Introduction

Objectifs :

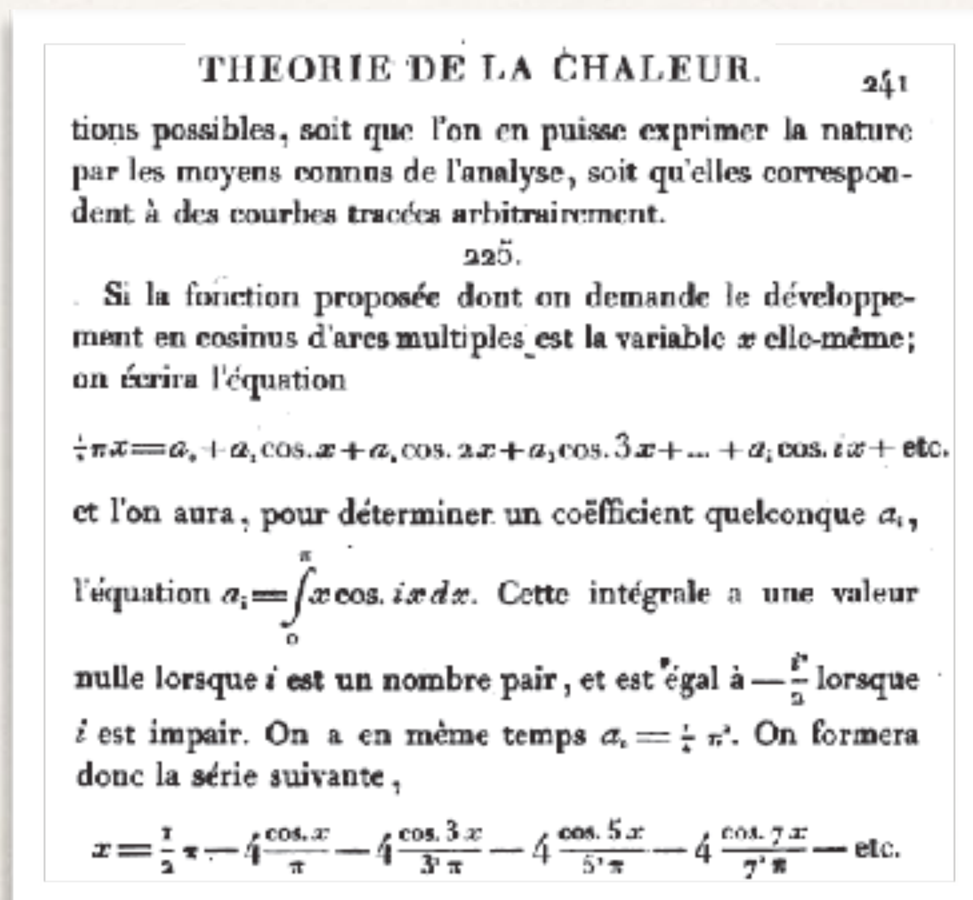
L'Etude des signaux sinusoïdaux est essentielle dans les systèmes linéaires.

- Décomposition harmonique
- Notion de phase généralisée
- Modélisation en complexe du signal sinusoïdal
- Interférence/superposition de plusieurs signaux sinusoïdaux
- Moyennes des signaux sinusoïdaux

Décomposition d'un signal périodique

Propriété :

Tout signal de période T, peut être décomposé en une somme infinie de signaux harmoniques :



THEORIE DE LA CHALEUR. 241

tions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement.

225.

Si la fonction proposée dont on demande le développement en cosinus d'arcs multiples est la variable x elle-même; on écrira l'équation

$$\tfrac{1}{2}\pi x = a_0 + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots + a_i \cos. ix + \text{etc.}$$

et l'on aura, pour déterminer un coëfficient quelconque a_i, l'équation $a_i = \int_0^{\pi} x \cos. ix\, dx$. Cette intégrale a une valeur nulle lorsque i est un nombre pair, et est égal à $-\frac{2}{i^2}$ lorsque i est impair. On a en même temps $a_0 = \frac{1}{2}\pi^2$. On formera donc la série suivante,

