SP 1

Oscillateur Harmonique (OH)

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}}$$

Objectifs :

- Obtenir mathématiquement le mouvement d'une masse accrochée à un ressort, l'ensemble étant assujetti à se mouvoir horizontalement et sans frottement.

- Décrire le phénomène périodique et sinusoïdal qui en découle.

- Faire le bilan énergétique de ce système dans le cadre où les phénomènes dissipatifs (frottements) sont négligés.

Présentation du dispositif type

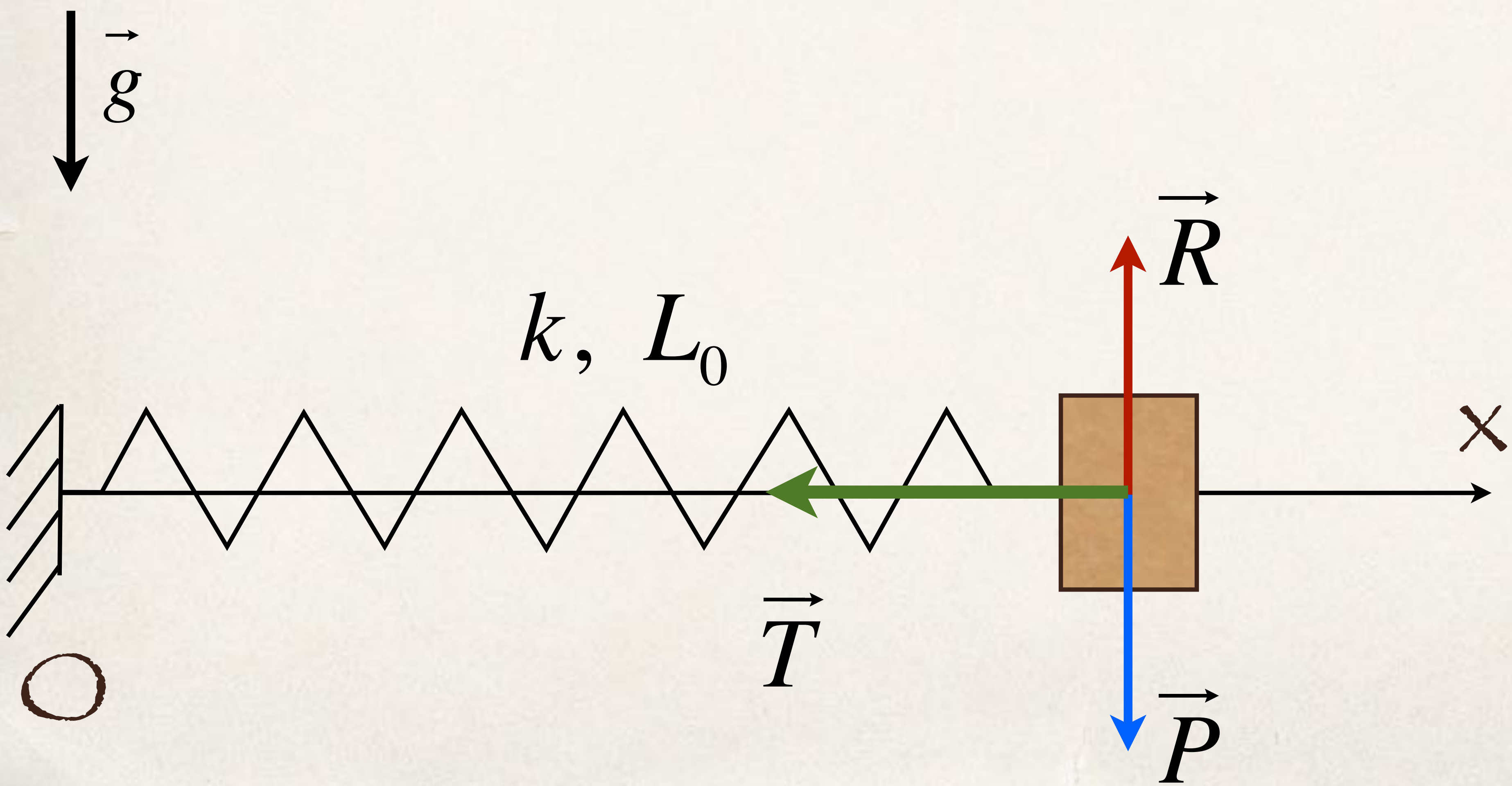
Système :

C2M

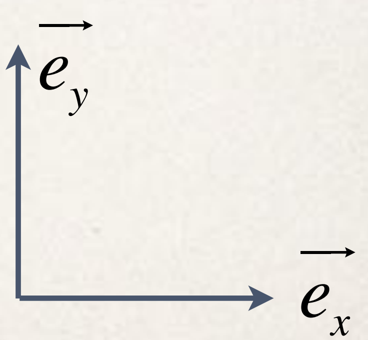
— en classe —

a - Poser le bilan des forces

b - Écrire le principe fondamental de la dynamique



Base orthonormée de vecteurs unitaires :



Bilan des forces (BDF) :

O2R

$\vec{P}$:

— en classe —

$\vec{R}$:

$\vec{T}$:

RQ : Notation des vecteurs en colonnes !

Modélisation de la force de tension du ressort : Loi de Hooke

$$\boxed{\vec{T} = -k(L - L_0)\overrightarrow{e_x}}$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Deuxième loi
de Newton

— en classe —

LEG

Notation du PFD en vecteurs colonnes 2D :

«égale par définition»

$$\boxed{\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \left(T^{-1}\right)$$

La pulsation propre

— en classe —

«égale par définition»

$$\boxed{\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \left(T^{-1}\right)$$

La pulsation propre

Position d'équilibre :

<u>On obtient l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (OH) :</u>

Forme canonique

Notion de non homogénéité :

Résolution de l’équation différentielle linéaire non homogène :

Que signifie la linéarité de l’équation différentielle ?

superposition des solutions de l’équation homogène.

Méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire :

1 - Recherche de la solution générale de l'équation différentielle homogène $\boxed{x^h(t)}$

2 - Recherche d'une solution particulière $\boxed{x^p(t)}$

3 - Solution générale : SG = SH + SP $\boxed{x(t) = x^h(t) + x^p(t)}$

Résolution de l'équation différentielle homogène : $\boxed{x^h(t)}$

---- Sur la copie double ----

— en classe —

Méthode 1 : lycée -> montrer que cos et sin sont solutions

Méthode 2 : polynôme caractéristique

Méthode générale

On cherche une solution exponentielle de la forme : $\boxed{x^h(t) = \underline{C}e^{rt}}$

Recherche de la solution particulière : $\boxed{x^p(t)}$

— en classe —

Solution générale de l'équation : $\boxed{x(t)}$

— On donne le résultat : —

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + a\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Calcul de la vitesse :

Définition de la vitesse :

$$\boxed{\vec{v} \equiv \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$

— en déduire la vitesse —

On retiendra ici : $\boxed{v_x(t) \equiv \dot{x}(t)}$

Cas général :

$$\vec{v} \equiv \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right.$$

Soit la vitesse :

Application des conditions initiales :

---- Support de cours ----

équation du second ordre
=> Deux conditions initiales

Schéma :

— chercher A et B avec : —

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

sachant que x(0)=Xeq+a et v(0)=0

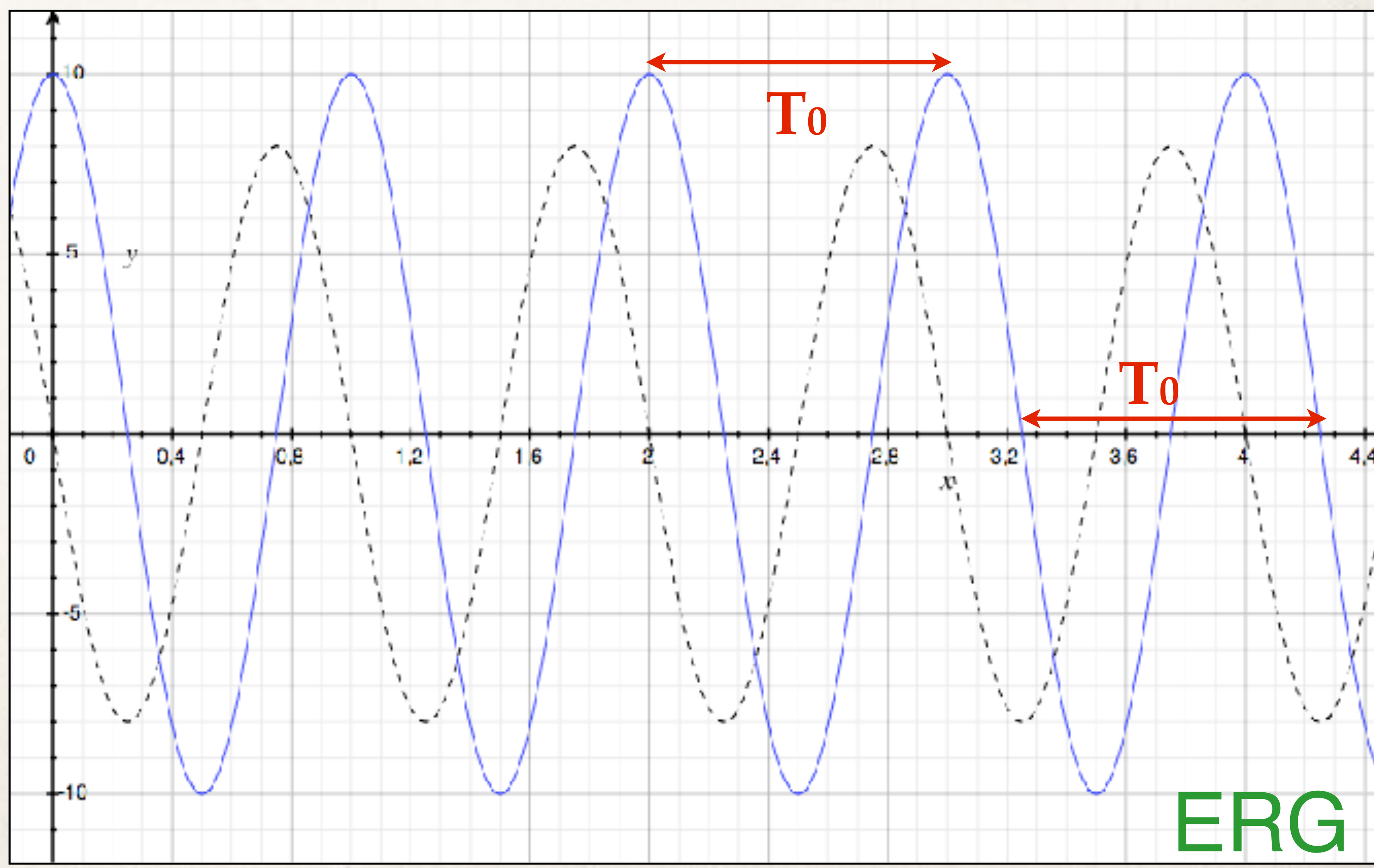
Cas particulier : On lâche la masse sans vitesse initiale

