

Mécanique Quantique

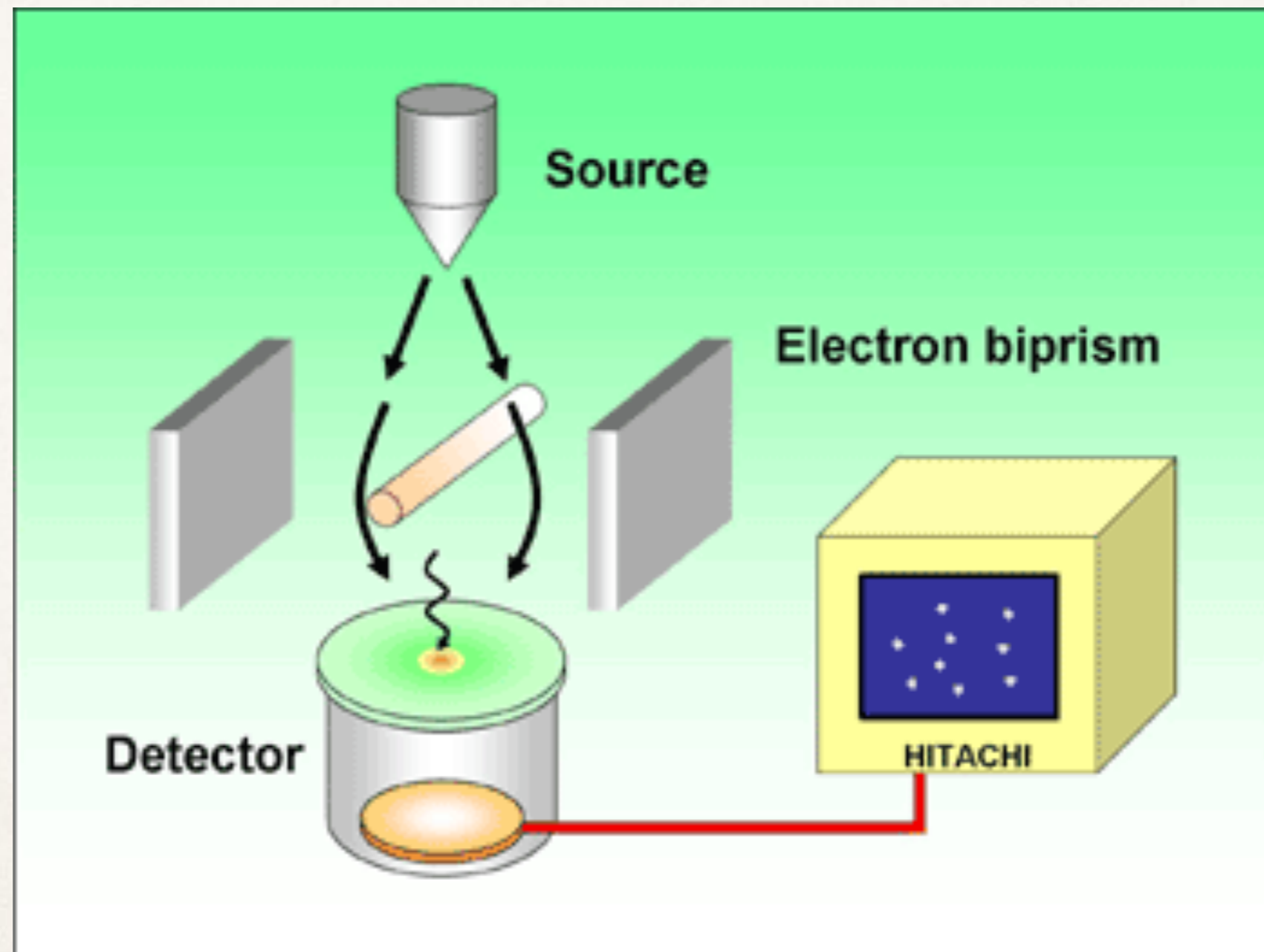
Introduction au monde quantique

Objectifs :

- La lumière est-elle faite d'onde (Huygens) ou de particule (Newton) ?
Débat plusieurs fois centenaire qui ne sera tranché qu'avec l'avènement de la mécanique quantique (De Broglie - Einstein au début du XXème siècle)
- Donner un formalisme pour décrire comment la matière elle même, à certaines échelles, présente un comportement ondulatoire.

Exemple introductif

On veut réaliser des interférences avec des particules de matière



Interférences d'Young avec des électrons (A. Tonomura, 1989)

Expérience d'interférences de Young avec des électrons



[A. Tonomura, 1989]

Conclusion :

Dans certaines conditions, la matière se comporte comme une onde !!!

1 - Dualité onde-particule

Nous avons étudié à travers les interférences et la diffraction la **nature ondulatoire** des ondes électromagnétiques et de la lumière en particulier.

Nous allons voir que des expériences dites à 1-photon démontrent la **nature particulaire** de la lumière faite de **grains de lumière : les photons**.

L'expérience précédente (Tonomura), bien qu'elle confirme aussi la **nature particulaire** des électrons (grains de matière) démontre pourtant que la loi de probabilité de détection est bien décrite par un **phénomène ondulatoire**.

Le photon

 $\tilde{\varphi}$

C'est un grain de lumière dont l'expérience valide les propriétés suivantes :

- le photon se déplace à la vitesse de la lumière ($c_0 = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$ dans le vide)
- le photon théorique est monochromatique et a de fait une durée de vie infinie

Soit ν sa fréquence :

- on lui attribue une énergie $E = h\nu$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega$$

(Einstein)

- sa longueur d'onde vaut

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

RPB

- le photon a une **masse nulle** mais possède une quantité de mouvement de nature électromagnétique :

(Théorie de Maxwell)

$$\vec{P} = \frac{E}{c} \vec{u}_z = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_z = \frac{h}{\lambda} = \hbar \vec{k}$$

Les gammes de photons : ODG

ODG :

	Radio	IR	visible	UV	X	γ
E	$\leftarrow \sim meV \rightarrow$		$\sim eV$	100eV	10 keV	$\geq 100 keV$
ν	$\leftarrow 10^{12} \rightarrow$		10^{14}	10^{16}	10^{18}	$\geq 10^{19} \rightarrow$
λ	$\leftarrow \sim mm \rightarrow$		$\sim 500 \text{ nm}$	$\sim 10 \text{ nm}$	$\sim \text{\AA}$	$\leq 10^{-11} \rightarrow$

Le photon est le «véhicule» l'interaction électromagnétique mais ses gammes de fréquences / énergies sont très variées [ainsi que les phénomènes physiques qui en sont la cause].

La loi de De Broglie pour un corpuscule de matière

(Prix Nobel 1929)

Pour apporter de la cohérence entre les deux natures ondulatoire et particulaire, Louis de Broglie eut l'idée de prolonger l'idée d'Einstein concernant le photon à la matière.

En 1923, il postule ainsi que :

Tout «corpuscule de matière» possède une longueur d'onde associée à sa quantité de

mouvement et liée avec la constante de Planck par :

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

On retrouve ainsi le même résultat que pour la quantité de mouvement d'un photon :

$$\vec{P} = \hbar \vec{k}$$

Toutefois l'évaluation de l'énergie d'une particule matérielle est très différente de celle d'un photon car la particule matérielle a une masse : => théorie de la relativité restreinte

Comment évaluer l'énergie d'une onde/particule ?

[compléments]

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Relation d'Einstein
1905

masse inertielle au repos

Qté. de Mvt.

[m_0 : partie irréductible liée à la structure interne :
↳ «Energie cristallisée»]

La masse d'une particule dépend d'une caractéristique intrinsèque m_0 , mais aussi de sa quantité de mouvement P donc du référentiel !

Particule immobile :

Photon : $m_0 = 0$

Particule en mouvement :

Ordre De Grandeur - ODG

- Photon :

Particule matérielle :

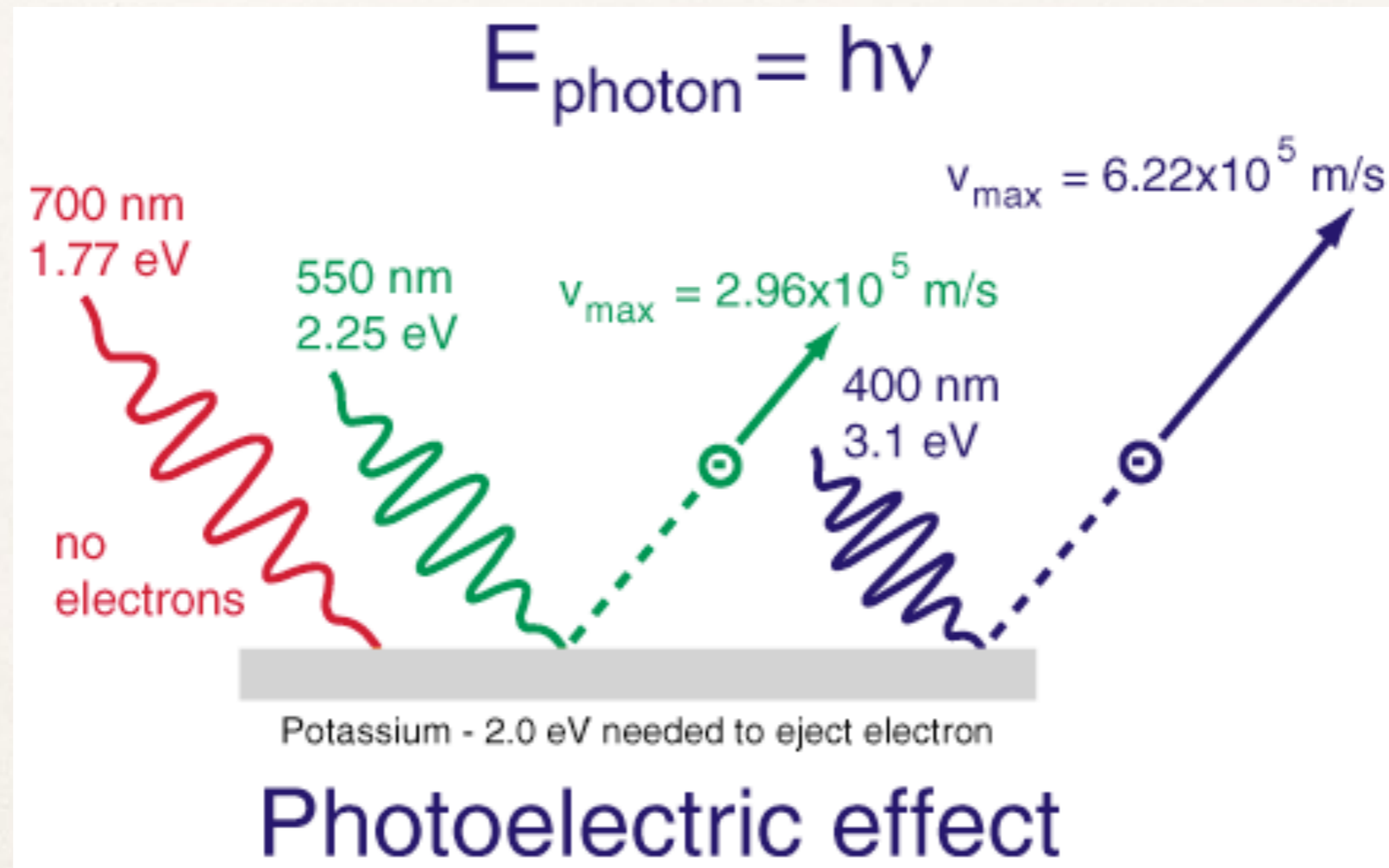
- Electron :