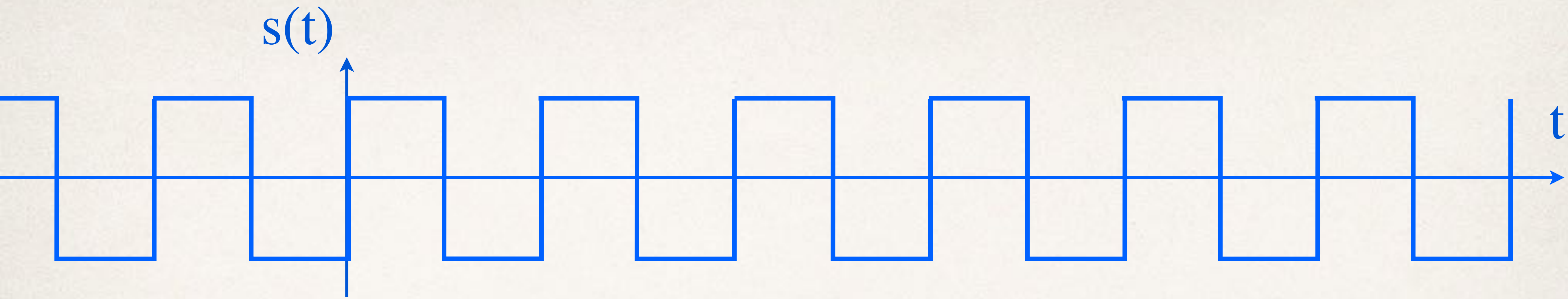
$$x = \tfrac{1}{2}\pi - 4\frac{\cos. x}{\pi} - 4\frac{\cos. 3x}{3^2\pi} - 4\frac{\cos. 5x}{5^2\pi} - 4\frac{\cos. 7x}{7^2\pi} - \text{etc.}$$

Théorie analytique de la chaleur (1822)

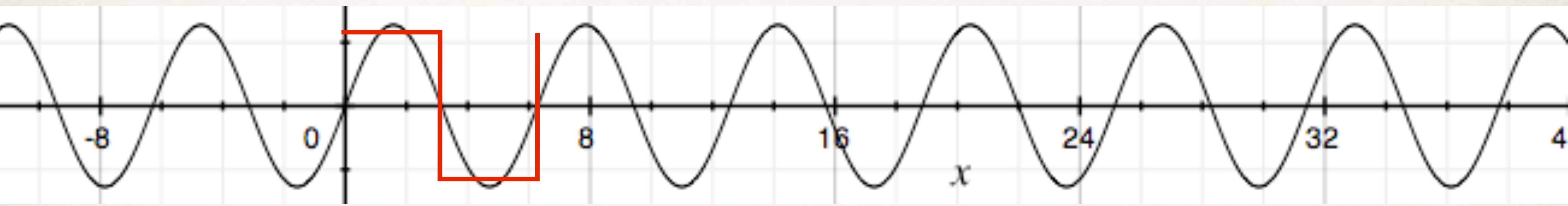
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Crédit : Observatoire de Paris

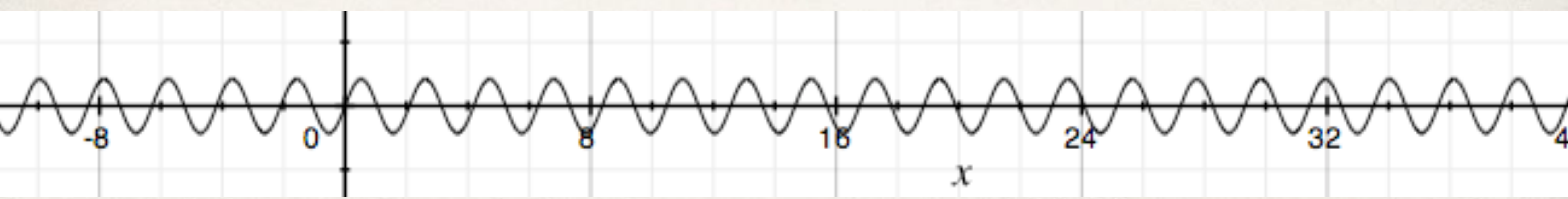
Soit un signal périodique en fonction du temps :



On peut le remplacer de façon approximative par une fct°. sinusoïdale de même fréquence :