— Vérifier la cohérence des courbes —

— Mesurer la période et les amplitudes (cm)—

T = 1s ; a1 = 10. cm ; a2 = 8 cm

<u>Etude de la solution :</u> le mouvement rectiligne sinusoïdal autour de la position d'équilibre



——— $x(t) - L_0$

- - - - - - - - - $\dot{x}(t)$

$f_0 = 1Hz$

$\omega_0 = 2\pi \ rad \cdot s^{-1}$

Le signal associé se caractérise par une amplitude, une fréquence, une période et éventuellement une phase :

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + a\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

O2R

Amplitude : $\boxed{a}$ autour de la position d'équilibre $\boxed{x_{eq} = L_0}$

Fréquence ou pulsation : $\boxed{f_0 = 1Hz}$ $\boxed{\omega_0 = 2\pi \ rad \cdot s^{-1}}$

Tour(s)/seconde radians/seconde

Période du signal : $\boxed{T_0}$ Durée au delà de laquelle le signal se reproduit à l'identique

Phase du signal : $\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Correspond à un choix de l'origine des temps

Rq : La phase est telle que $\tan(\varphi) = \dfrac{-B}{A}$

=> La vitesse initiale modifie la phase : cf TD

[mais ici Xmax est atteint pour t = 0]

Les relations de base entre période et fréquence :

RPB

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{T_0}} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$

Tracer la solution en python :

```
from math import pi, cos
from matplotlib import pyplot as plt
plt.close() #ferme une fenêtre éventuellement ouverte

##1 Définition & Tracé des axes
a = -pi;  b = 5*pi;  N = 100 #points sur les abscisses
c = -2 ;  d =   +4              #bornes selon (Oy)
plt.plot([a,b],[0,0],'k')         #trace les axes en noir 'k'
plt.plot([0,0],[c,d],'k')
```

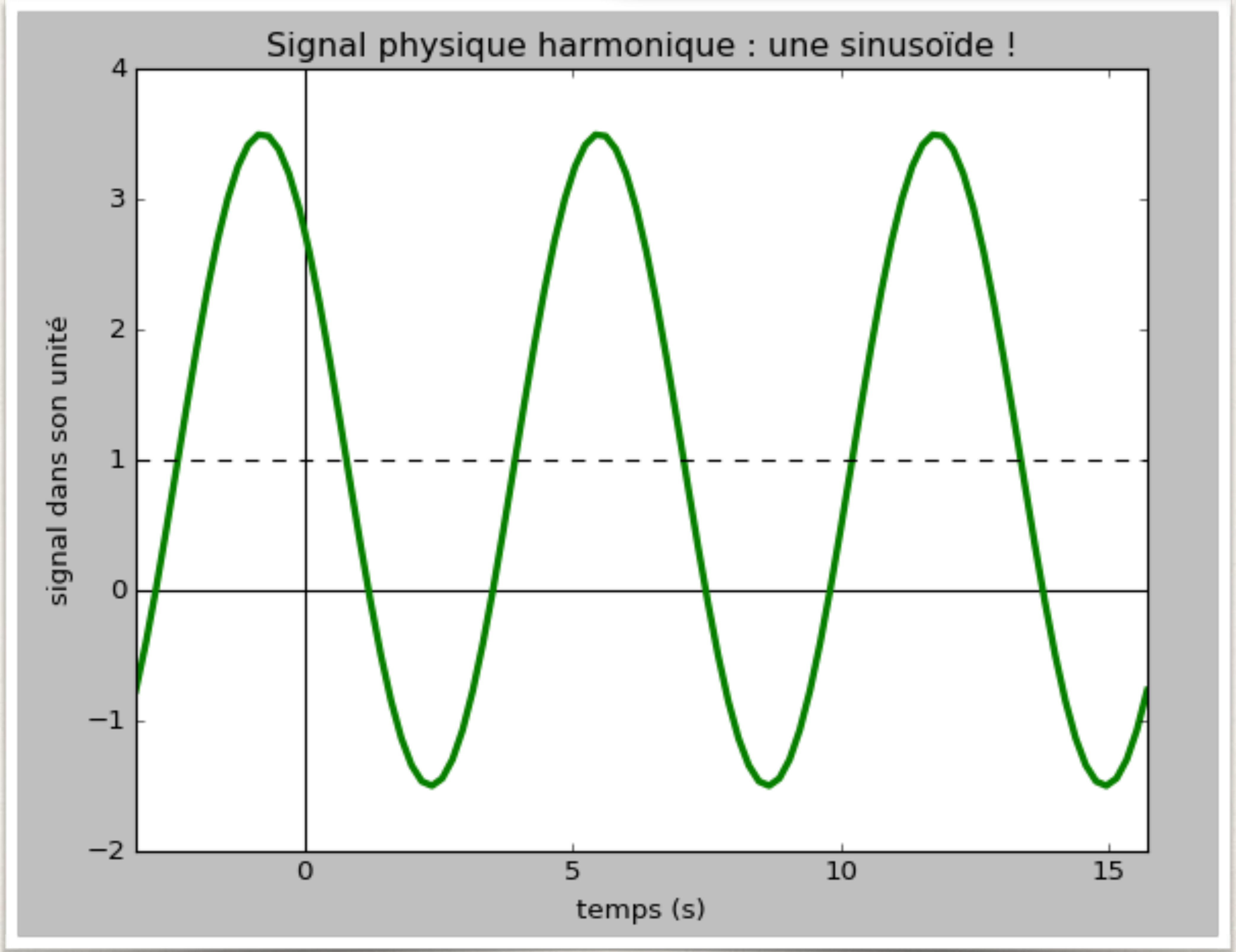
```
##2 - interpolation linéaire des abscisses entre a et b :
##      => reconstruction de liste
t = []
for i in range(N):                 #Boucle sur i : de 0 à N-1
    tVal = a + (b-a)/(N-1)*i       #Atttention :  Il y a N points
                                   #              mais N-1 intervalles
    t += [tVal]                    #on remplit la liste des abscisses
```

```
##3 modélisation du signal :
T   = 2*pi     #s
amp = 2.5   #unité signal ? (mètre, volt, Pa)
phi = pi/4.   #rad

s0  = 1       #Offset -> unité signal

#S(t) = s0 + amp*cos(2*pi/T*t + phi)
s=[]
for i in range(N):  # reconstruction de liste pour s
    s+=[s0 + amp*cos(2*pi/T*t[i] + phi)]
```

```
##4 tracé du signal
plt.plot(t, s, 'g', lw=3)          #tracé de la courbe
plt.plot([a,b], [s0,s0], 'k--')    #tracé de la valeur moyenne
plt.title("Signal physique harmonique : une sinusoïde !")
plt.xlim([a,b])
plt.xlabel('temps (s)')
plt.ylabel('signal dans son unité')
plt.show()                         #déclenche l'affichage
```


Signal physique harmonique : une sinusoïde !
signal dans son unité
temps (s)
4
3
2
1
0
−1
−2
0
5
10
15

Etude énergétique de l'oscillateur :

Définition :

On nomme énergie mécanique la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E_m = E_c + E_p$

C'est le contenu total en énergie du système mécanique.

Celui-ci se décompose en deux contributions qui s'inter-échangent au cours du temps :

Energie cinétique : $$E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Energie potentielle : $$E_p \equiv \frac{1}{2}k\left(x - x_{eq}\right)^2$$ (Admis)

On choisit ici la forme avec un seul terme sinusoïdal :

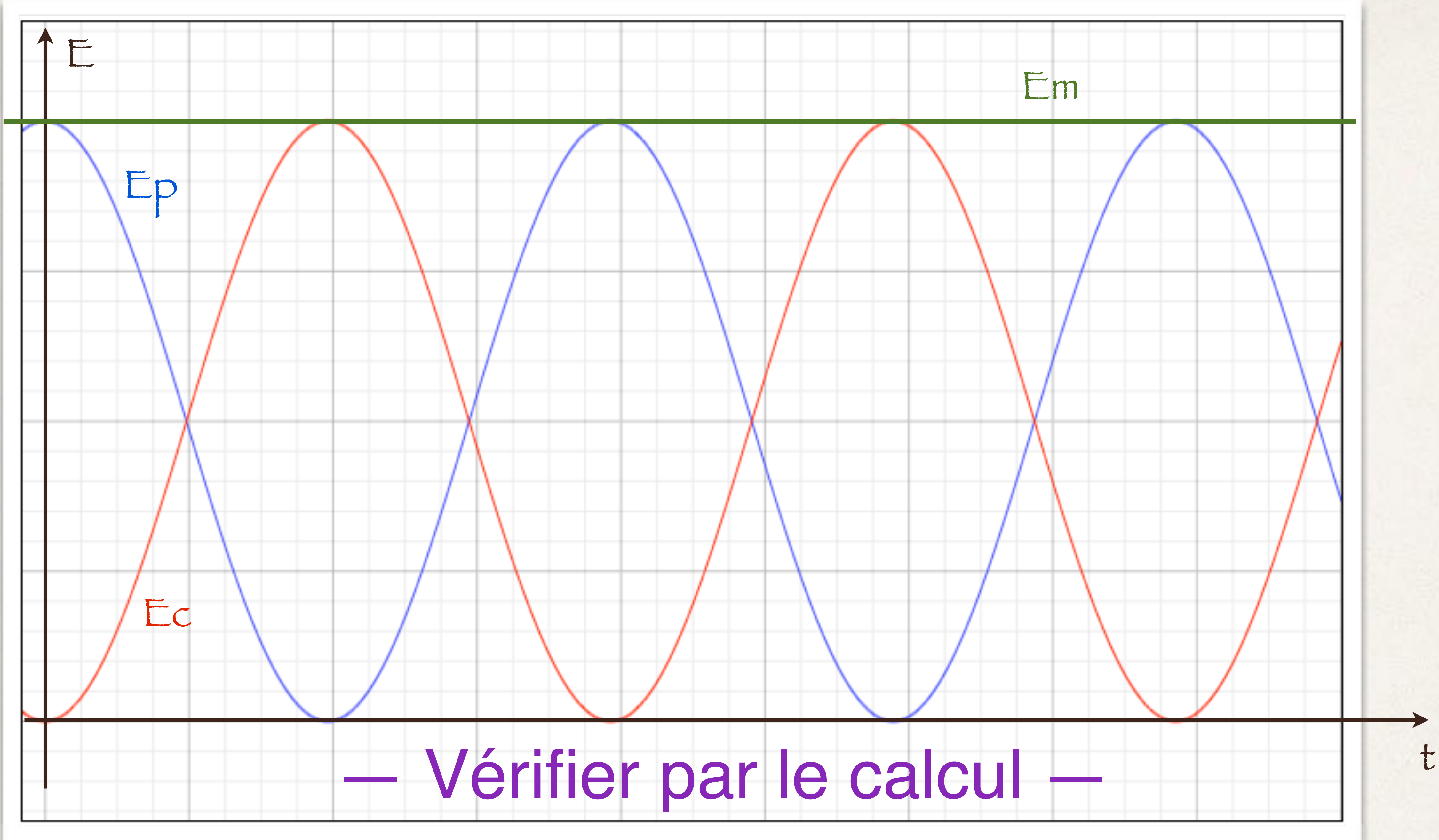
$$\boxed{x(t) = x_{eq} + a\cos(\omega_0 t + \varphi)} \qquad \boxed{\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