- Proton :

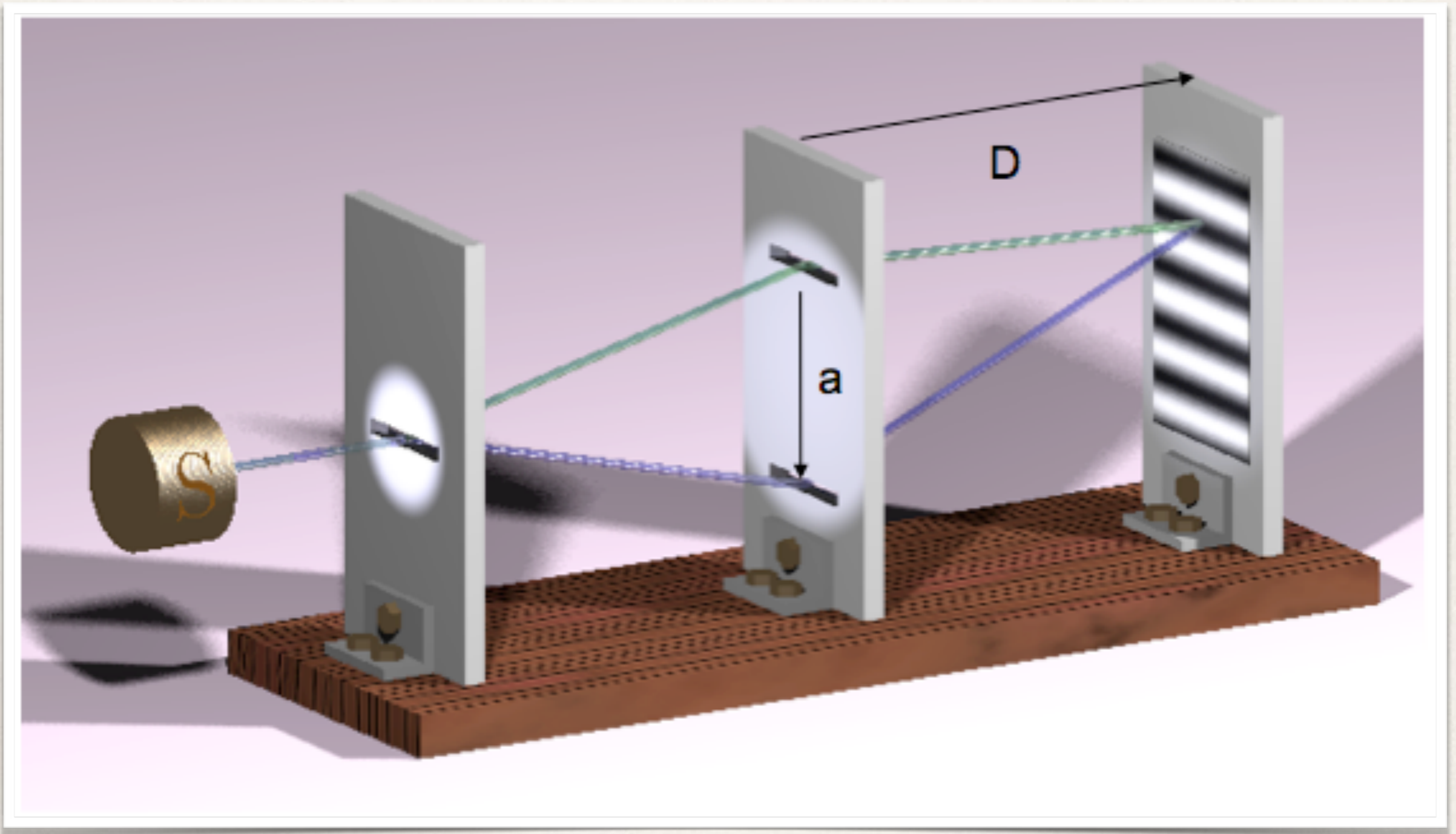
Balle de fusil :

APPROCHE DOCUMENTAIRE :

- Nécessité de la notion de photon
- Onde de matière



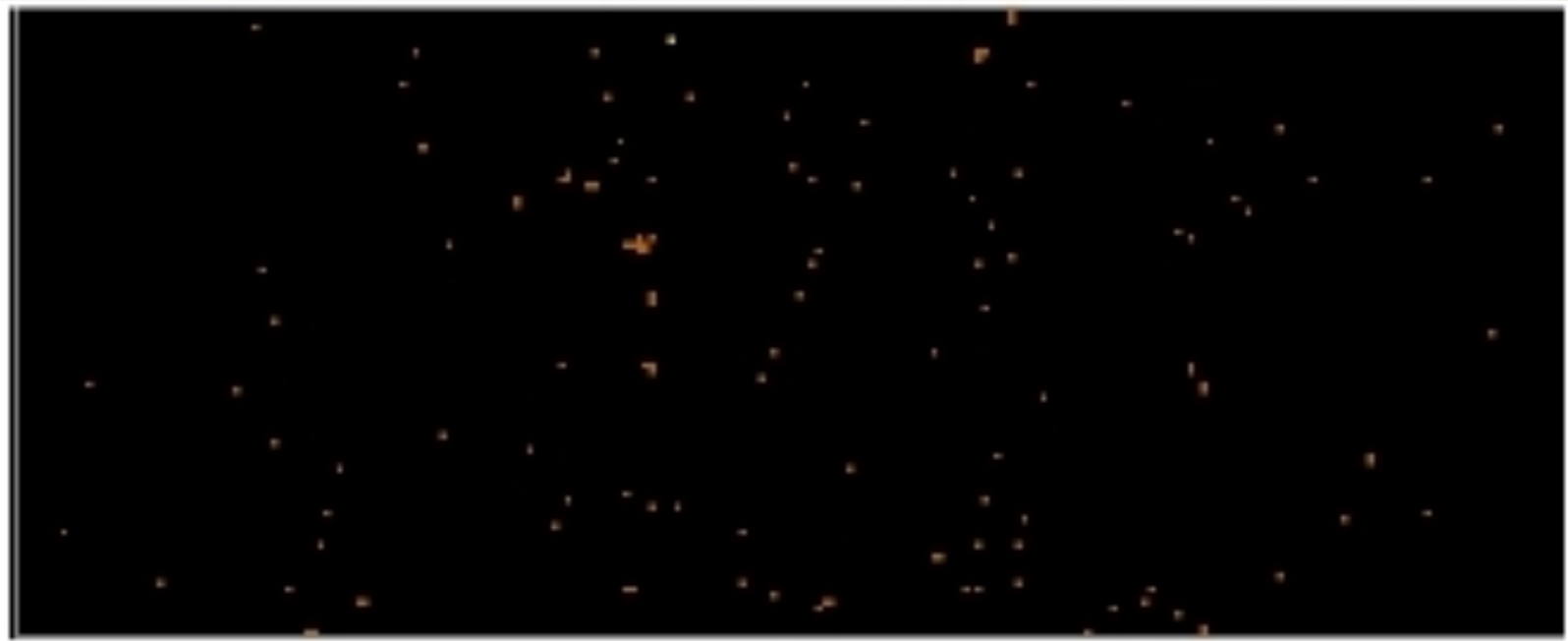
Expérience de Young à 1 photon !!!



On peut contrôler l'intensité de la source pour garantir qu'il n'y a qu'un seul photon dans l'interferomètre à chaque instant.

Les photons sont détectés 1 par 1 :
ce qui valide la nature particulaire de la lumière

T = 10 s



Peu à peu, des franges sombres et claires apparaissent ...

T = 100 s



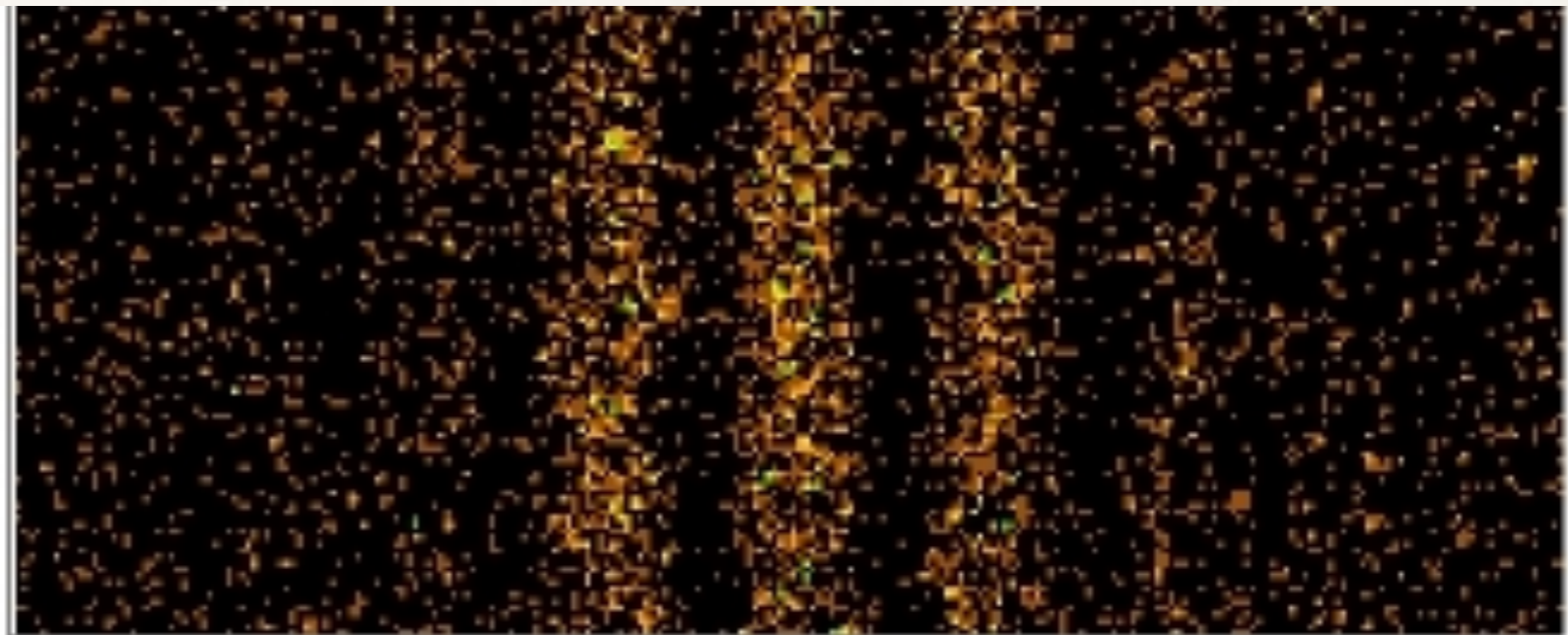
Chaque passage d'un photon est une expérience indépendante....

[comme un jet de dé]

..... que l'on répète des centaines de milliers de fois

Peu à peu, des franges sombres et claires apparaissent ...

