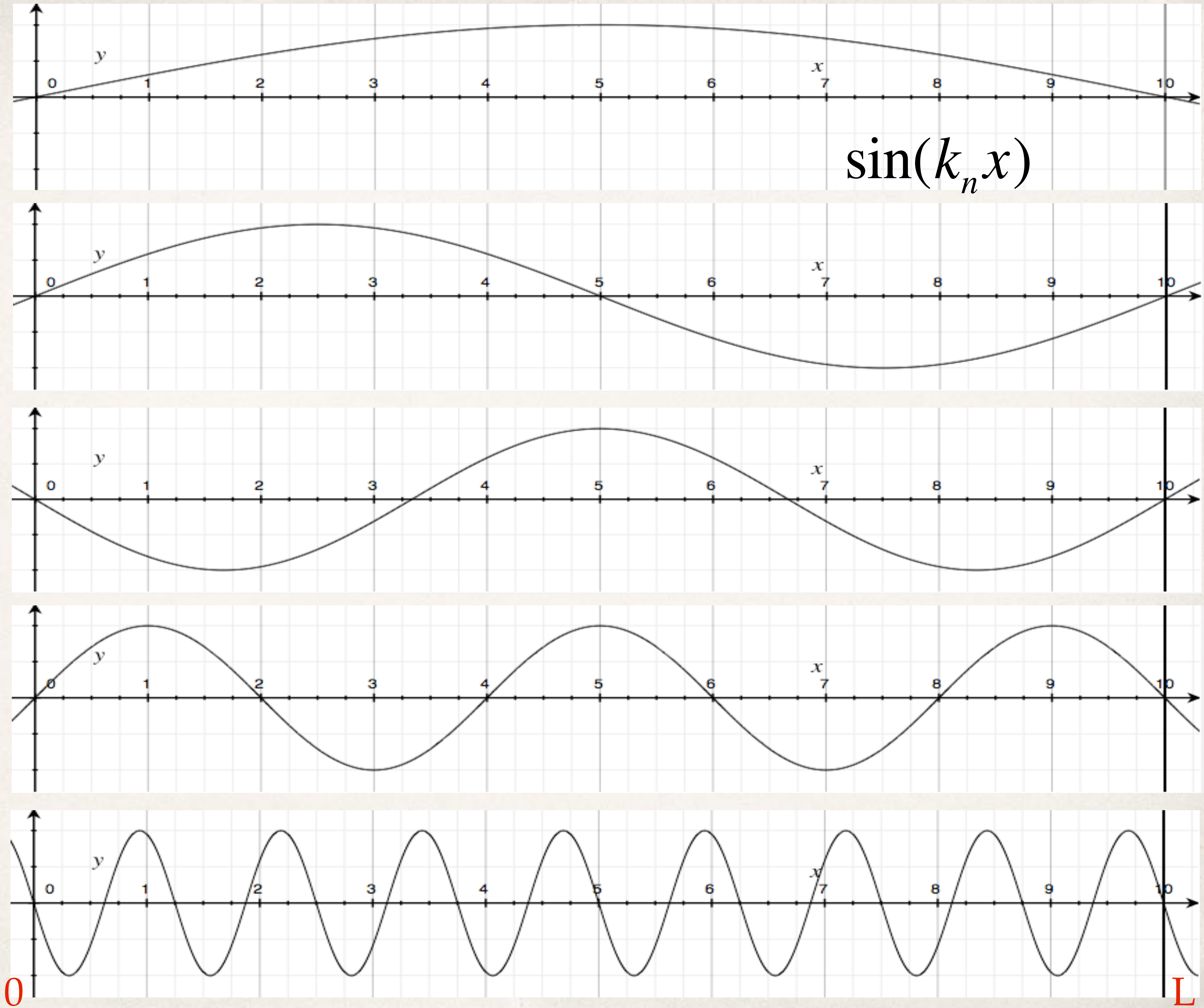
$n=1$

$n=2$

$n=-3$

$n=5$

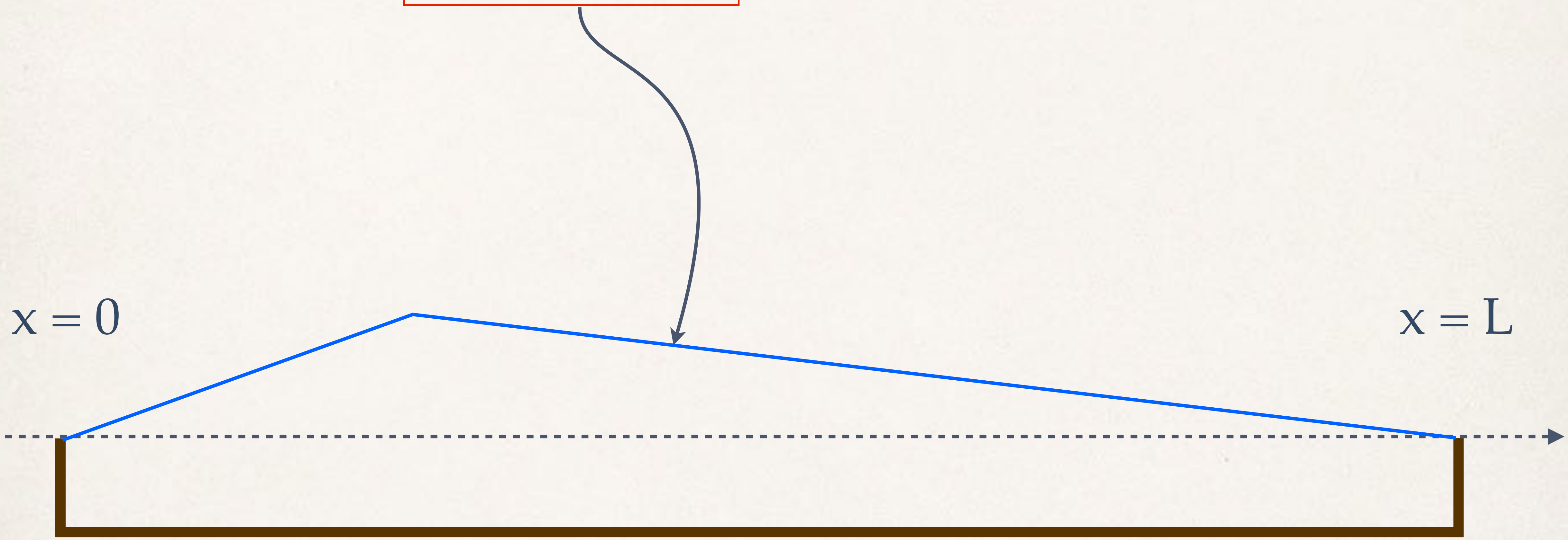
$n=-16$



Décomposition Harmonique & évolution

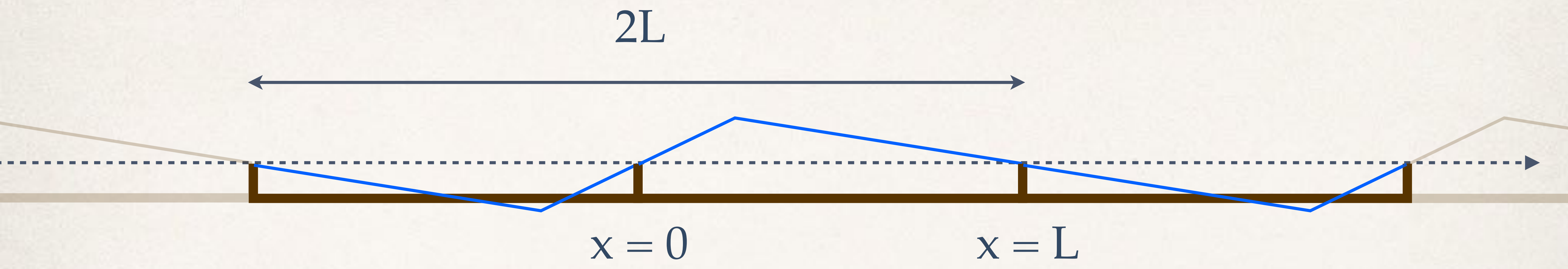
On considère l'état initial d'une corde accrochée à ses deux extrémités

Soit à t = 0 : $\boxed{S(x,0) = f(x)}$



On lâche la corde <u>sans vitesse initiale</u>

On peut imaginer notre corde comme un signal 2L-périodique :



Or un signal périodique peut toujours être décomposé de manière unique en série de Fourier :

=> somme infinie de fonctions sinusoïdales indépendantes et de fréquences spatiales multiples du fondamental :

$$\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}}$$

$$\boxed{f(x) = a_1 \sin(k_1 x) + a_2 \sin(k_2 x) + a_3 \sin(k_3 x) + \ldots.}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_n a_n \sin(k_n x)}$$

Chaque mode est caractérisé de manière unique par :
- sa fréquence spatiale k_n
- son amplitude A_n
- sa phase φ_n

Déterminées par les conditions initiales

La linéarité de l'équation différentielle de propagation garantie une évolution indépendante de chaque mode :

$$\boxed{S(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \varphi_n)}$$

Principe de superposition

$$S(x,0) = f(x) \quad \forall x$$

$$\dot{S}(x,0) = 0 \quad \forall x$$

$$S(0,t) = 0 \quad \forall t$$

$$S(L,t) = 0 \quad \forall t$$

Conditions aux limites

avec $\boxed{\omega_n = k_n c = n\dfrac{2\pi}{T}}$ relation de dispersion et $T = \dfrac{2L}{c}$