Calcul général de nos énergies :

— Chercher Ep(t) et Ec(t) —

Il suffit d'injecter x(t) et sa dérivée
dans les formules des énergies.

Dans notre cas particulier : Cond. Ini. à $t = 0$ -->



Conclusion :

L'énergie totale d'un oscillateur harmonique est constante.

Elle reste égale à sa valeur initiale ! $E_m = E_m(0) = C^{te}$

Conclusion sur l'OH

Ces résultats se généralisent à des systèmes non horizontaux, ainsi qu'à toutes sortes d'oscillateurs non amortis

Décrit quantités de systèmes : dans tous les domaines de la physique.
=> on le rencontrera tout au long de l'année

Il est même à la base de la quantification en mécanique quantique
ex : Description du rayonnement du corps noir (Max Planck)

Etude du signal sinusoïdal

- Notion de phase généralisée

- Mesure d'un déphasage

- Représentation $\mathbb{C}$ du signal

- Valeurs moyennes

Notion de phase généralisée :

O2R

$$\boxed{\Phi(t) = \omega t + \varphi}$$

Phase à l'origine

Pulsation

Phase à l'origine :

On peut toujours choisir l'origine des temps pour que :

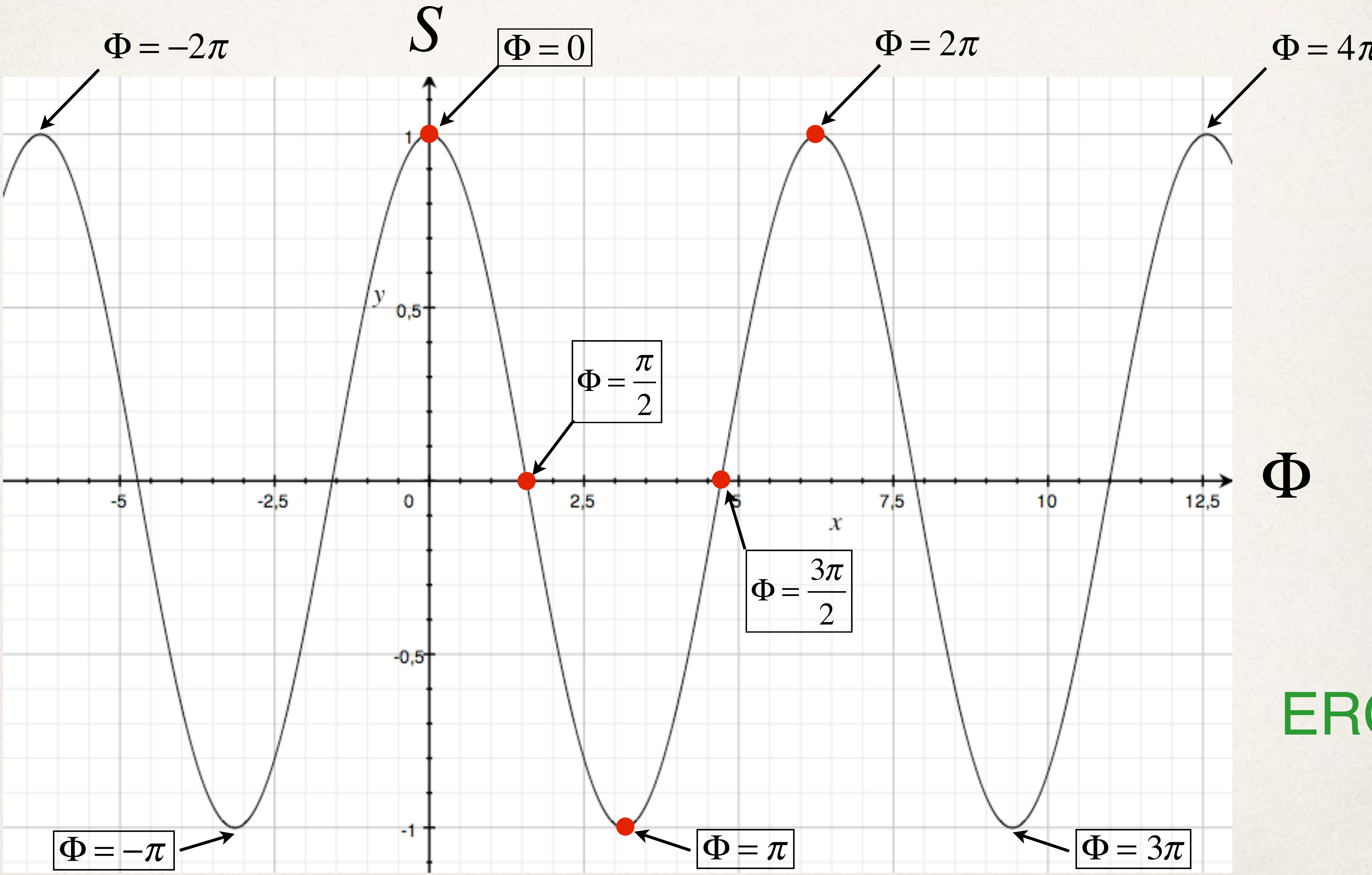
$t = 0$ lorsque le signal est maximum : $\Phi = 0$

Soit : $\Phi(t) = \omega t$

Rq : ce choix n'est possible que pour un unique signal servant de référence, tous les autres seront donc éventuellement déphasés par rapport au premier.

La phase généralisée permet de se repérer sur le signal sinusoïdal :

$\boxed{\cos(\Phi)}$



ERG

$$\boxed{S = S_{MAX} \Leftrightarrow \Phi = 0[2\pi]}$$

$$\boxed{S = -S_{MAX} \Leftrightarrow \Phi = \pi[2\pi]}$$

$$\boxed{\underset{\searrow}{S=0} \Leftrightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

(Signal descendant)

$$\boxed{\underset{\nearrow}{S=0} \Leftrightarrow \Phi = \frac{3\pi}{2}[2\pi]}$$

(Signal montant)

Mesure du déphasage : soient S1 un signal de référence et S2 un autre signal

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= a_1 \cos(\omega t) \quad \text{Réf.} \\ S_2 &= a_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

- Même fréquence
- S2 déphasé de φ par rapport à S1

Avec $\begin{cases} \Phi_1(t) = \omega t \\ \Phi_2(t) = \omega t + \varphi \end{cases}$

$\varphi = \varphi_{2/1} =$

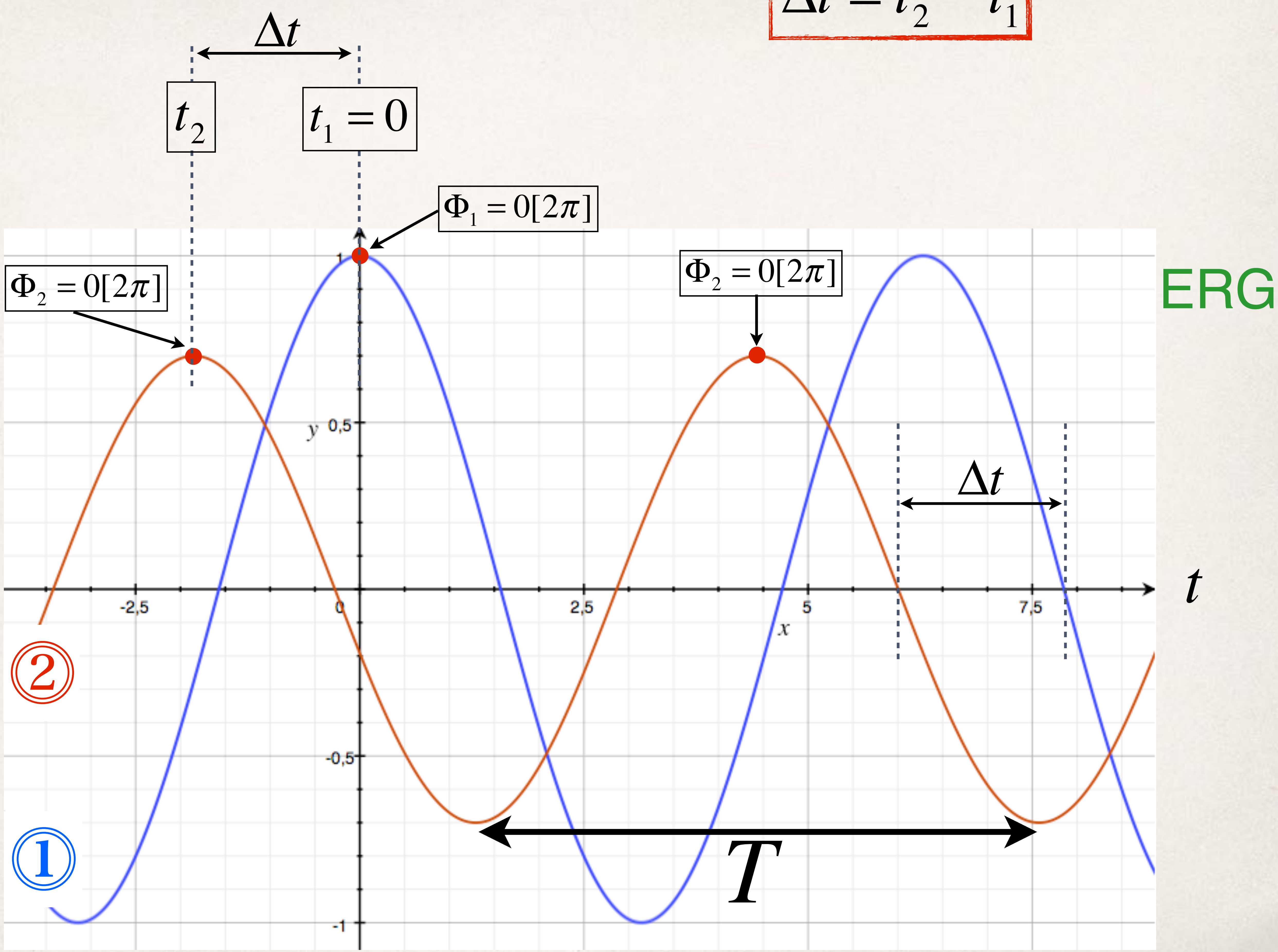
Soit un point «identique» sur les deux signaux : (à des instants t1 et t2 différents)