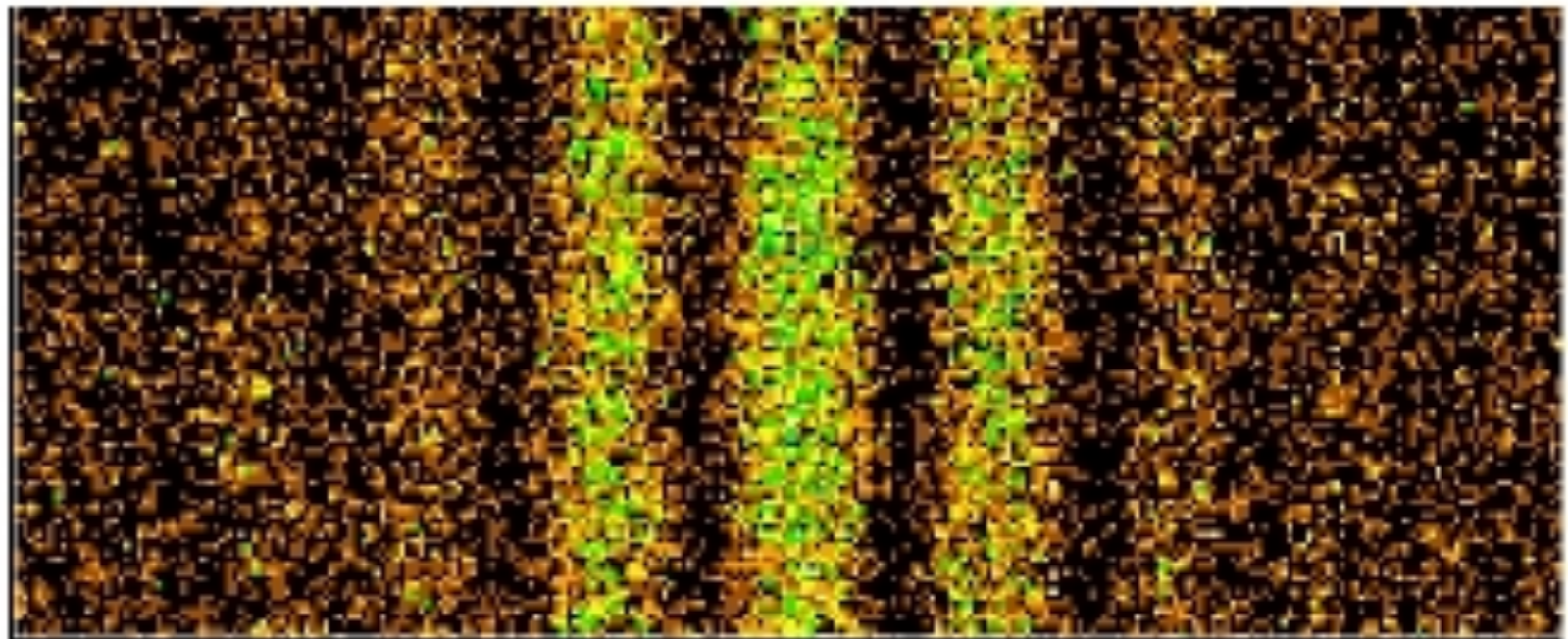
T = 500 s



On obtient la distribution de probabilité de détection d'un photon.

La probabilité de détection des photons est conforme au calcul classique d'optique ondulatoire :

T = 2000 s



Ceci valide la nature ondulatoire de la lumière.

Question(s) :

- Si le photon est seul dans l'interferomètre, avec qui ou quoi interfère t-il ?
- Le photon est-il passé par le trou 1 (du bas) ou le trou 2 (du haut) ?
- Soit P1 la loi de probabilité de distribution sur l'écran après être passé par le trou 1 seul (trou 2 fermé). Idem P2 pour le trou 2 seul (trou 1 fermé)

Si le photon passe par un trou et pas par l'autre trou, les diffractions par les trous 1 et 2 sont alors indépendantes et la loi de probabilité totale donne :

$$P = P1 + P2$$

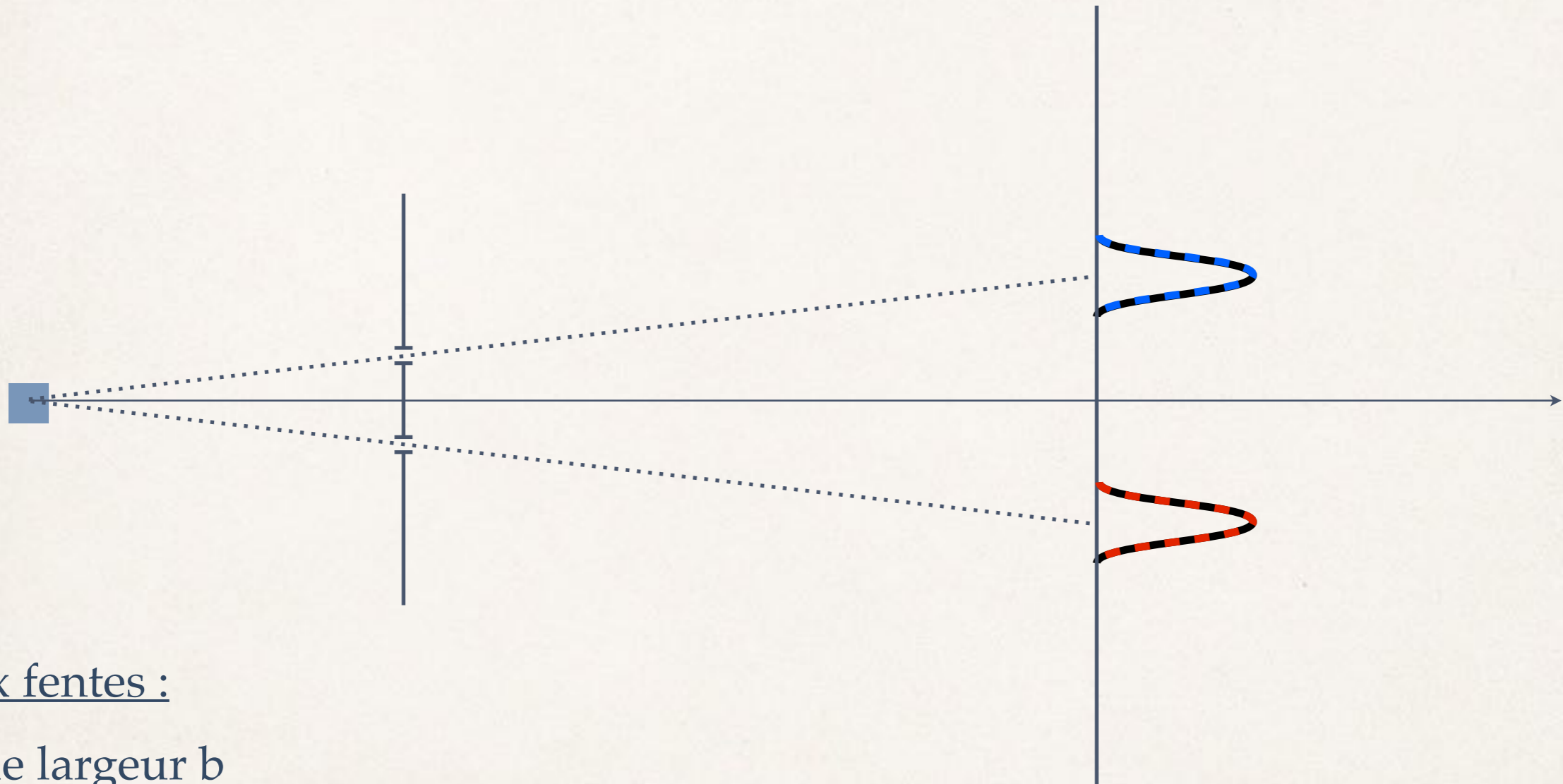
PB : Ce n'est pas ce qu'on observe !

(pour des fentes très proches)

2 - diffraction et probabilités

Passage du monde classique au monde quantique

α - Retour sur l'expérience des fentes de Young avec des balles de fusil !!!

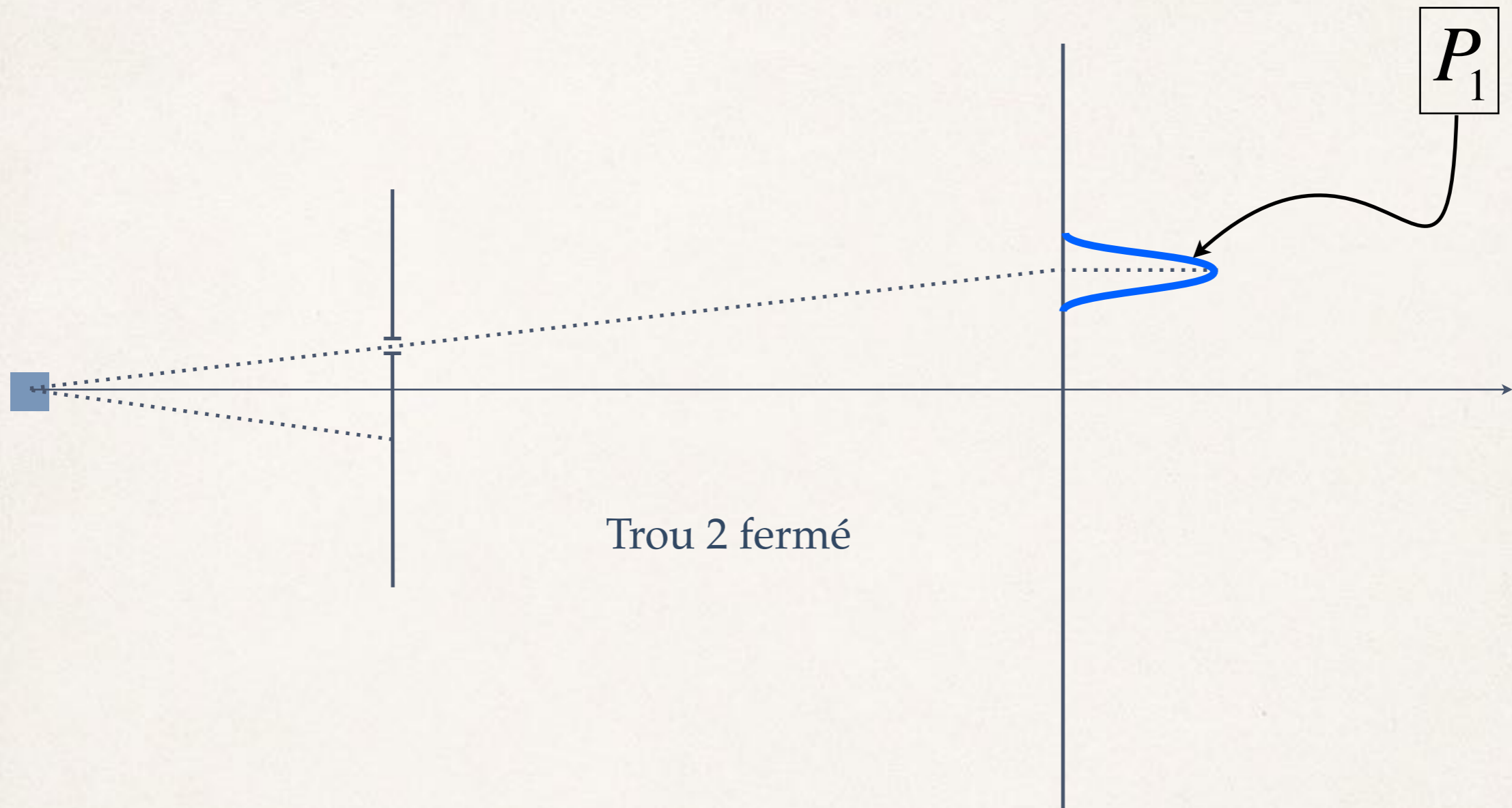


Deux fentes :

- de largeur b
- distantes de a

Une expérience par la pensée
(uniquement !!!)