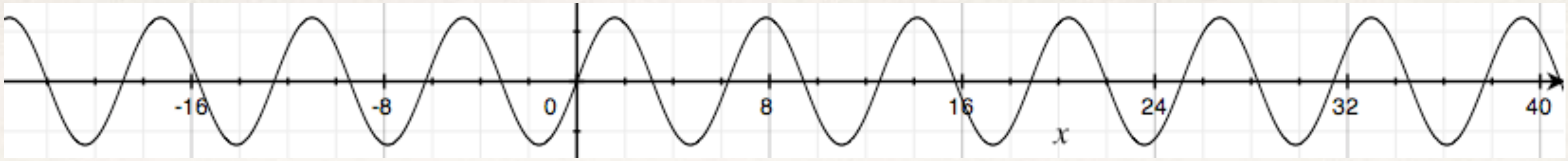


On peut pour être plus précis combler les «manques» de signal en ajoutant une autre fonction sinusoïdale : (fréquence triple)



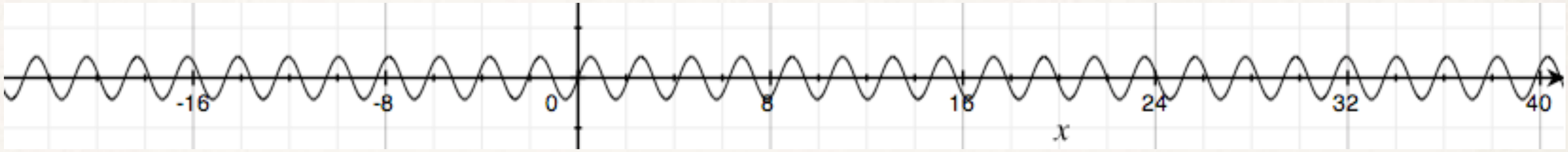
Exemple avec une addition de quatre signaux :