Ex : choix du maximum $\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = 0[2\pi]$

— En classe —

Ex : choix du zéro descendant $\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

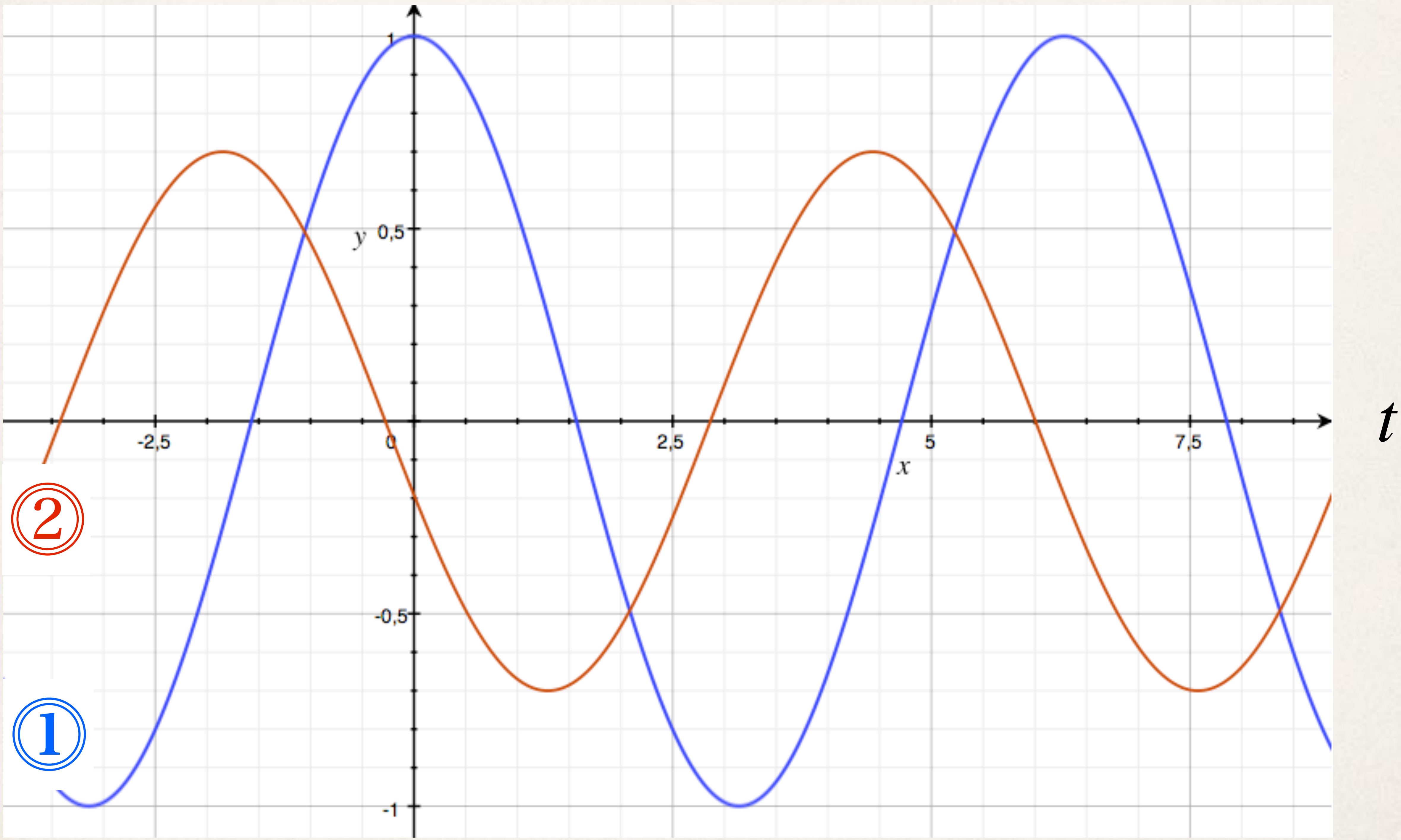
$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$$



Calcul du déphasage :

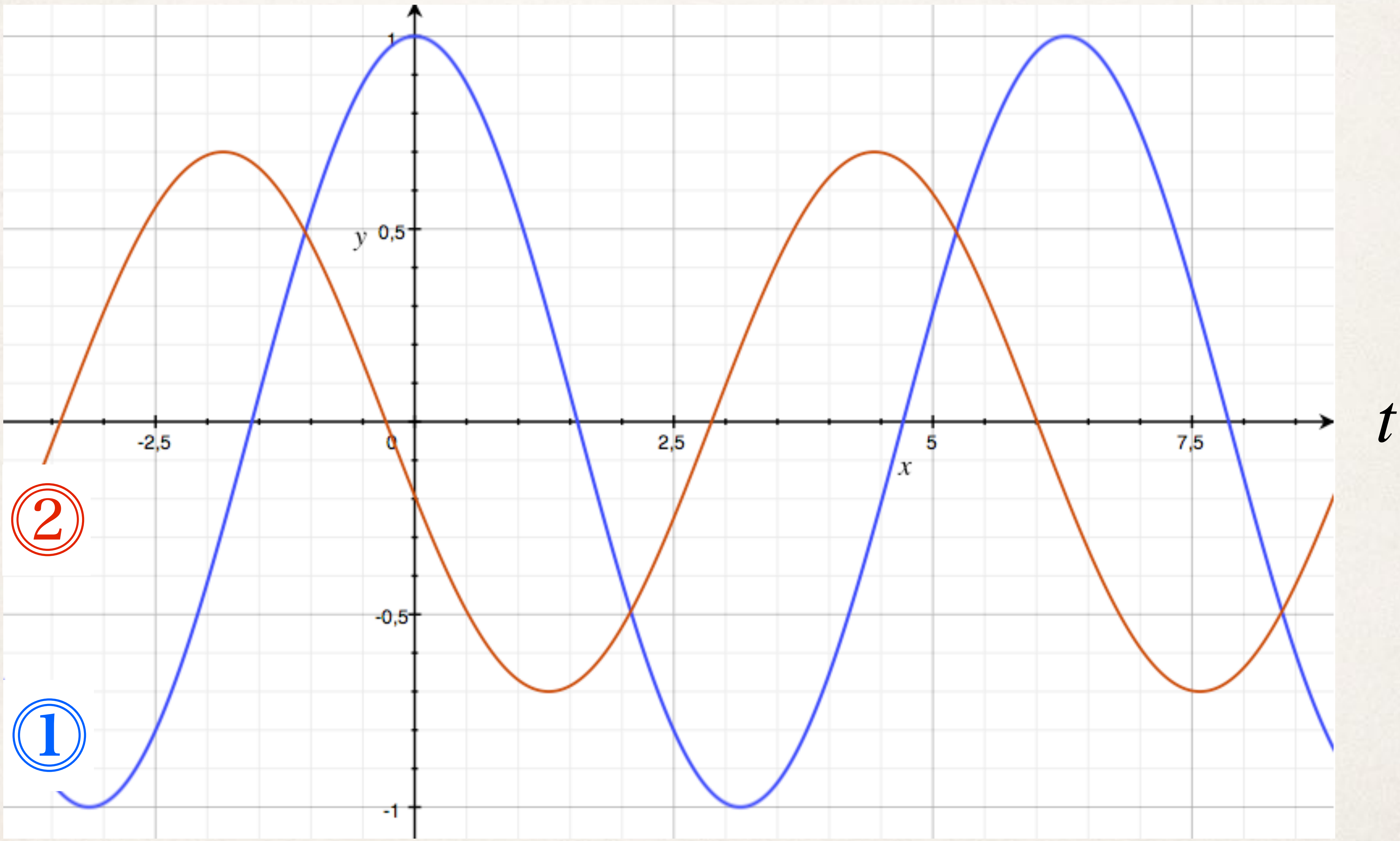
— En classe —

Signe de φ ?



Quel signal est en avance ?

Signe de φ ?