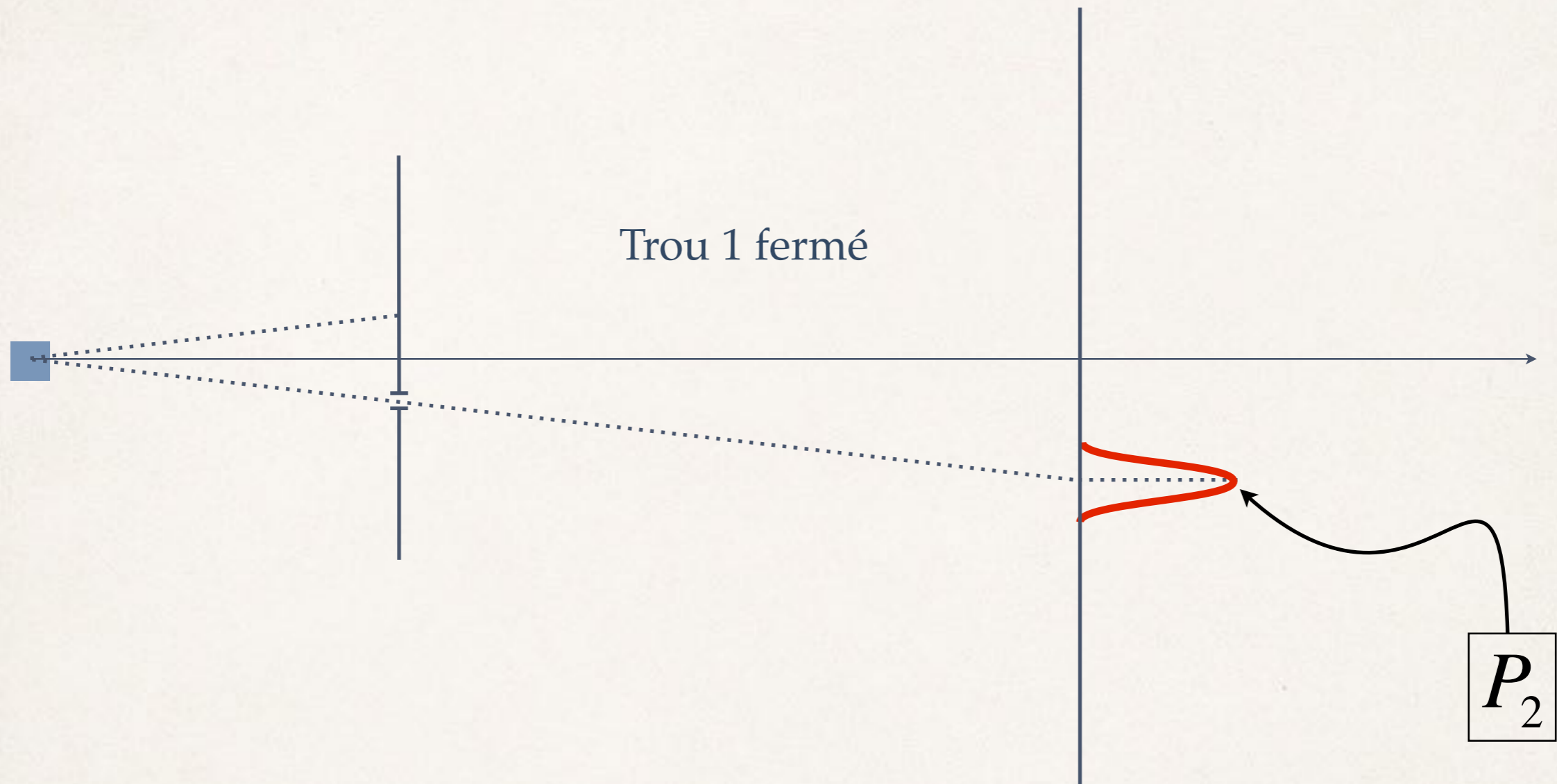
Si je ferme un trou je sais par quel trou sera passée la balle de fusil.



On obtient une unique bosse dans la direction géométrique du trou ouvert

Rq : en réalité la bosse serait même un pic infiniment fin : delta de Dirac $\frac{\lambda D}{b} \rightarrow 0$

Si je ferme un trou je sais par quel trou sera passée la balle de fusil.

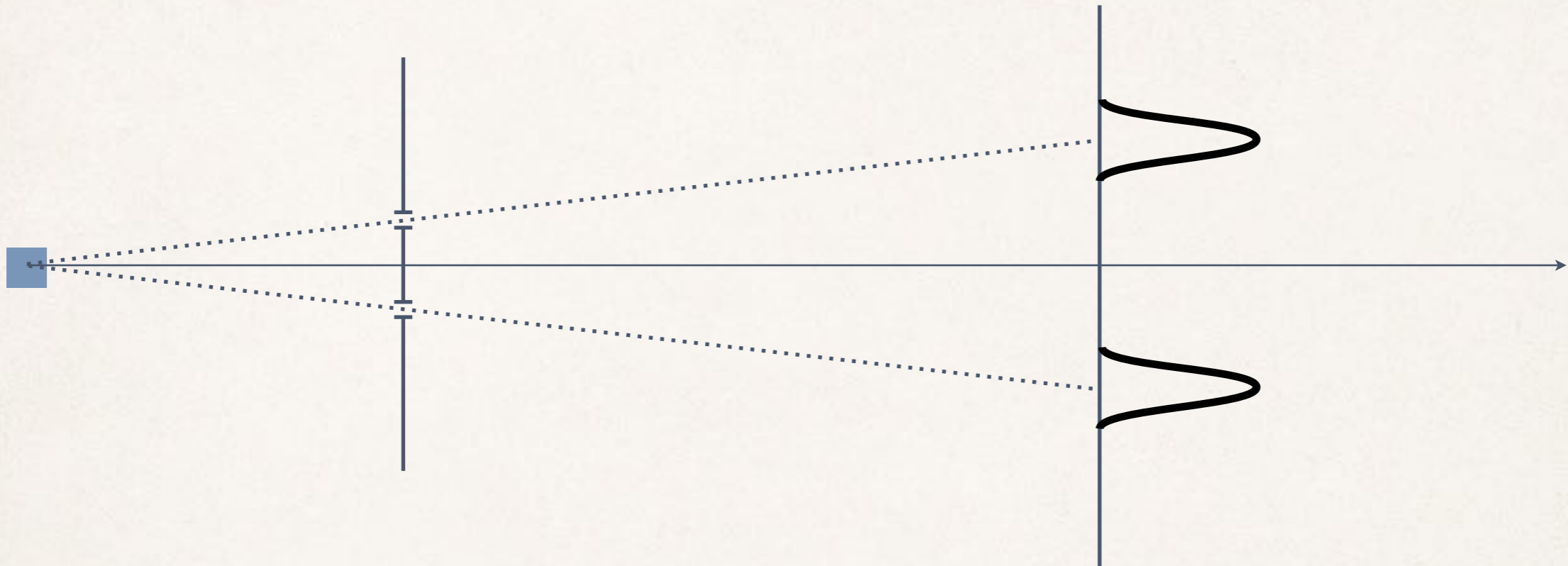


On obtient une unique bosse dans la direction géométrique du trou ouvert

Rq : en réalité la bosse serait même un pic infiniment fin : delta de Dirac $\frac{\lambda D}{b} \rightarrow 0$

La distribution de probabilité totale est la somme des probabilités conditionnées pour que la balle passe par le trou 1 ou le trou 2

$$P = P_1 + P_2$$



Les deux bosses ne se recouvrent pas du tout => pas d'interférence !

Les deux expériences sont indépendantes

On a donc deux bosses qui ne sont autres que la superposition géométrique des résultats obtenus individuellement :

Résultat logique
de physique classique

Interprétation ondulatoire de l'expérience des fentes de Young avec des balles de fusil :

ODG :

$$\lambda_{Balle} = \frac{h}{P} \ll a$$

La balle de fusil est très facilement localisable :

$$\lambda_{Balle} \ll L_{balle} < a$$

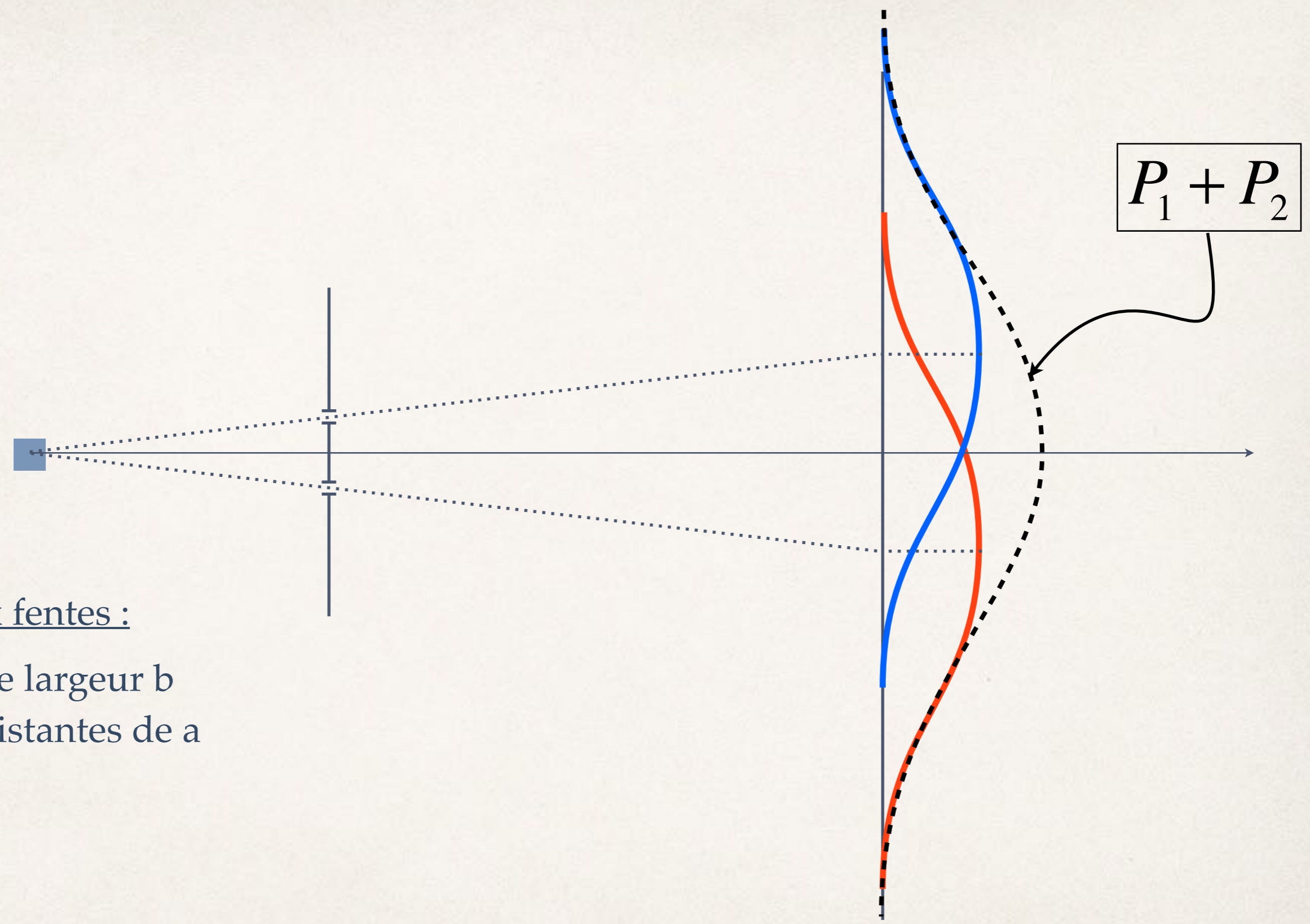
De même, on peut savoir si la balle est passée par un trou ou l'autre, sans perturber l'expérience et on observe toujours que la balle passe par un trou ou par l'autre.