Sans vitesse initiale : on montre que $\varphi_n = 0$ $A_n = a_n$

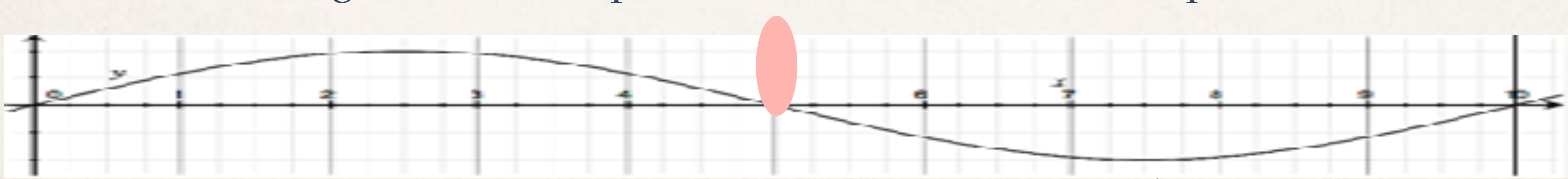
$$\boxed{S(x,t) = \sum_n a_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)}$$

Ainsi le «poids» relatif à chaque mode, d'un point de vue sonore dépend uniquement de la forme initiale de la corde, a travers les coeficients a_n

<u>Exemples concrets :</u>

- Une corde grattée au centre aura un son plutôt «rond» car on donne du poids au fondamental.
- une corde grattée sur son bord, aura un son très métallique car on donne du poids aux harmoniques de hautes fréquences.

- En plaçant son doigts au centre de la corde le guitariste étouffe le fondamental.
Il sufit allors de gratter au 3/4 pour favoriser le 1er harmonique de la corde