2 est en avance : sa bosse se produit avant celle de 1 $[2\pi]$

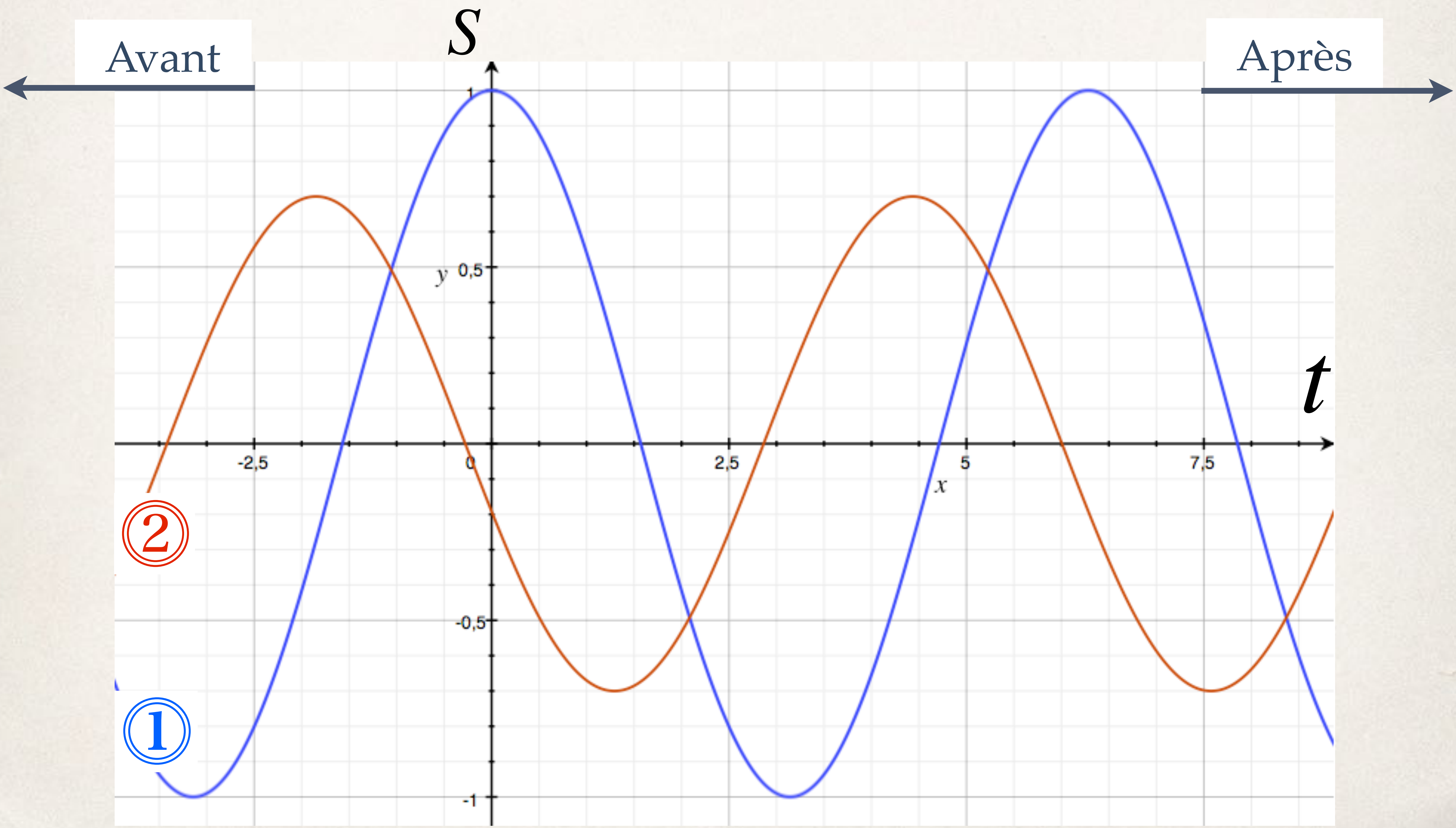
Signe de φ ?

Avance : $\varphi > 0$

Retard : $\varphi < 0$

Attention :

$$\varphi \in]-\pi, +\pi[$$

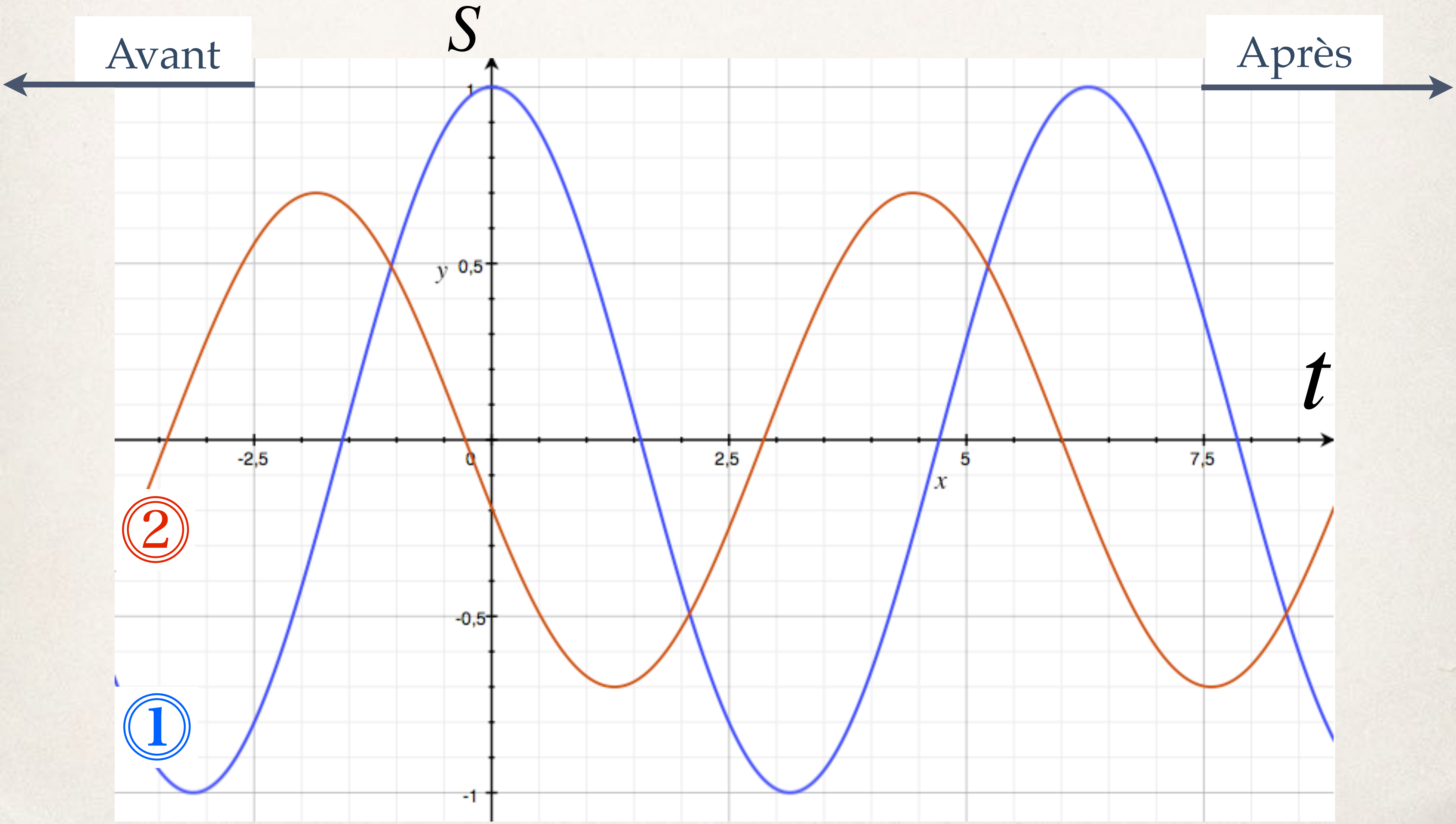


Calcul du cas d'application :

$$t_1 = 0.0s$$

$$t_2 = -1.8s$$

$$T = 6.3s$$



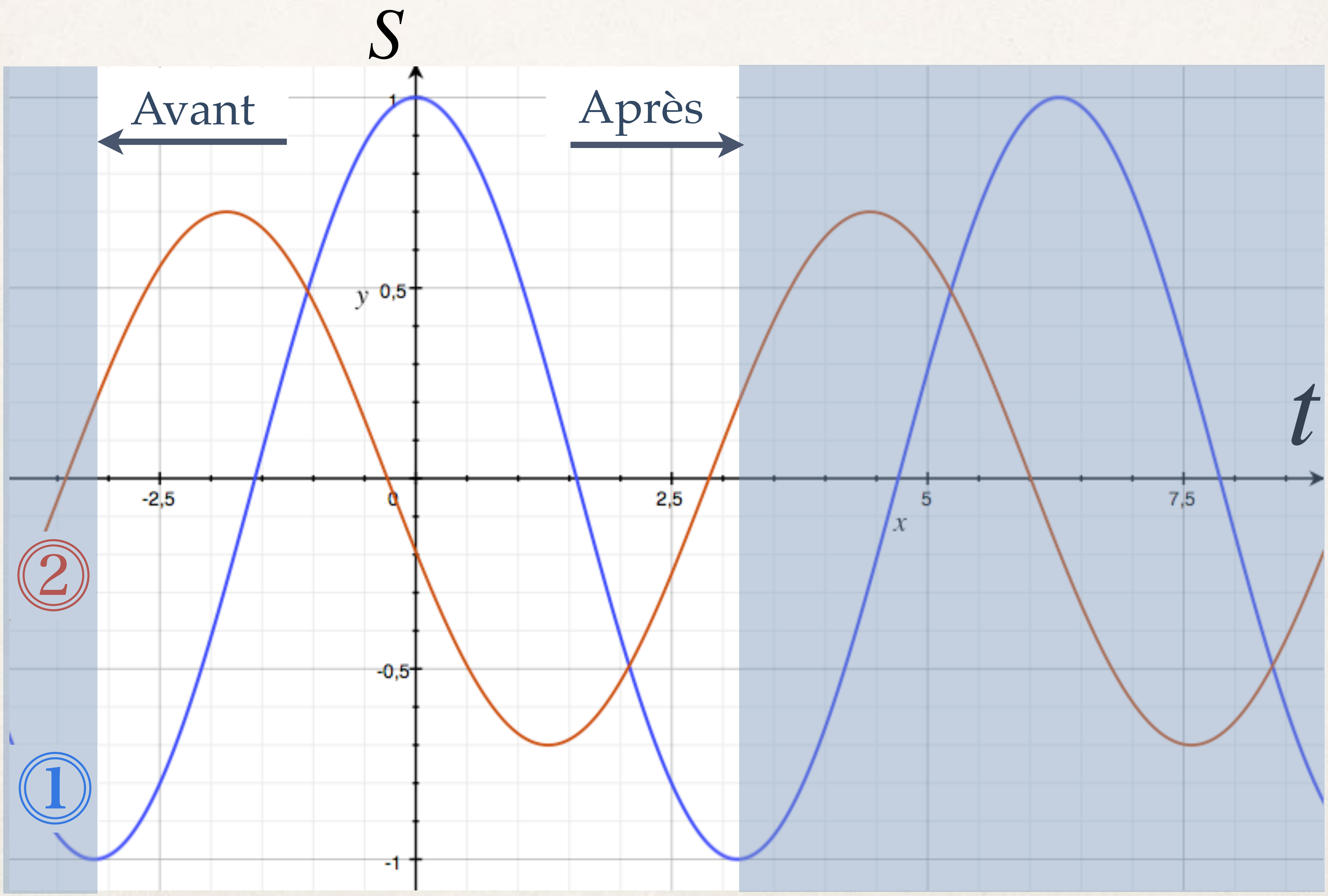
Signe de φ ?