=> Il n'y a donc pas d'interférence.

β - Expérience des fentes de Young avec des photons :

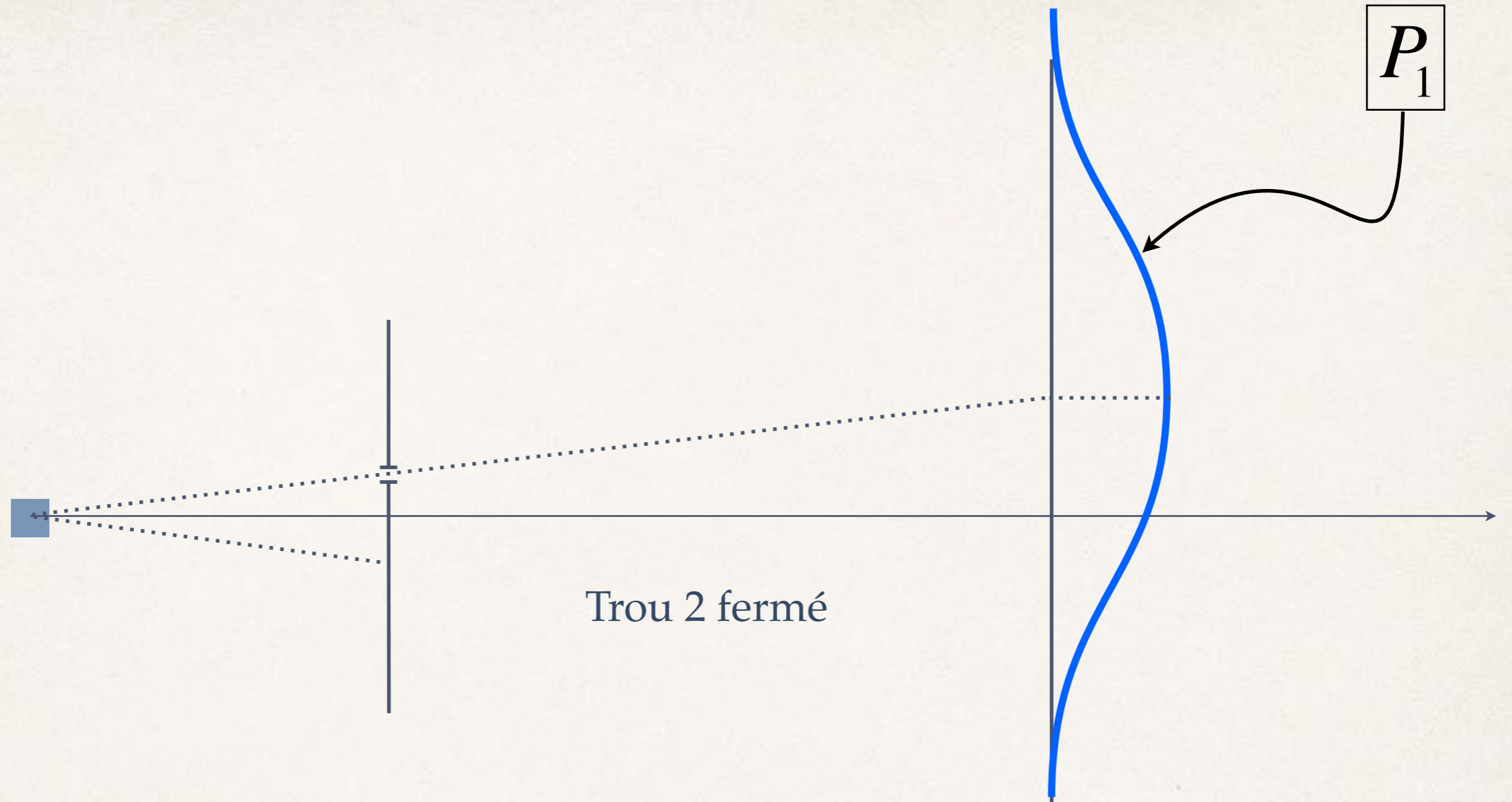
Deux fentes :

- de largeur b
- distantes de a



Les bosses se sont élargies car les longueurs d'ondes sont bcp. plus grandes.

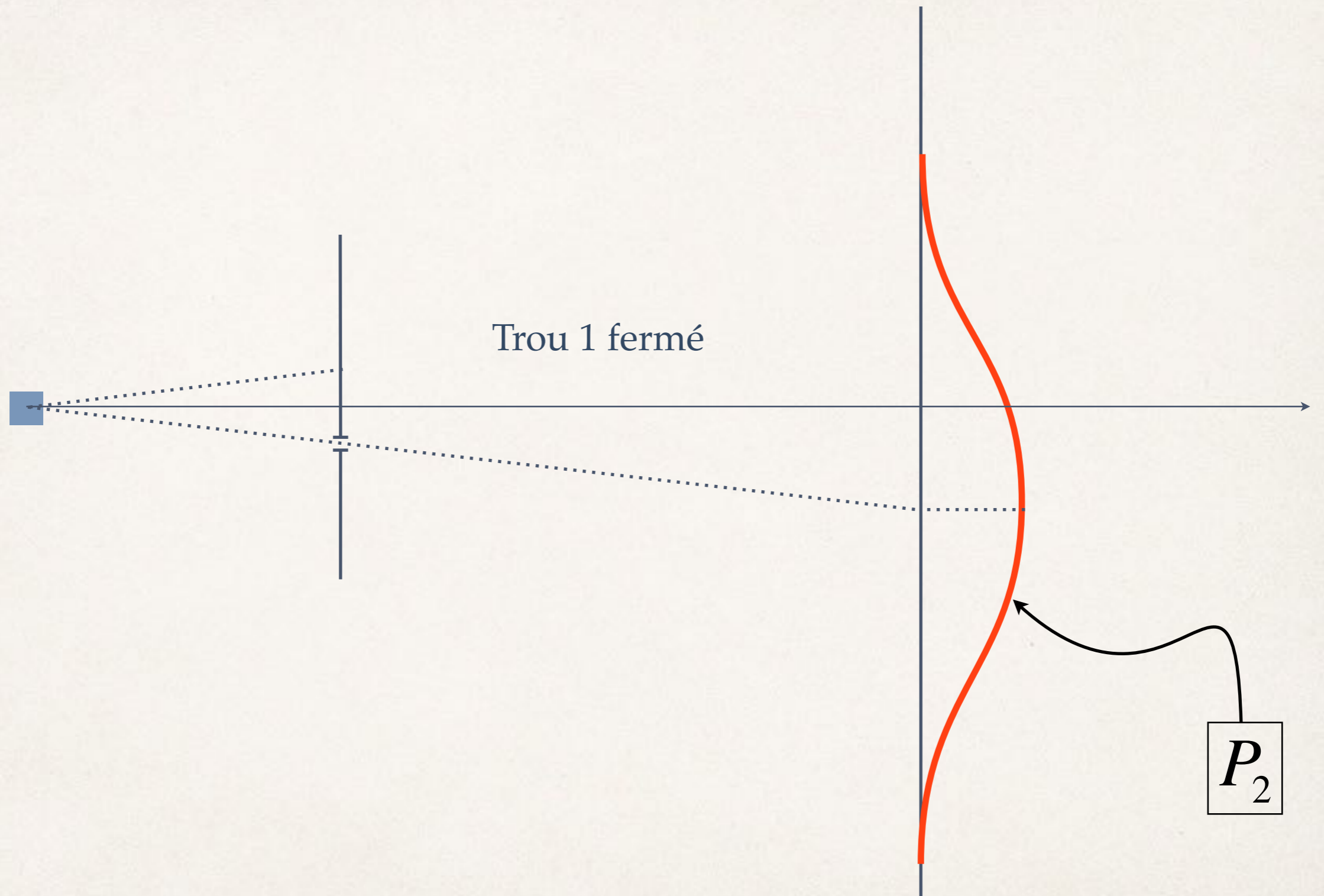
Si je ferme un trou je sais par quel trou sera passé le photon.



La bosse a une taille : $L \sim \frac{\lambda D}{b}$ avec b la largeur de la fente

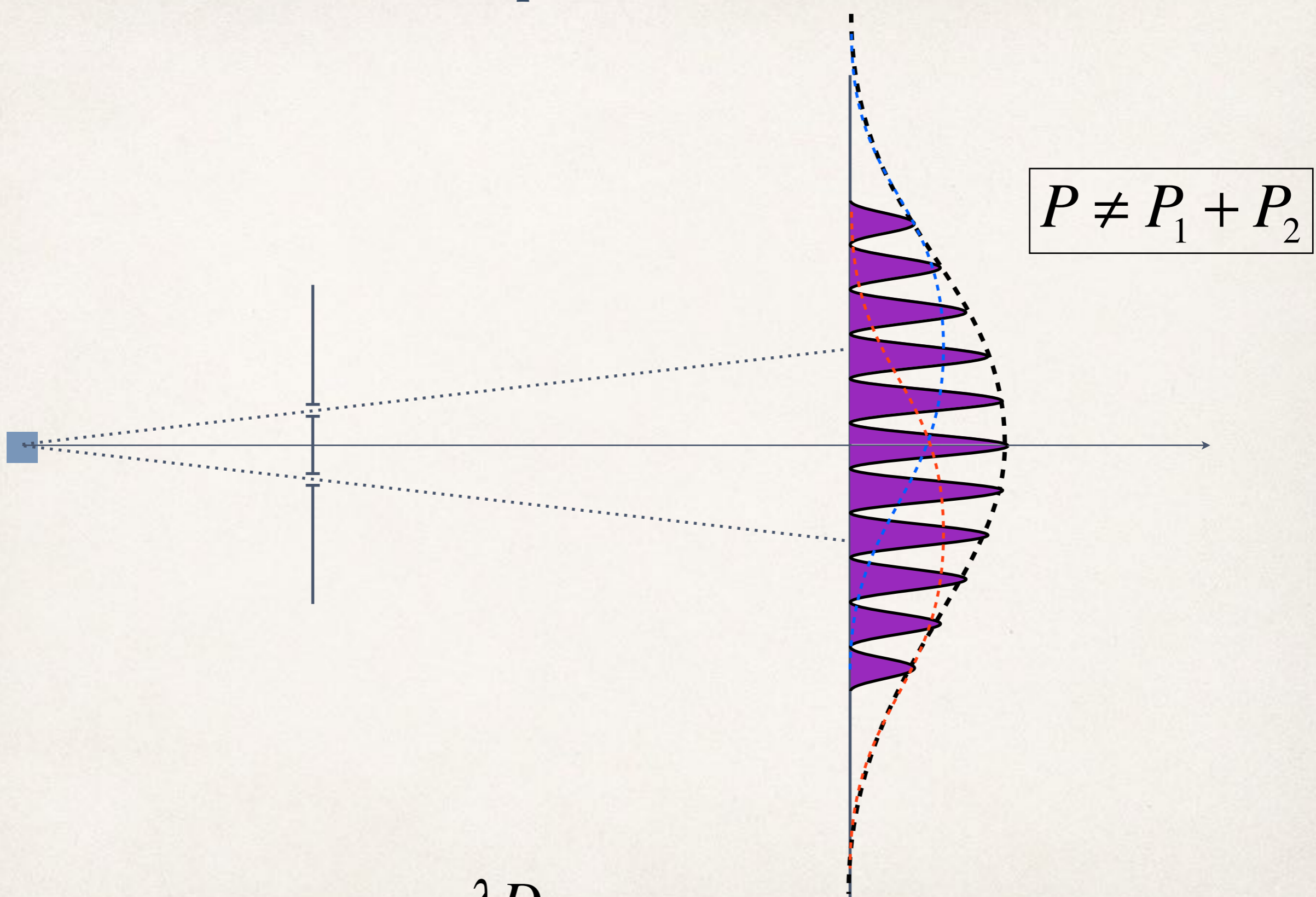
On obtient une unique bosse de diffraction autour du centre géométrique

Si je ferme un trou je sais par quel trou sera passé le photon.