mode favorisé : n = 2

Au milieu de la corde

Point milieu

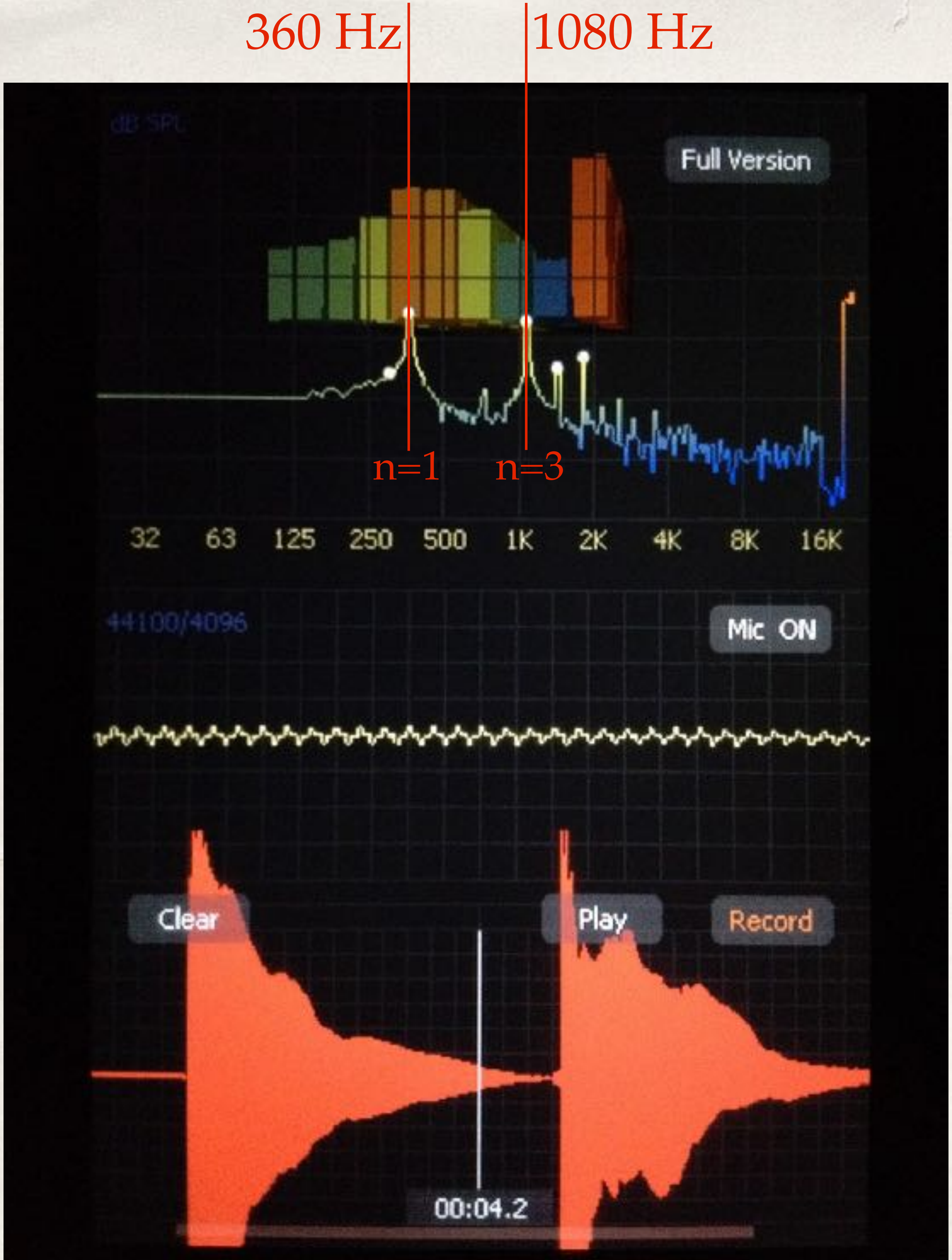
Au bord de la corde

Bord de la corde
«Chevalet»