Avance : $\varphi > 0$

Retard : $\varphi < 0$

Attention :

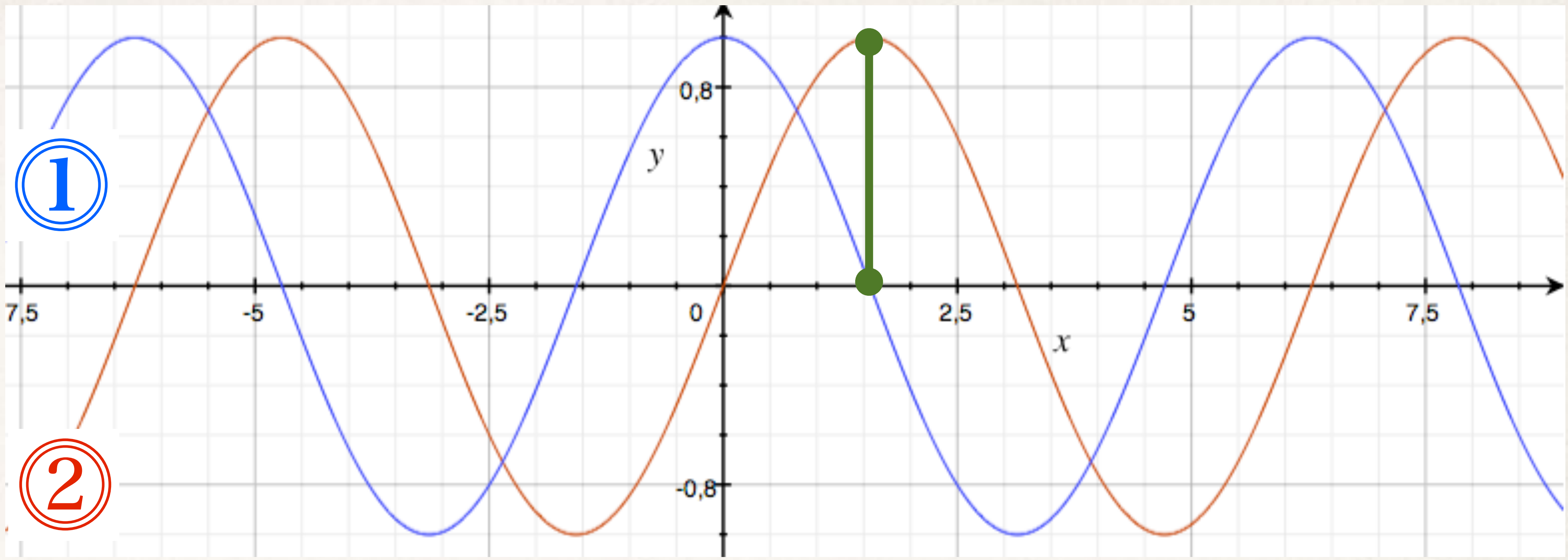
$$\varphi \in]-\pi, +\pi[$$



Les quadratures avance et retard :

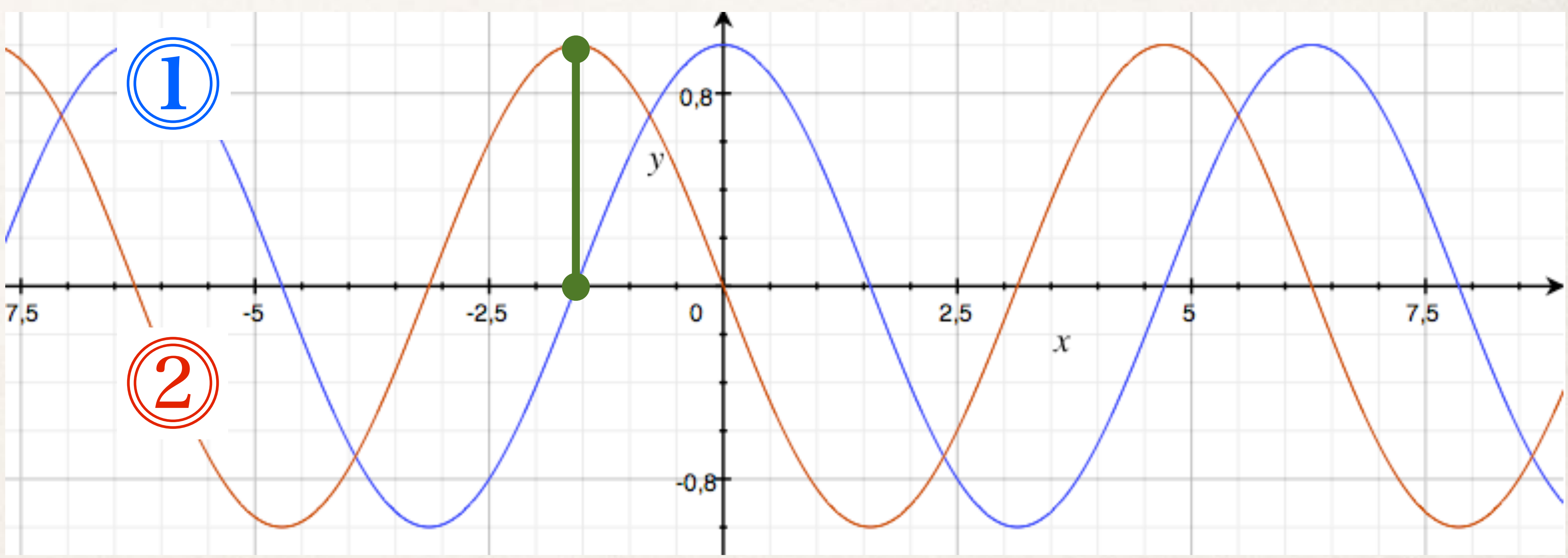
2 en retard sur 1

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$



2 en avance sur 1

$$\boxed{\varphi = +\frac{\pi}{2}}$$



Les signaux sont en décalage d'un quart de période.

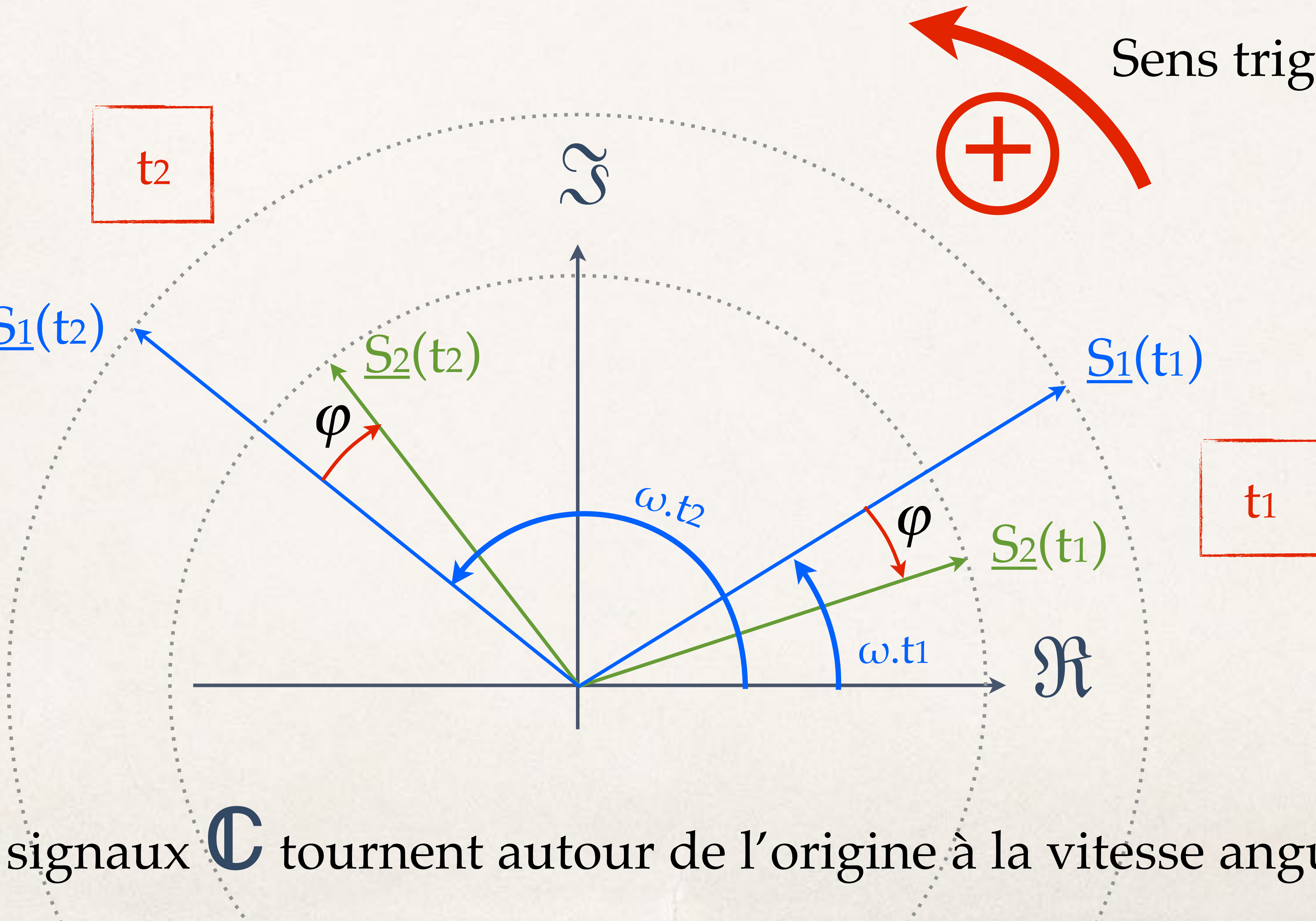
✳ Représentation dans le plan $\mathbb{C}$: Représentation de Fresnel