On obtient une unique bosse de diffraction autour du centre géométrique

La distribution de probabilité n'est pas la somme des probabilités individuelles : **On observe un phénomène d'interférence !!!**



L'interfrange vaut : $I = \frac{\lambda D}{a}$

avec a la distance entre les fentes

Interprétation ondulatoire de l'expérience des fentes de Young avec des photons :

ODG :

$$\lambda_{\text{photon}} = \frac{h}{P} \sim a$$

Le photon n'est pas parfaitement localisable à l'échelle de la fente mais se trouve dans une région qui englobe les deux fentes :

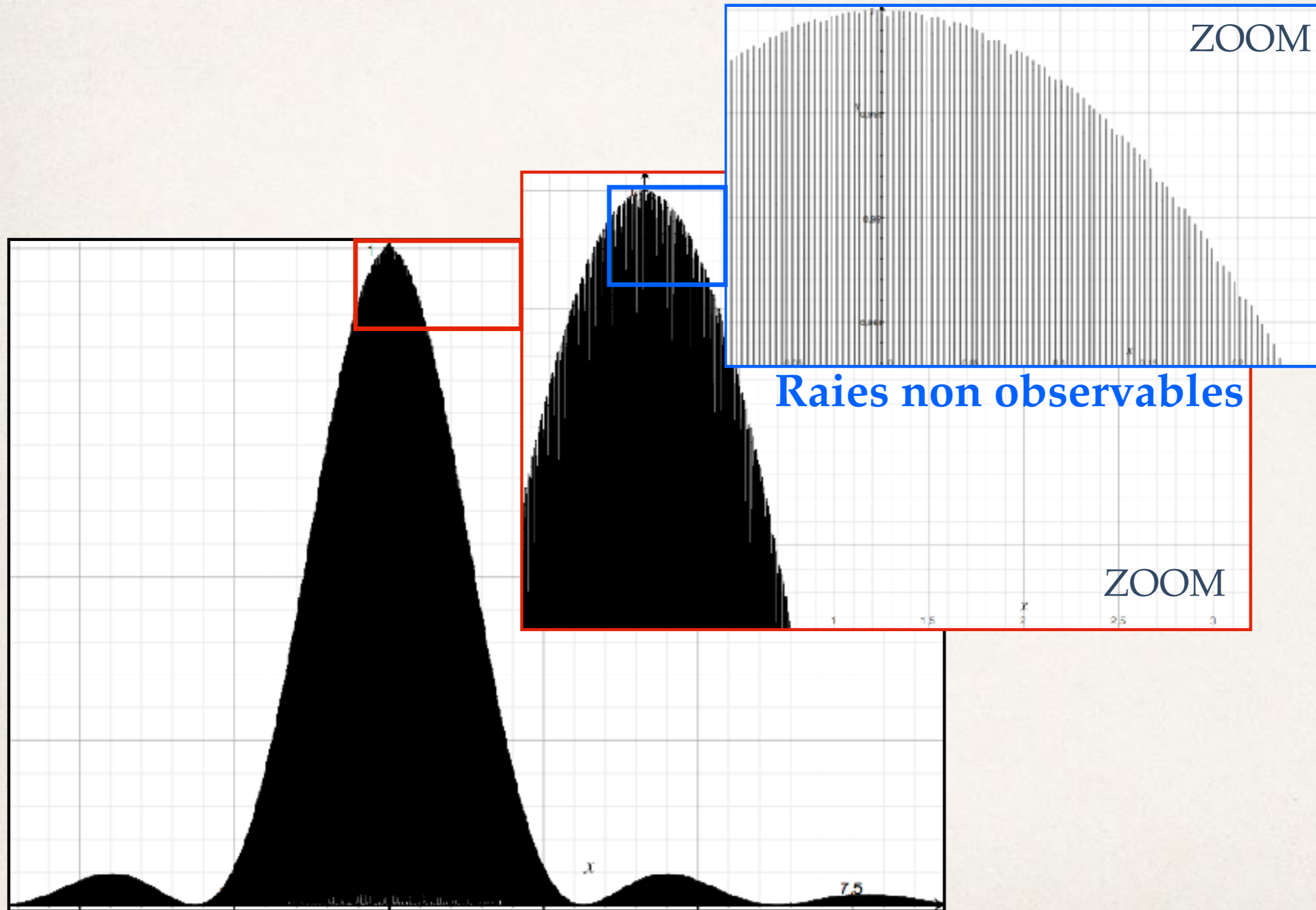
- On ne peut pas savoir si il est passé par un trou ou l'autre sans affecter l'expérience :
Toute tentative de détection modifiera le photon !
- Le photon est passé à travers les deux trous à la manière d'une onde.

Comment déterminer la loi de probabilité dans le cadre de la mécanique quantique ?

Interprétation en terme de fonction d'onde :

Passage du classique au quantique...

Que se passe-t-il dans le cas d'une balle de fusil ?



Les interférences ont lieu sur des échelles inaccessibles à l'expérimentation !

C'est pour cela que l'on utilise des atomes ultrafroids

Interprétation en terme de fonction d'onde :

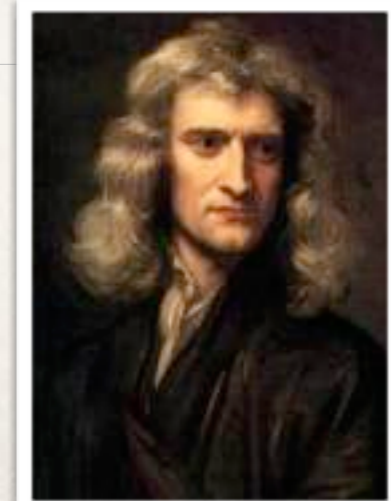
??? Onde ou Particule ???

Résumons

Le phénomène s'explique par une nature

	Ondulatoire	particulaire
Reflection	oui ✓✓	oui ✓...
Refraction		
Interférence	oui ✓	non ✗
Diffraction		
Polarisation		
Effet photoelectrique		
Diffraction atomes / moélcules		

Huygens

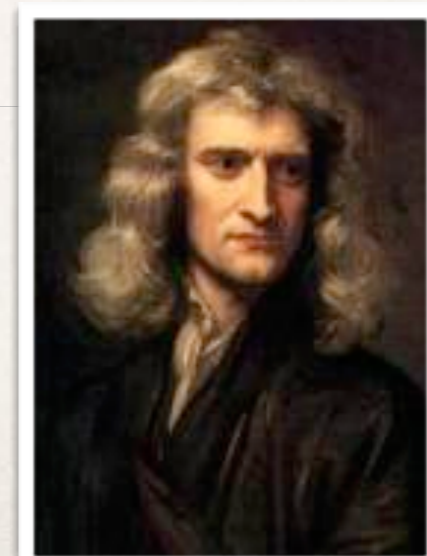


Newton

Le phénomène s'explique par une nature

	Ondulatoire	particulaire
Reflection Refraction	oui ✓✓	oui ✓✓...
Interférence	oui ✓	non ✗
Diffraction	oui ✓	non ✗
Polarisation	oui ✓	non ✗
Effet photoelectrique		
Diffraction atomes / moélcules		

Huygens



Newton

Le phénomène s'explique par une nature

Ondulatoire particulière

Reflection
Refraction

oui ✓✓

oui ✓✓...

Interférence

oui ✓

non ✗

Diffraction

oui ✓

non ✗

Polarisation

oui ✓

non ✗

Effet photoelectrique

✗ NON ✗

✓ OUI ✓

Diffraction atomes/
moécules

✓ OUI-NON ✗

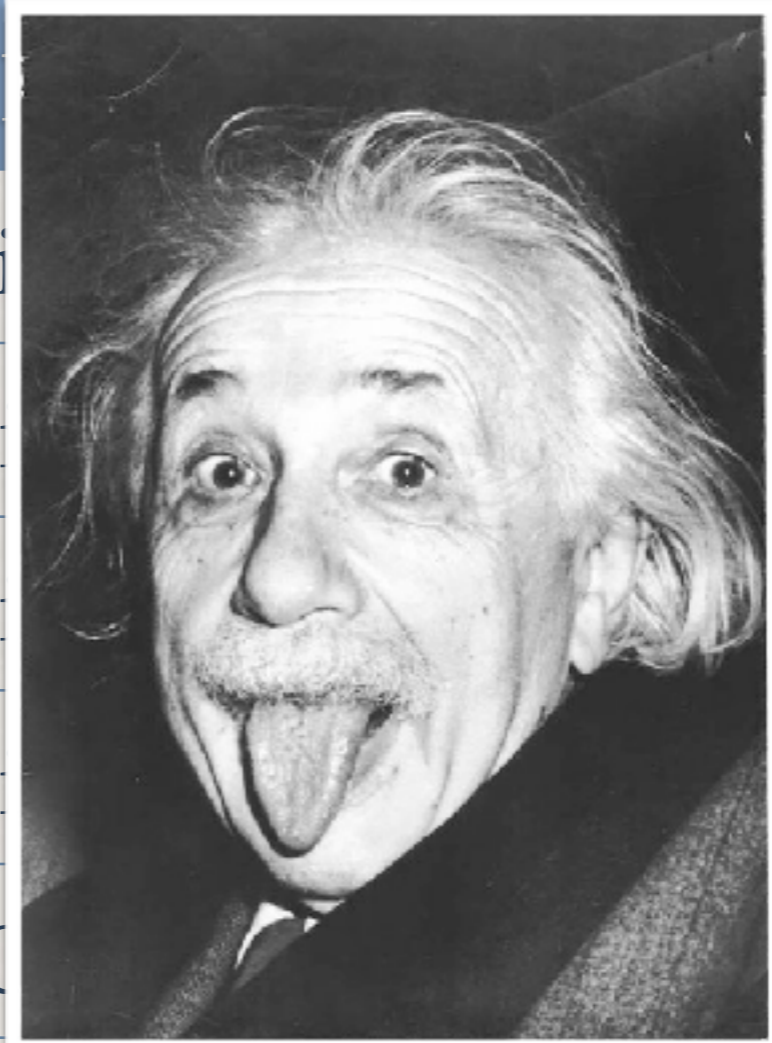
✓ OUI-NON ✗



«Nuytens»

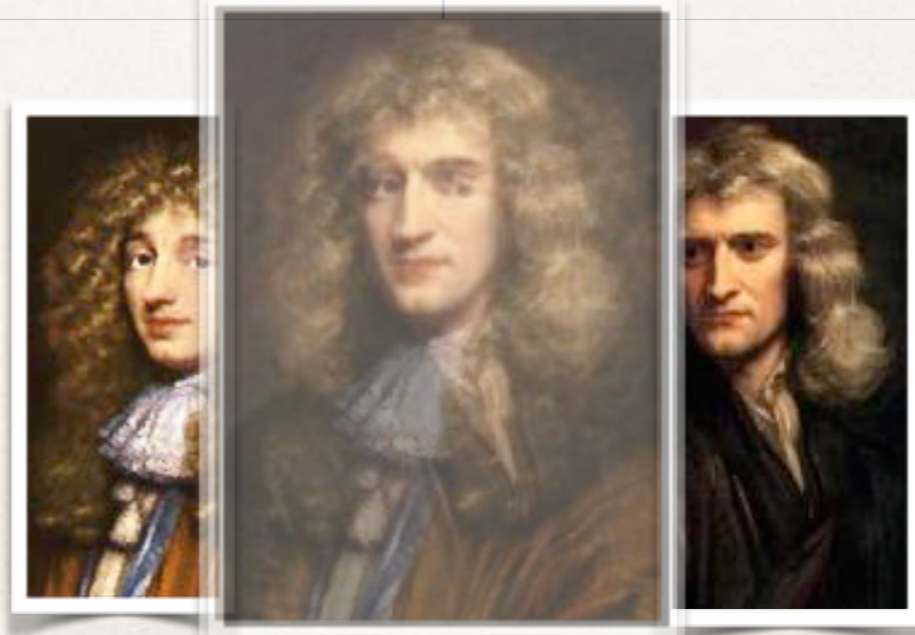
Le phénomène s'explique par une nature

	Ondulation	Quantique	Corpusculaire
Reflection	OUI		✓✓...
Refraction	OUI		
Interférence	OUI		✗
Diffraction	OUI		✗
Polarisation	OUI		✗
Effet photoelectrique	✗ NON		OUI ✓
Diffraction atomes/moécules	✓ OUI-NON ✗		✓ OUI-NON ✗



On ne peut pas choisir l'un ou l'autre

Il faut les deux !