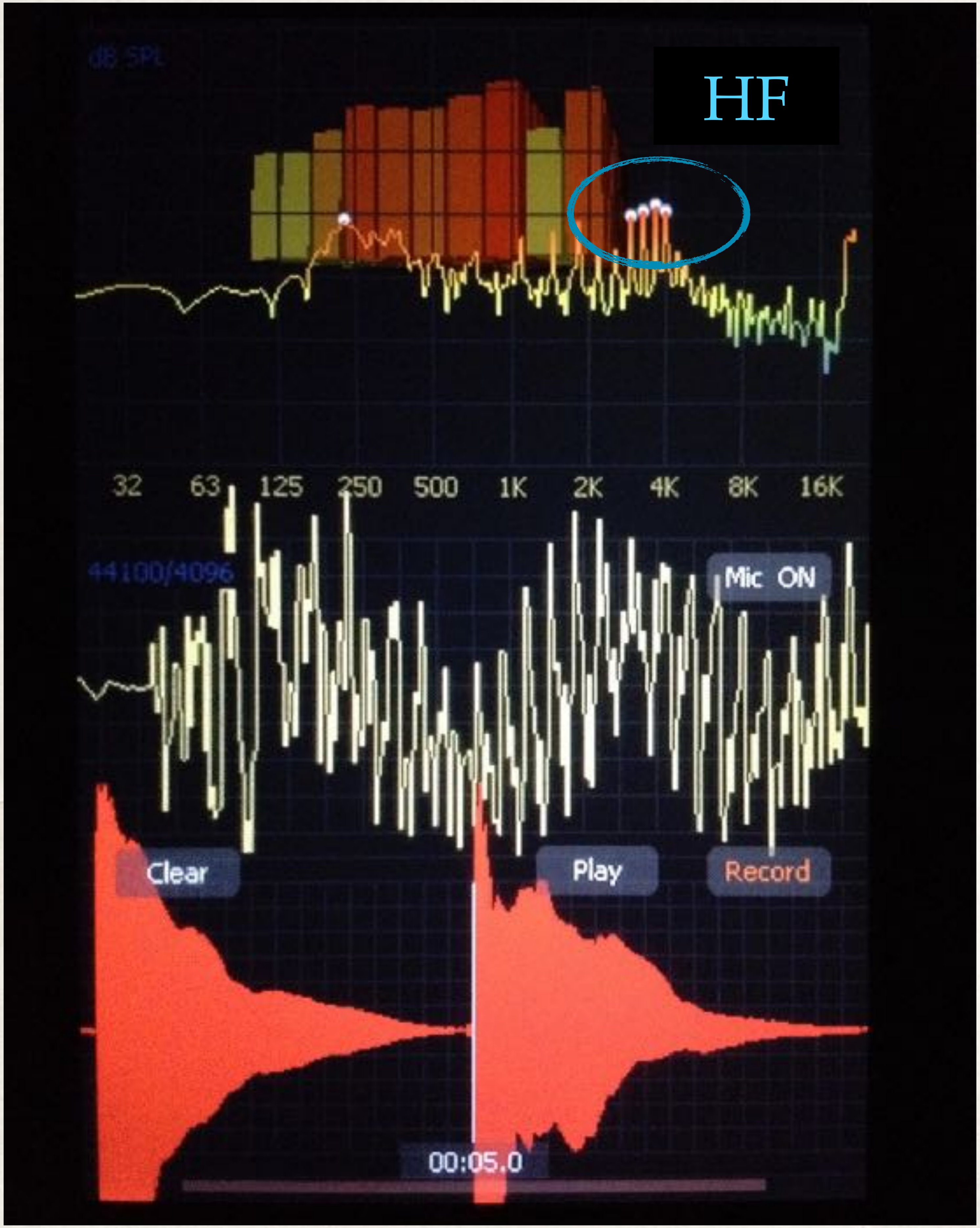
Au milieu de la corde

Au bord de la corde

iAnalyzerLite

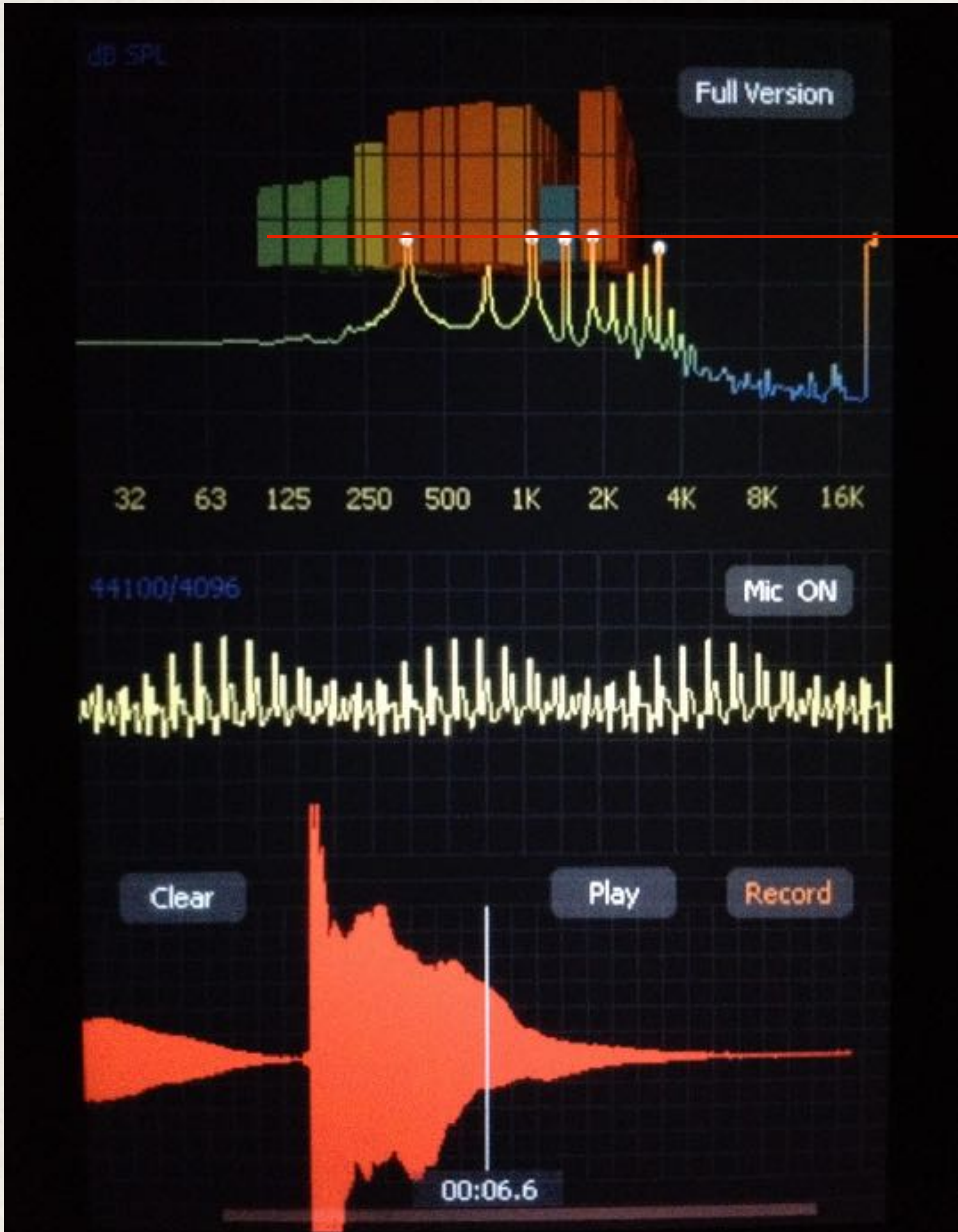


iAnalyzerLite



L'énergie apportée initialement est concentrée sur des modes de hautes fréquences.