S1



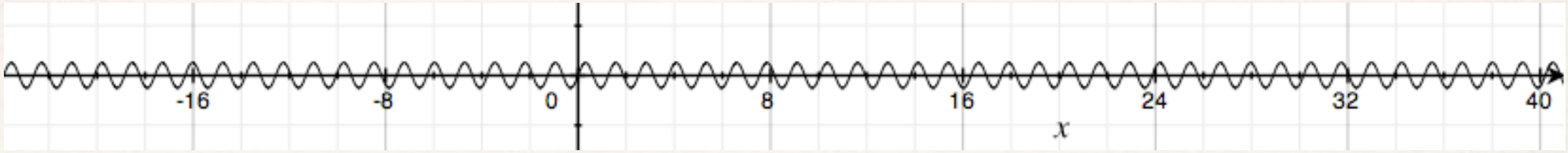
+

S2



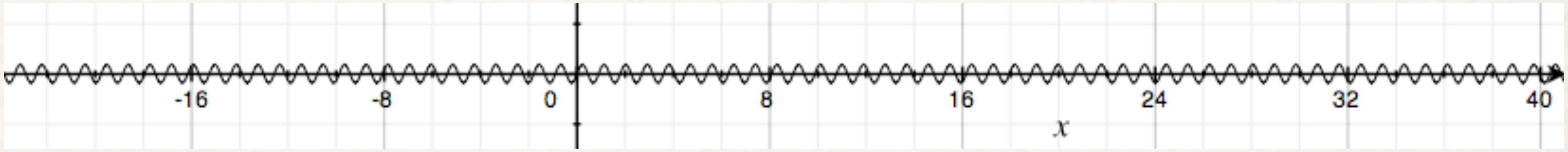
+

S3



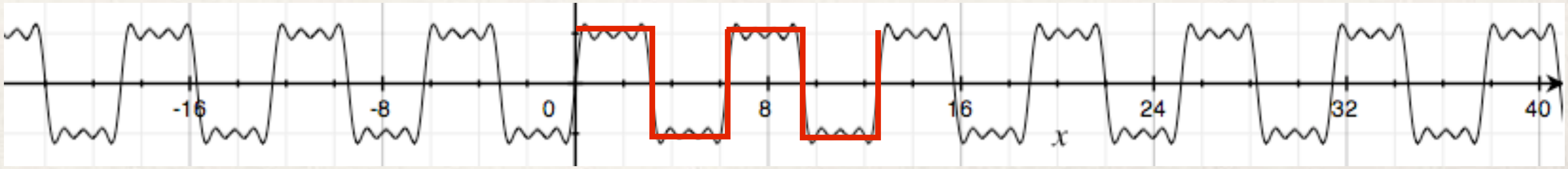
+

S4

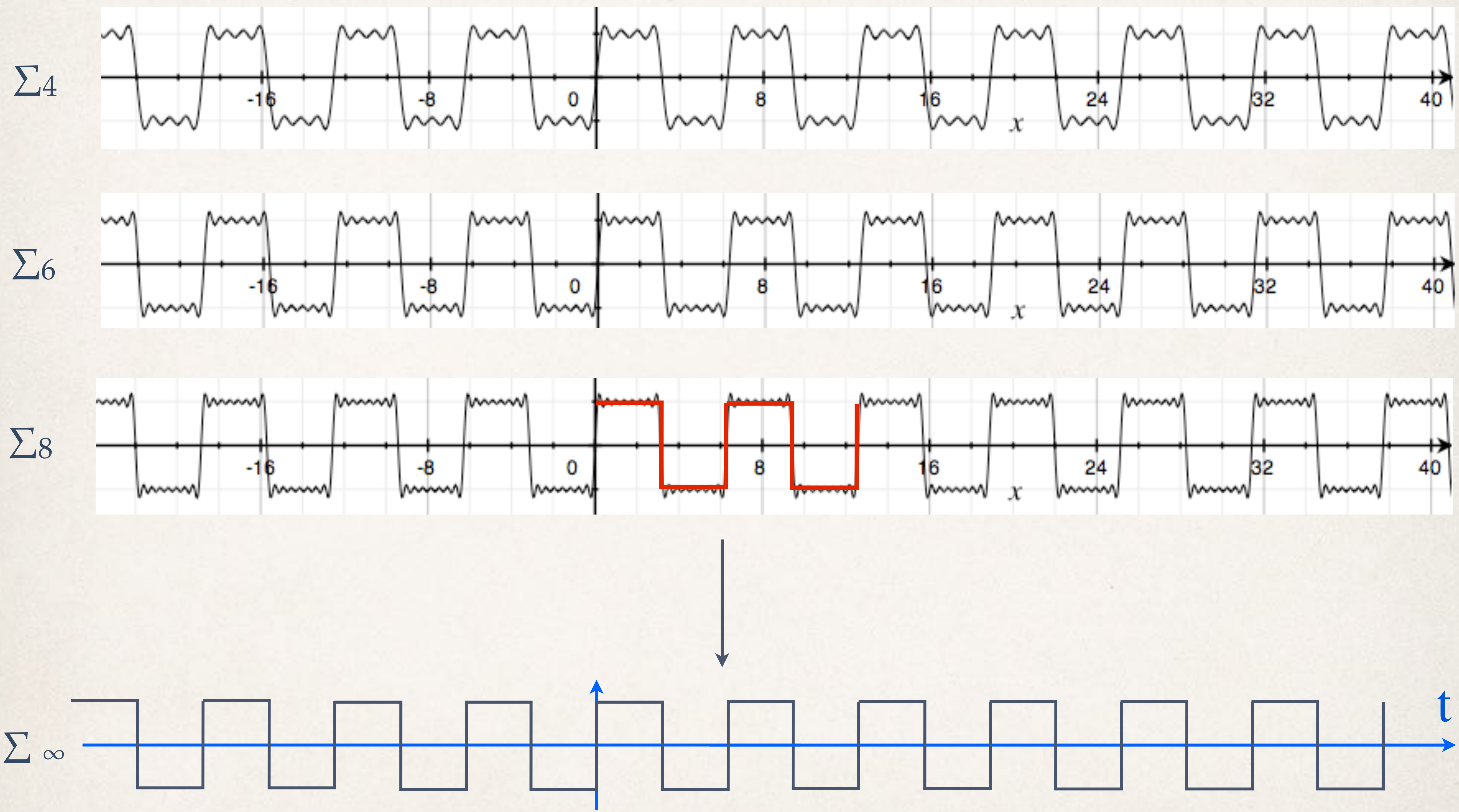


=

Σ4



Plus on ajoute un grand nombre de contributions, plus on peut être précis :