$S_1(t) =$

— En classe — $\xrightarrow[\text{complexes}]{\text{Passage aux}}$ $\underline{S_1}(t) =$

$S_2(t) =$ $\underline{S_2}(t) =$

O2R



Les signaux $\mathbb{C}$ tournent autour de l'origine à la vitesse angulaire ω

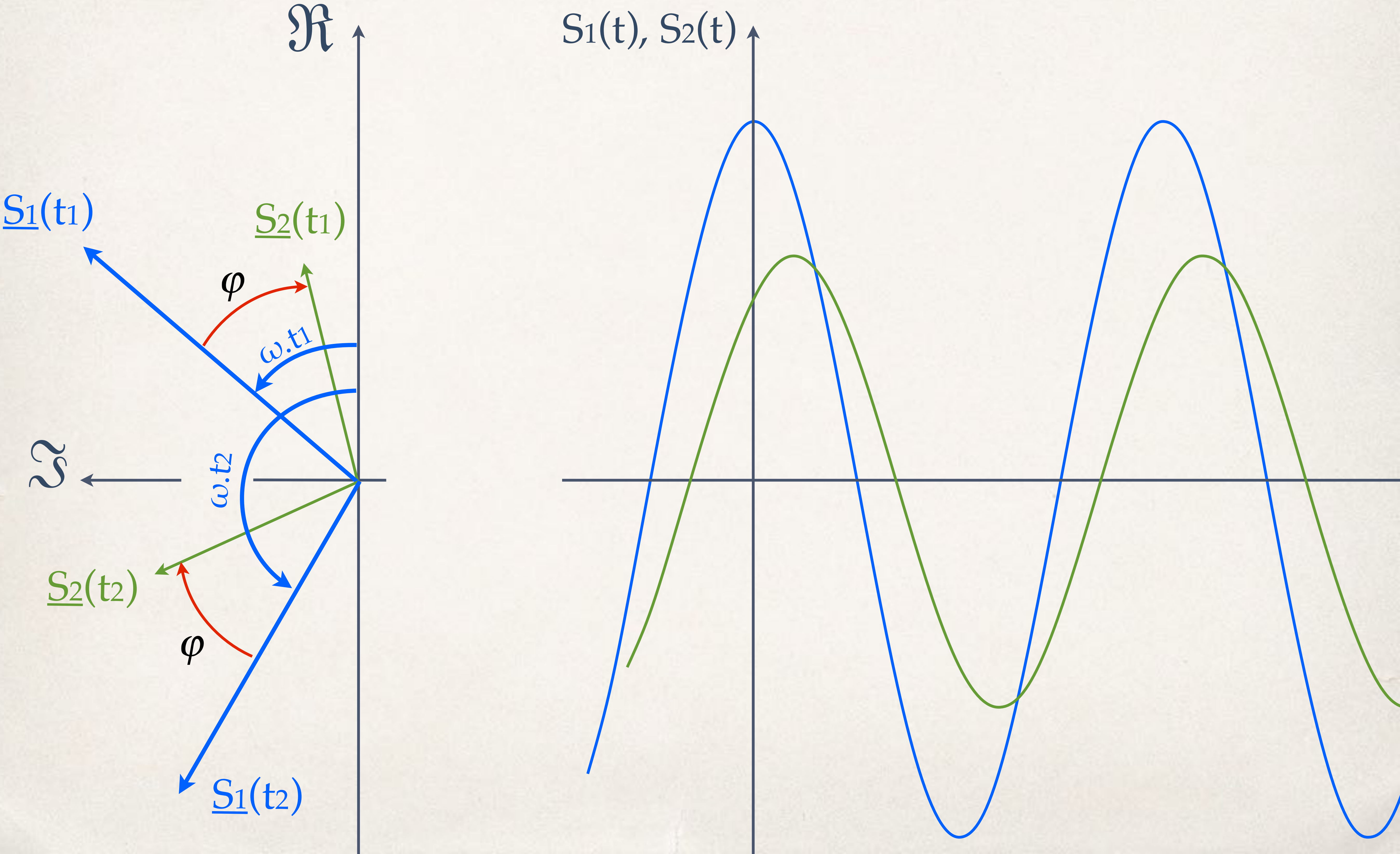
Relation entre le signal réel et sa représentation complexe :

— En classe —

Propriété de linéarité de l'opérateur partie réelle : Re(.)