iAnalyzerLite



Après un certain temps, l'énergie se re-distribuent entre les différents modes

- couplage interne à la corde => Non Linéarités

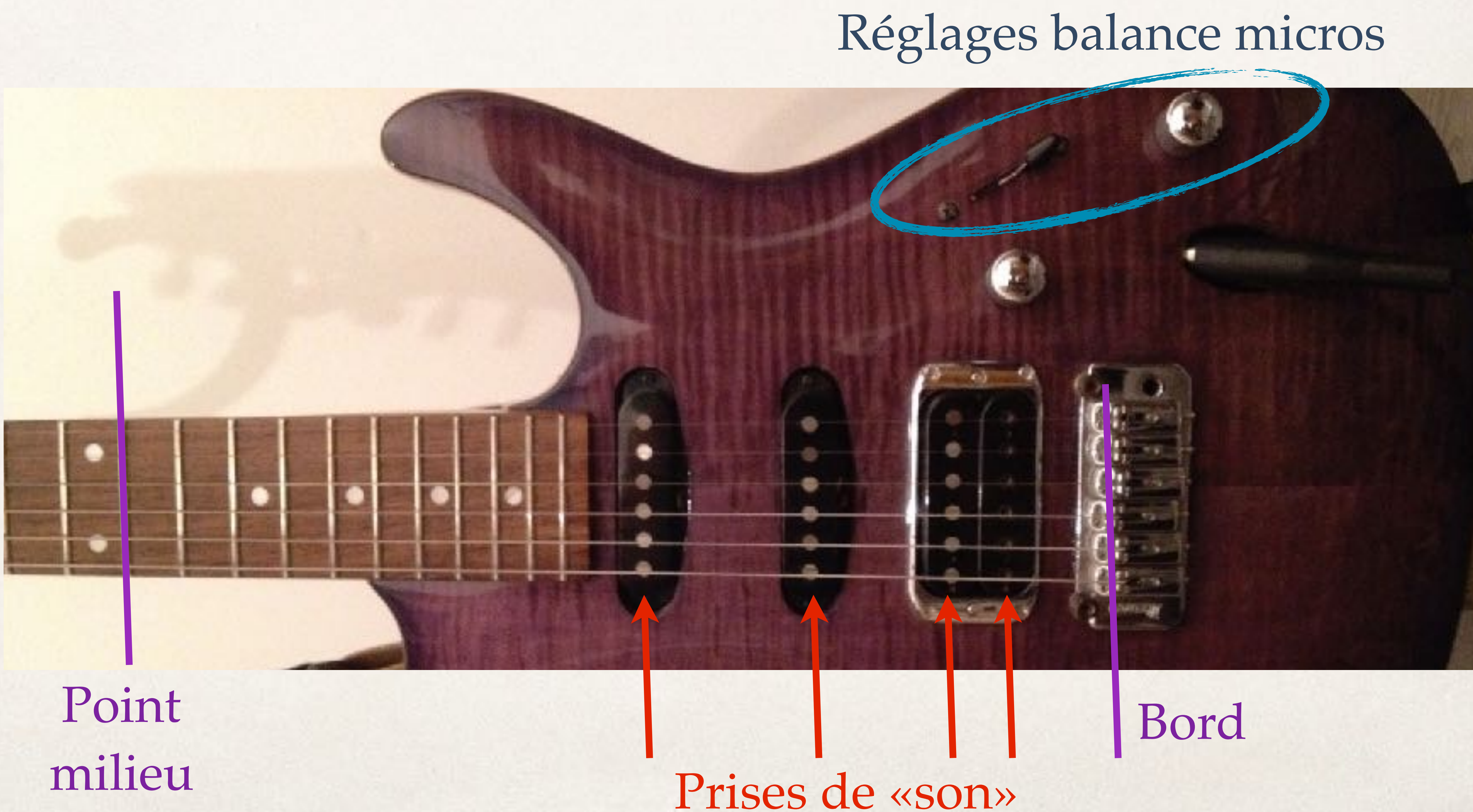
- couplages acoustiques entre les cordes

- couplage par le biais de la guitare elle même (bois)

La différence de son est assez faible :

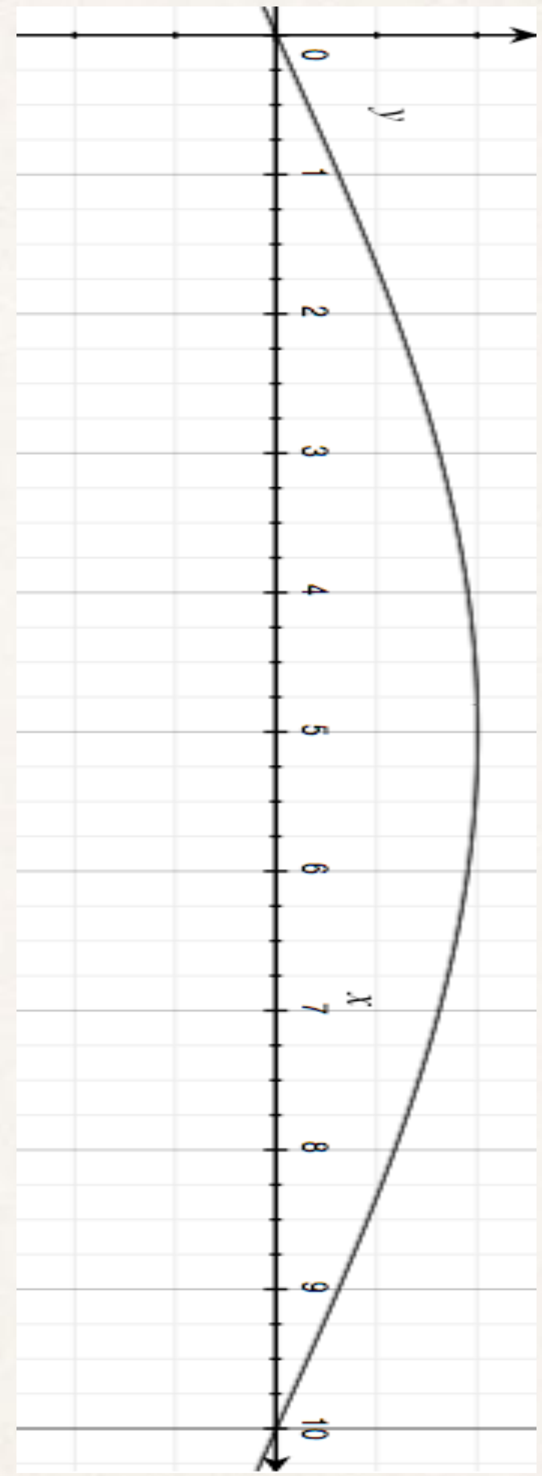
- Les microphones sont placés à différentes positions sous la corde pour capter préférentiellement les BF ou HF.