3 - Fonctions d'ondes

Formalisme de Schrödinger pour la mécanique quantique

L'idée est de reprendre le formalisme en complexe de l'optique ondulatoire et des ondes en général, puisqu'il fonctionne pour décrire les interférences.

O2R

Définition :

On associe donc à toute particule une fonction d'onde complexe : $\underline{\psi}(x,t)$

Rq : on parle également d'amplitude de probabilité, par opposition à la probabilité elle-même.

Attention : le choix d'un complexe n'est plus du tout un artifice de calcul mais sa véritable nature.

- Comme toute onde, la fonction d'onde est caractérisée, en tout point et à chaque instant, par son module et sa phase. Elle peut être représentée dans un diagramme de Fresnel.

- La linéarité des équations de la mécanique quantique va permettre une fois de plus, de **superposer les fonctions d'ondes pour obtenir l'amplitude de probabilité totale**.

Distribution de probabilité

La probabilité de détection d'un photon est proportionnelle à l'intensité reçue, obtenue en prenant le module au carré de l'onde totale en un point. [cf SP3 Interférences]

C'est à nouveau par analogie avec l'optique ondulatoire que l'on définit la probabilité de détection d'une particule représentée par la fonction d'onde Ψ .

Définition :

La probabilité de détection de la particule entre x et $x + dx$, est à l'instant t , proportionnelle au module au carré de la fonction d'onde complexe :

$$dP(x,t) = \kappa \left| \underline{\psi}(x,t) \right|^2 dx$$

$|\Psi|^2$ est donc la densité de probabilité de détection de la particule en x à l'instant t

RQ : κ s'obtient par renormalisation de la distribution de probabilité : $\int_{-\infty}^{+\infty} dP = 1$

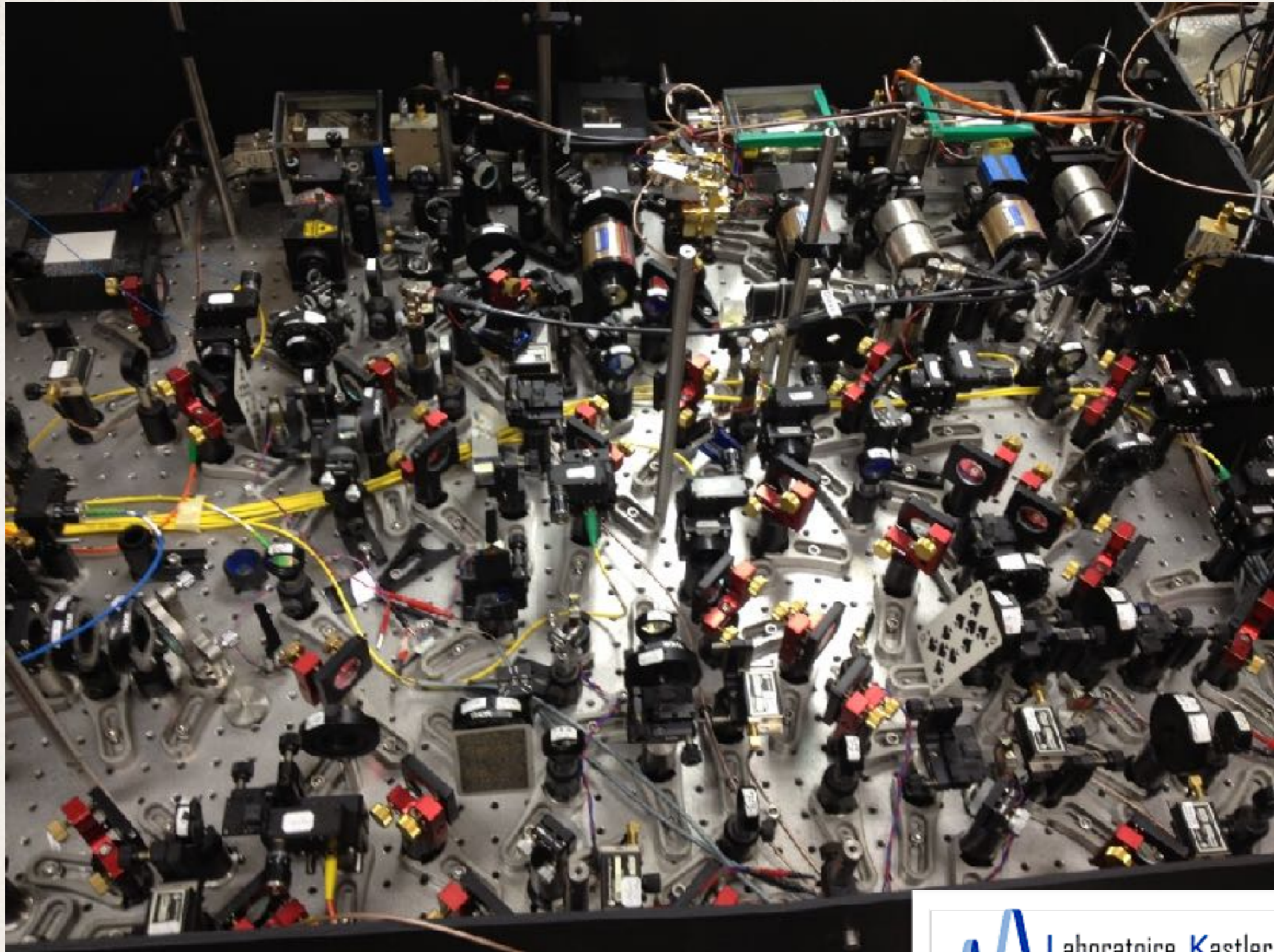
Retour sur l'expérience de Young

Pourvu que l'on puisse assimiler notre particule à un champ scalaire isolé de l'extérieur, le formalisme est le même pour :

O2R

- des photons [pas de polarisation impliquée]
- des électrons [pas de spin impliqué]
- des atomes [pas de spin ou de moment cinétique impliqués,
[pas de changement de niveau d'énergie, c-à-d :
[pas de chocs => atomes ultrafroids donc sous un vide poussé]
[pas d'absorption/émission de rayonnement => restent dans l'état fondamental]

Hummm Pas si facile ce TP



Laboratoire Kastler-Brossel 3 fois prix Nobel

ens-Paris

Notre particule étant une onde, elle se propage depuis la source jusqu'aux deux fentes, où elle arrive par symétrie avec la même phase et la même amplitude.

On peut alors considérer les deux fentes comme deux sources émettrices de deux fonctions d'ondes $\Psi_1(x,t)$ et $\Psi_2(x,t)$ correspondant à deux états quantiques distincts.

Interprétation : $\Psi_1(x,t)$ -> la particule est passée par le trou 1
 $\Psi_2(x,t)$ -> la particule est passée par le trou 2

La fonction d'onde totale en M sur l'écran $\Psi(M,t)$ est la somme algébrique des fonctions d'ondes en M :

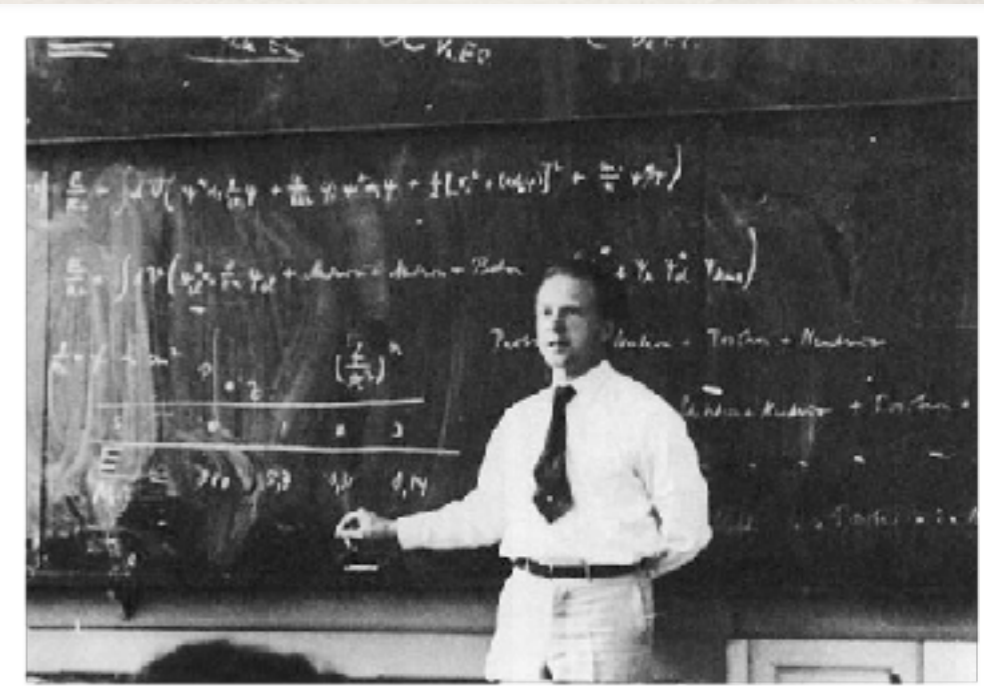
$$\underline{\psi}(M, t) = \underline{\psi}_1(M, t) + \underline{\psi}_2(M, t)$$

La fonction d'onde totale est la superposition de deux états quantiques élémentaires :

 particule passant par le trou 1 + particule passant par le trou 2

4 - Inégalité de Heisenberg

Principe d'incertitude



Werner Heisenberg [1901-1976]

Énoncé historique :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = -i\hbar \hat{I}$$

On ne peut pas mesurer simultanément la position et la vitesse d'une particule :

- La mesure de la position modifierait la vitesse (norme et direction)
- La mesure de la vitesse affecterait la position (trajectoire déviée)

La relation d'Heisenberg nous donne le lien entre l'incertitude de position et l'incertitude de quantité de mouvement d'un corpuscule.

Application qualitative à la stabilité des atomes :

En physique classique : une charge accélérée rayonne de l'énergie !