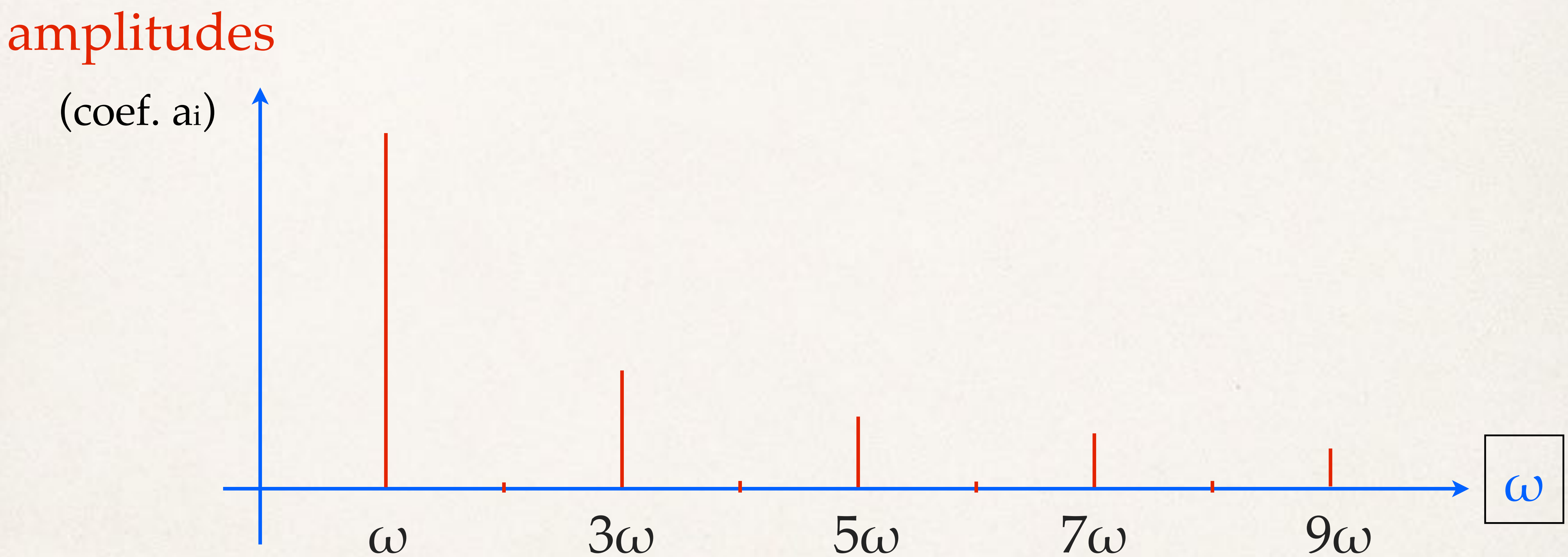


La fonction de départ est obtenue dans la limite théorique d’un infinité de contributions.

Représentation spectrale d'un signal périodique :

$$\boxed{e(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t) + a_5 \sin(5\omega t) + a_7 \sin(7\omega t) + \ldots.}$$

C'est simplement une addition de sinusoïdes, que l'on peut représenter comme ceci :



On trace les amplitudes en fonction de la fréquence.
[si nécessaire les phases sont aussi représentées (phases nulles ici)]

Rq : Fourier a montré comment calculer les coefficients du développement :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin(\frac{2\pi k}{T}t)\,dt$$ Termes impairs

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(\frac{2\pi k}{T}t)\,dt$$ Termes pairs

pour toute fonction e(t) qui est T-périodique.

Propriété de linéarité et exemple :

C.L--> C.L

ex : dérivée - primitive - C.L - Tf° Fourier etc....

Conclusion :

Dans tout système linéaire, la compréhension d'un signal quelconque est basée sur la décomposition en signaux sinusoidaux de base.

-> Série/Transformée de Fourier.

Il faut donc maîtriser ces signaux et leurs propriétés

- Ces notions ont permis bien plus tard de construire la mécanique quantique dans des espaces de fonctions : espace de Hilbert.

- L'espace de Fourier est à la base du traitement numérique des simulations à N-corps ou des simulations numériques de mécanique des fluides.

- Elles sont également à la base du traitement des signaux utilisés dans les télécommunications