- L'électronique prend la suite pour amplifier ou filtrer certaines fréquences.

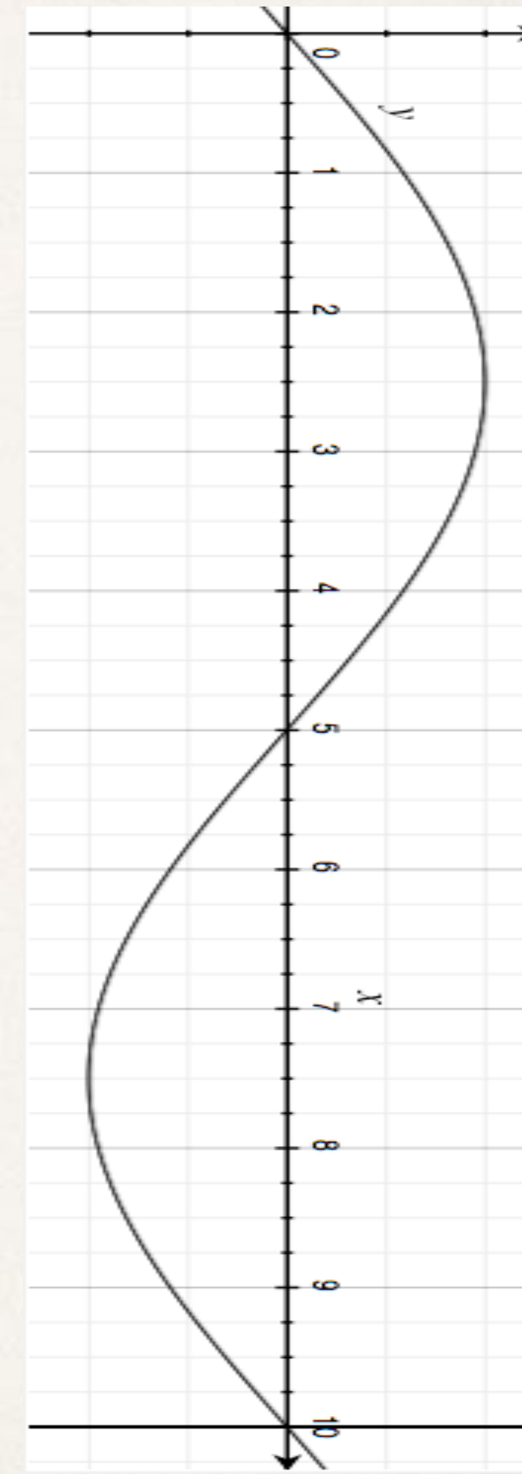


(corde de mi-grave)