Conséquence :

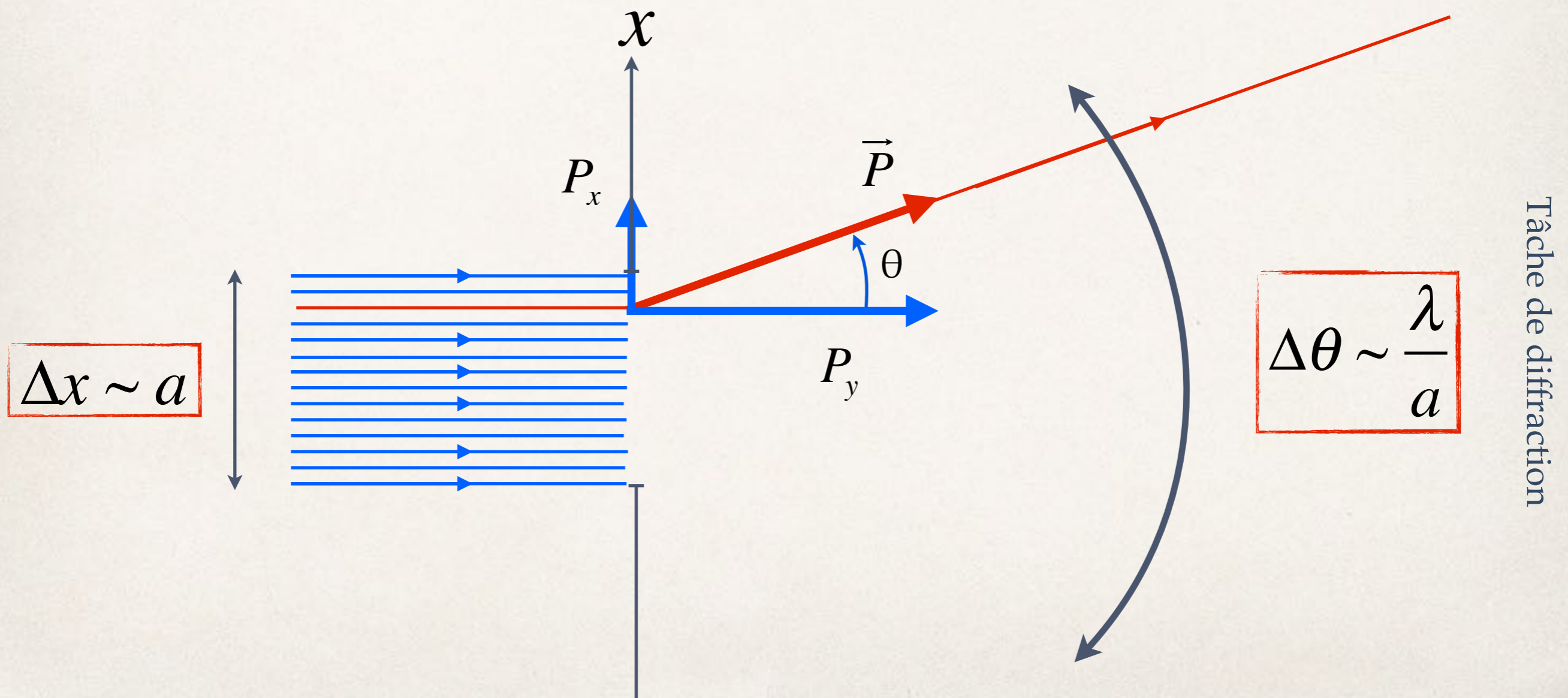
Retour sur la diffraction de la lumière par une fente :

- On ne sait pas où le photon va passer :

$$\Delta x \sim a$$

- On ne sait pas dans quelle direction il va repartir :

$$\Delta P_x \sim ?$$



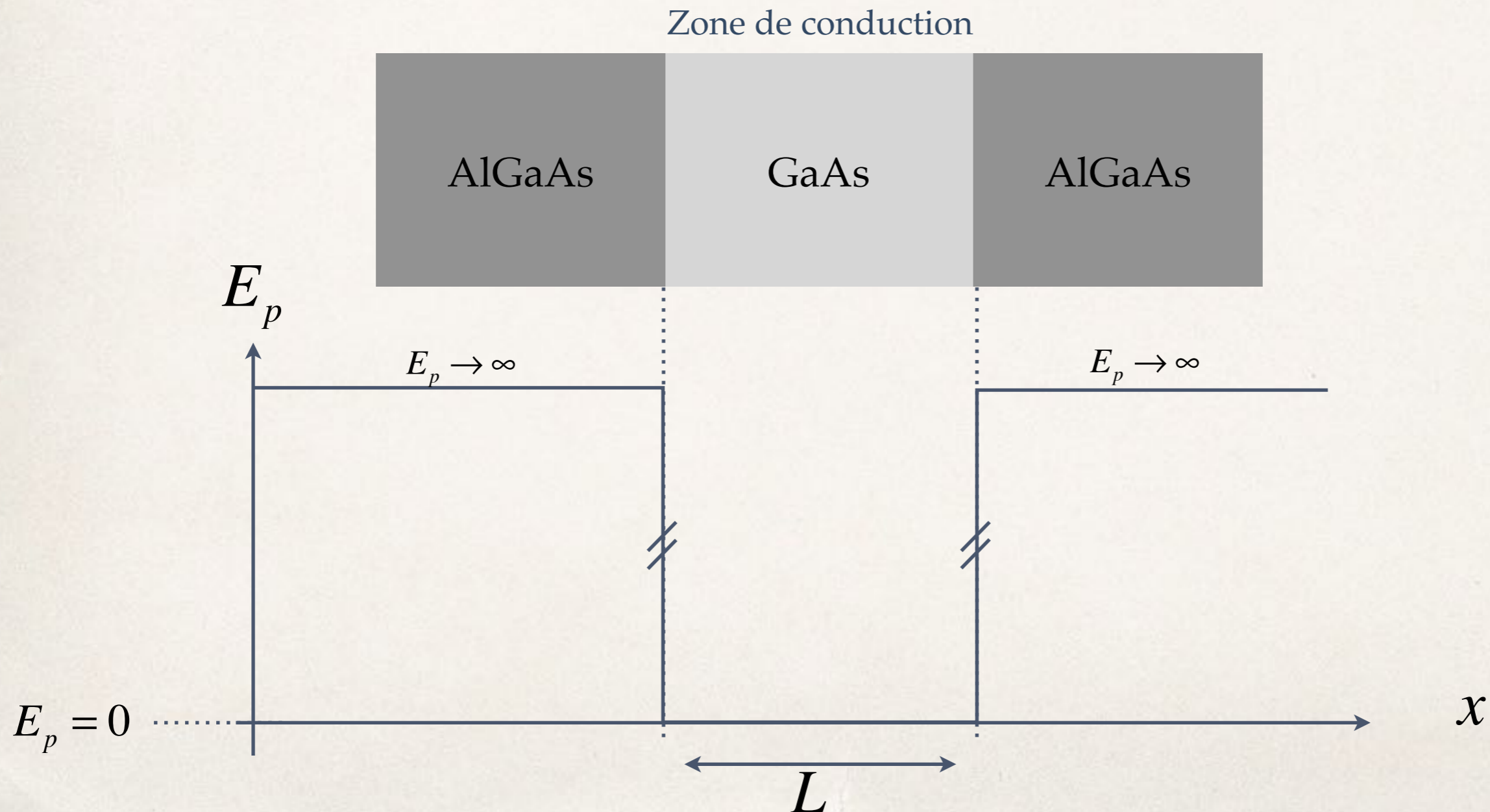
Version temporelle :

Conséquence sur la durée d'un train d'onde.

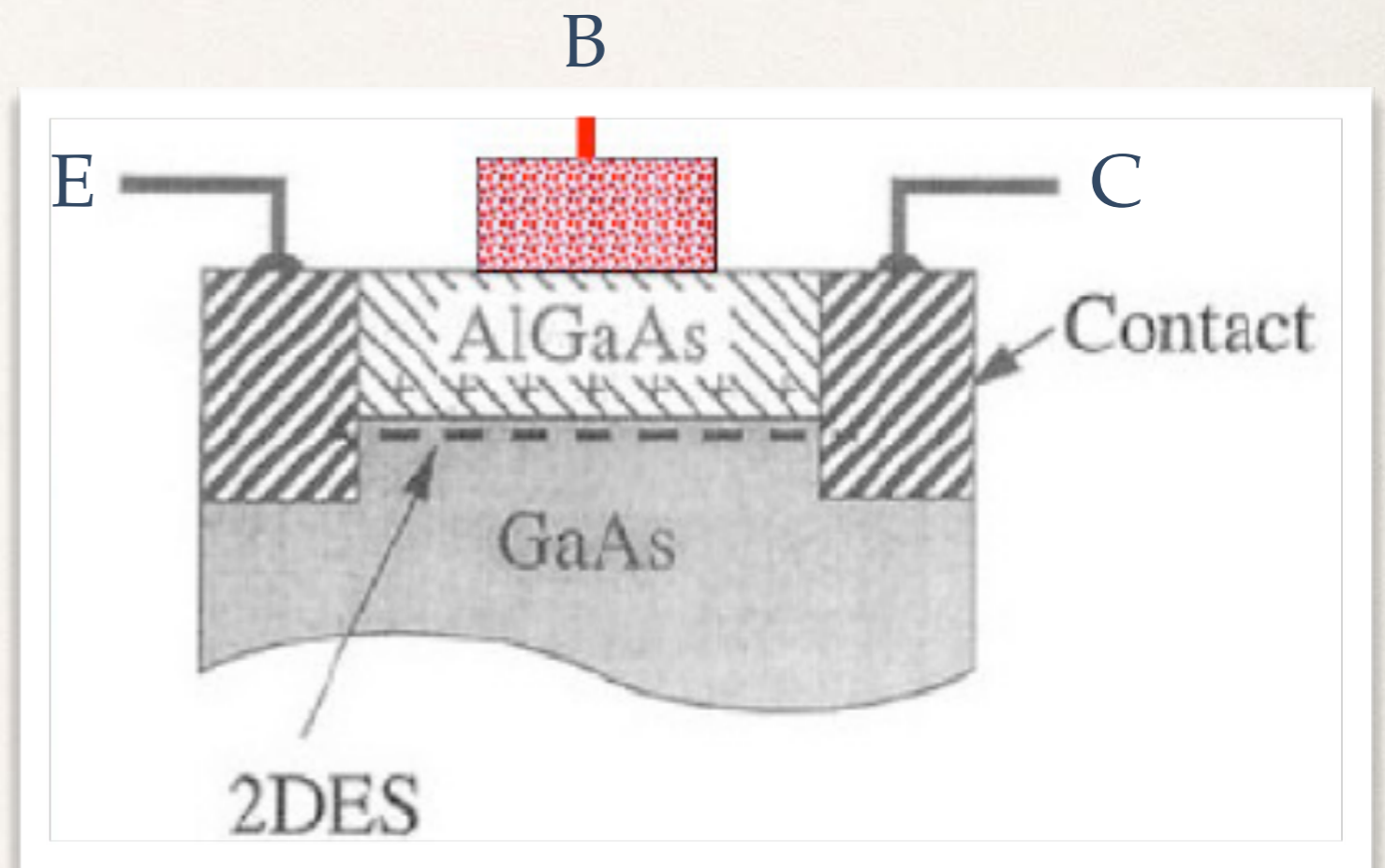
4 - Applications : Quantification de l'énergie

Réalisation concrète : Semi-conducteur

Un électron de conduction peut être confiné spatialement au sein d'arséniure de Gallium (GaAs) limitée à gauche et à droite par de l'arséniure de gallium et aluminium (AlGaAs).



Rq : Ce type de dopage est utilisé plus concrètement pour réaliser des transistors.



Calcul des énergies associées aux solutions stationnaires de l'équation de Schroedinger :

Applications :

Confinement et énergie cinétique minimale

Application :

Energie minimale de l'OH