Projection temporelle de la représentation complexe

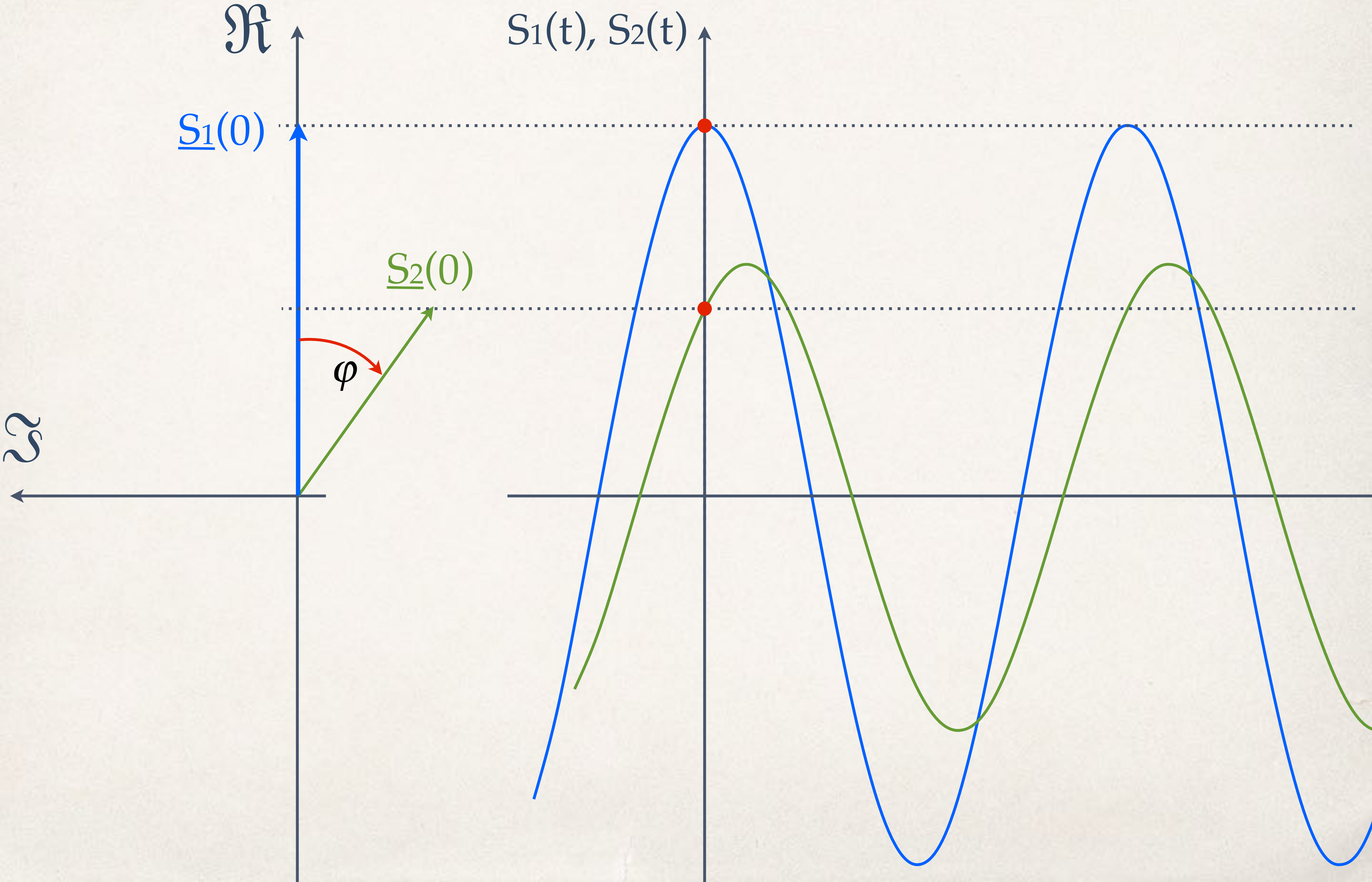
S2 est en retard



$\boxed{t=0}$

$\Phi_1(t)=0$ $\Phi_2(t)<0$

S2 est en retard

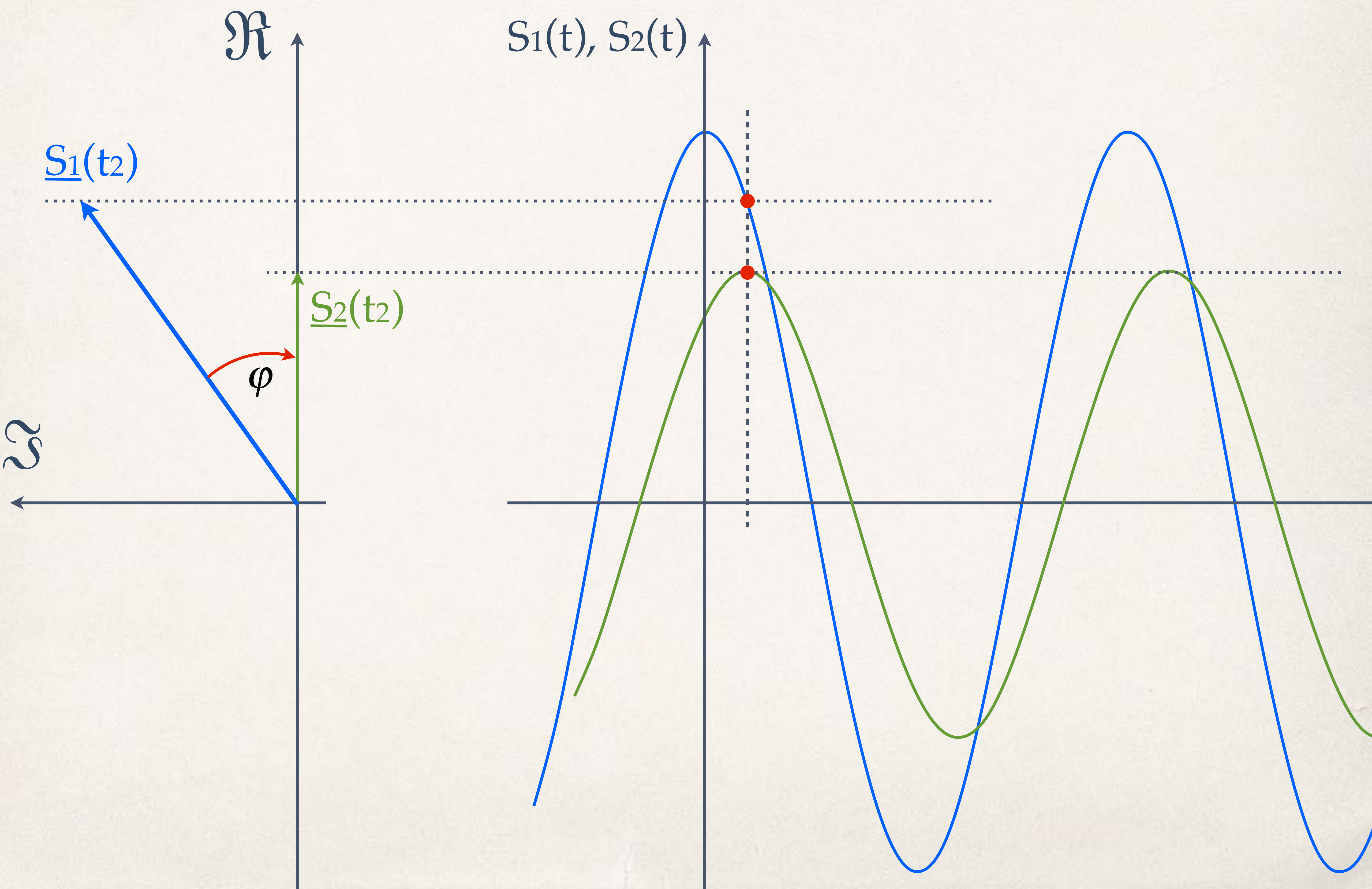


$\boxed{t = t_2 > 0}$

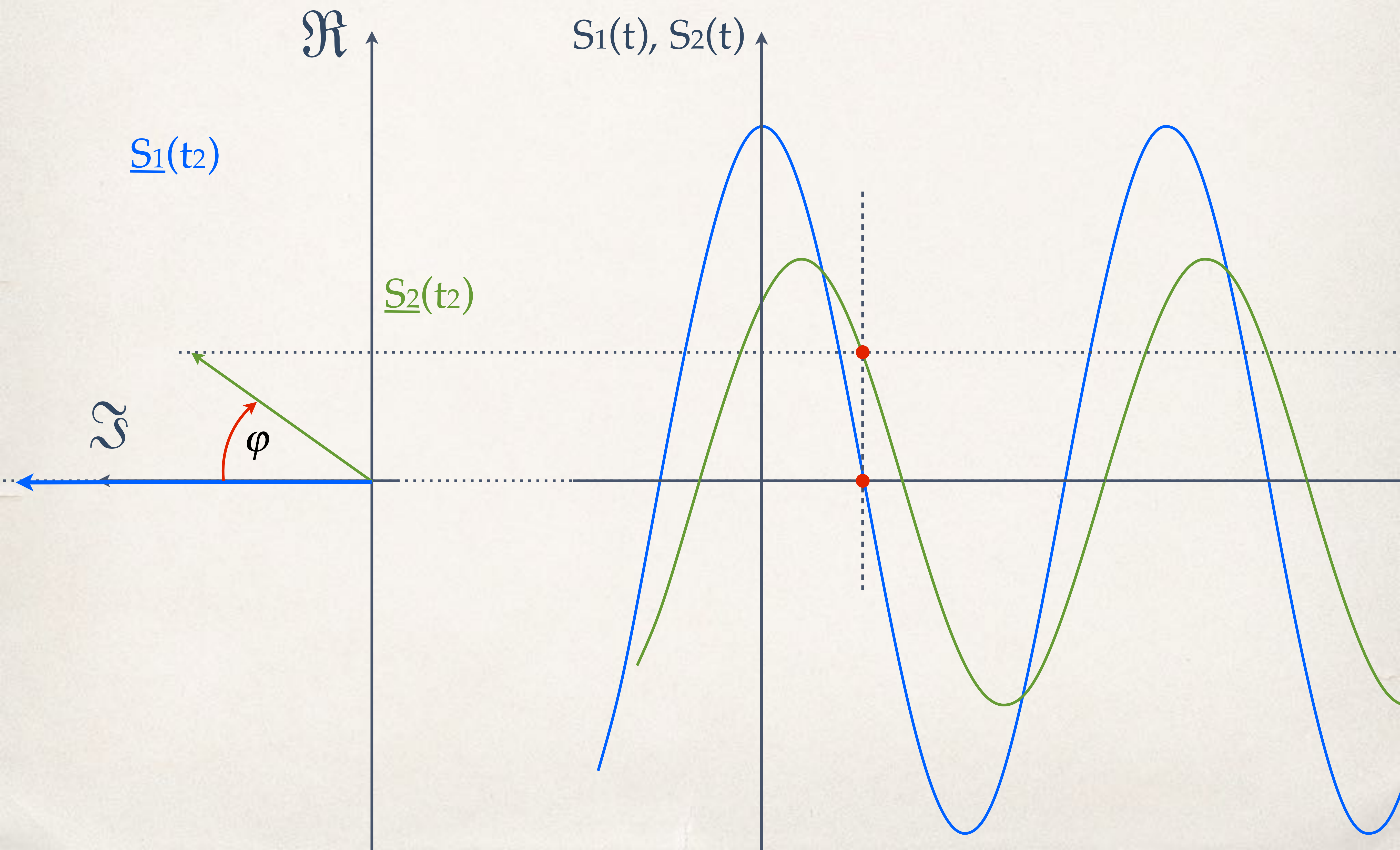
$0 < \Phi_1(t_2) < \dfrac{\pi}{2}$

$\Phi_2(t_2) = 0$

S2 est en retard



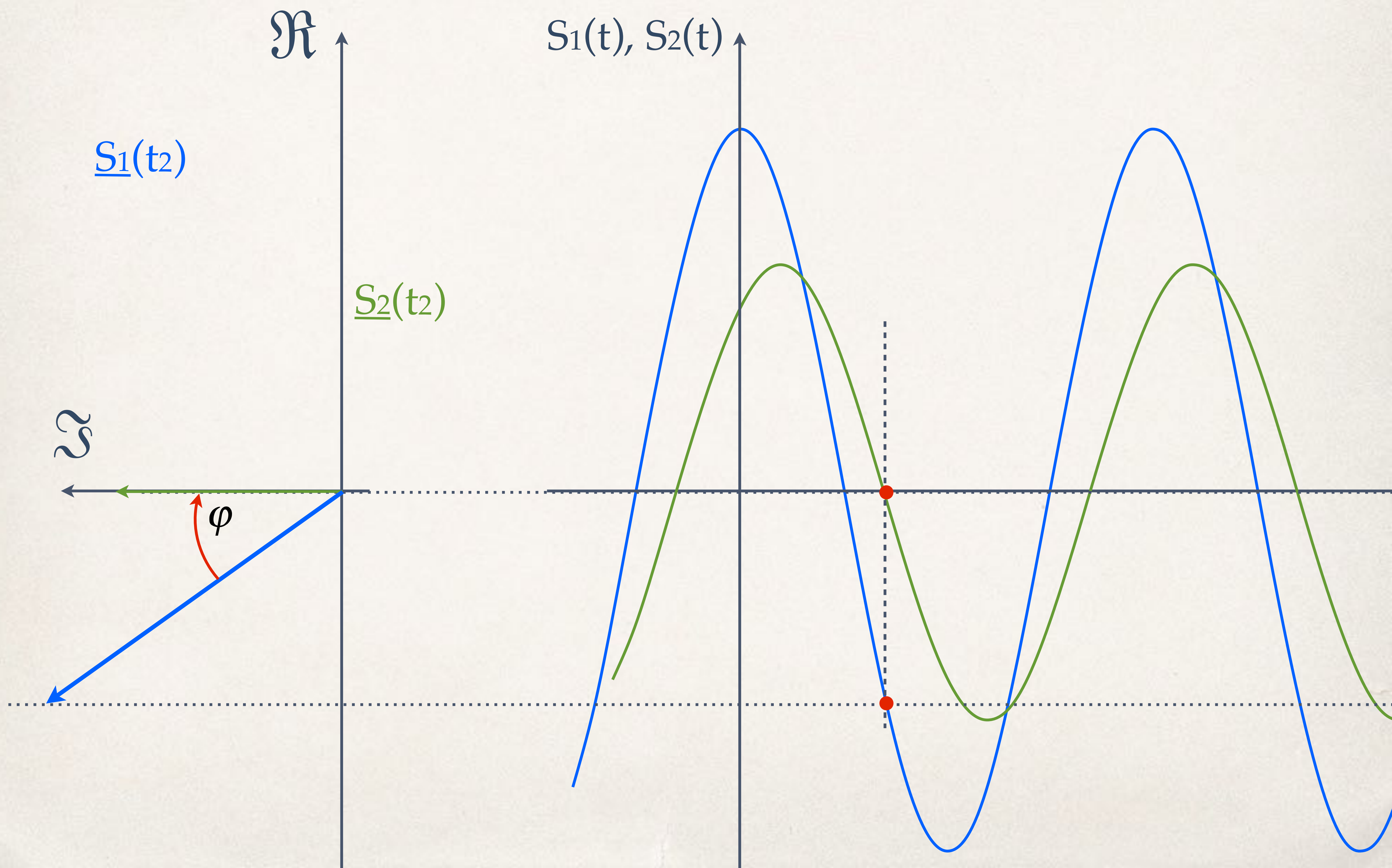
$\boxed{t = t_3}$ $\Phi_1(t_3) = \frac{\pi}{2}$ $0 < \Phi_2(t_3) < \frac{\pi}{2}$ S2 est en retard



$\boxed{t = t_4}$

$\Phi_1(t_4) > \frac{\pi}{2}$ $\Phi_2(t_4) = \frac{\pi}{2}$

S2 est en retard



Moyenne d'une fonction périodique :

Définition :

Soit un signal de période T, la valeur moyenne du signal est donnée par :

$$\langle f(t) \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt$$

Ex 1 :

— poser le calcul pour —

Ex 2 :

f(t) = cos(omega*t +phi)

f(t) = sin(omega*t +phi)

Valeur quadratique moyenne :

— plus délicat pour —

f(t) = [cos(omega*t +phi)]^2