$n=1$



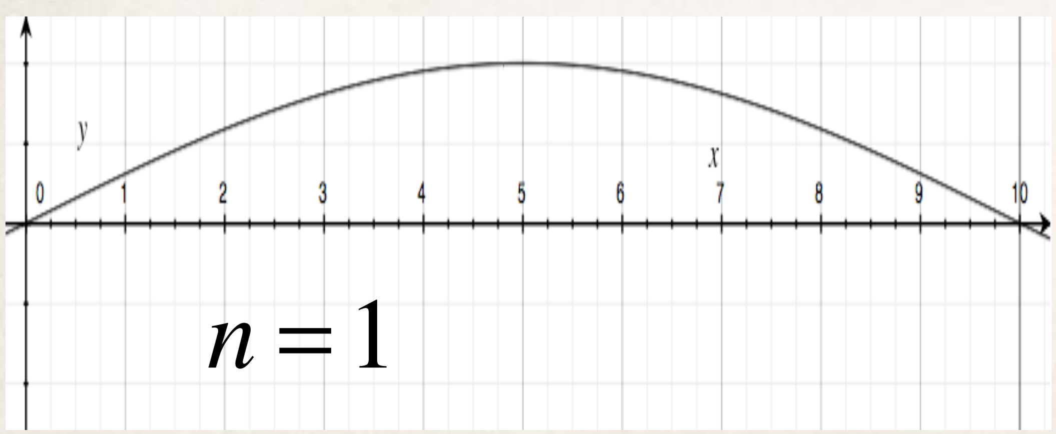
$n=2$



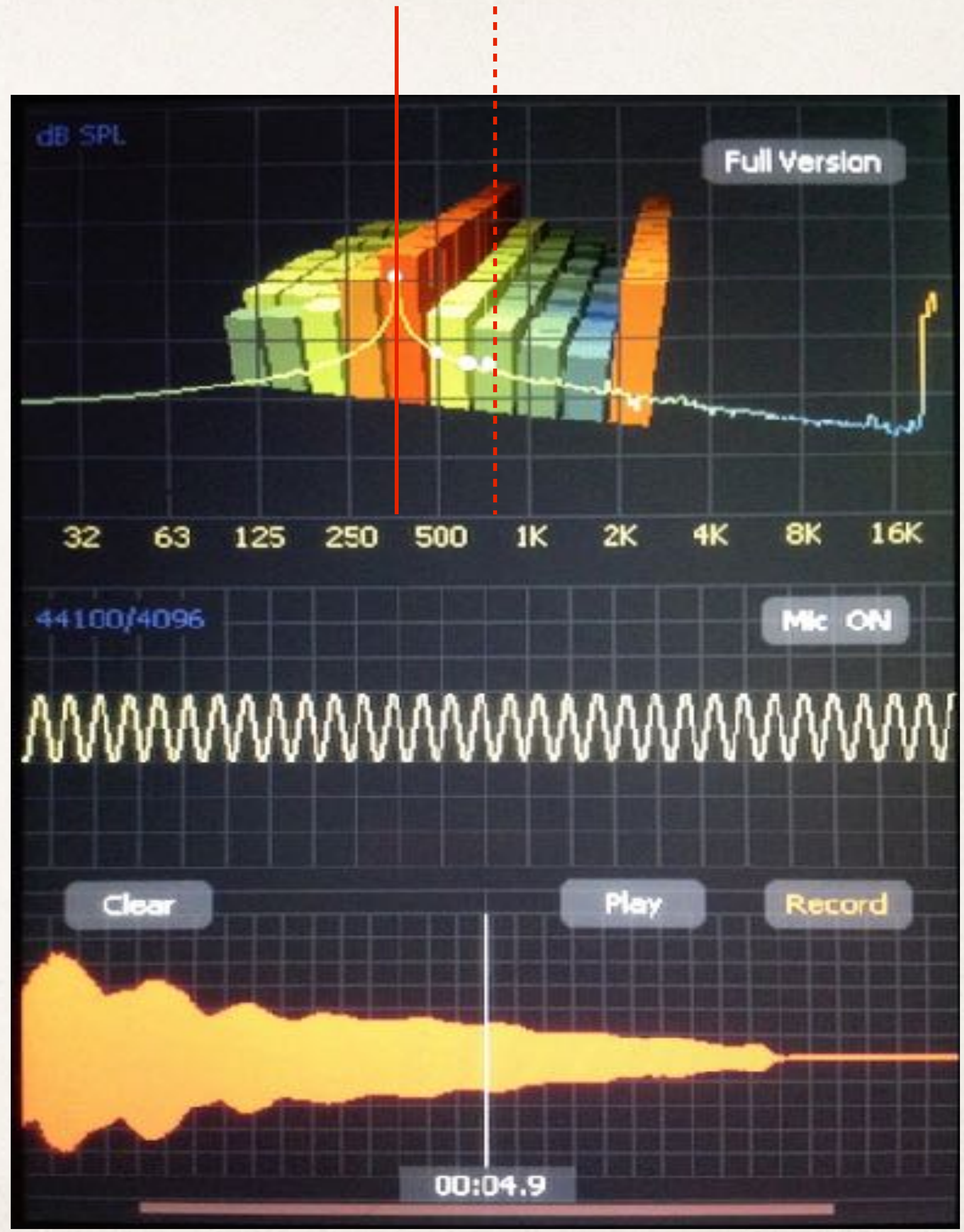
$\sin(k_n x)$

Mode fondamental : n = 1

(corde de mi-aigüe)



363 Hz



Premier harmonique :

n = 2

(corde de mi-aigüe)