

# MÉCANIQUE QUANTIQUE

---  
APPROCHES DOCUMENTAIRES



## I Nécessite de la notion de grain de lumière : Le photon

L'effet photoélectrique

Il s'agit ici pour nous de comprendre l'article suivant [en anglais](#) sur l'histoire de la découverte et l'interprétation de l'effet photoélectrique et de refaire les expériences correspondantes avec une application numérique réaliste. Les illustrations sont extraites des articles scientifiques originaux.

La théorie d'Einstein pour l'effet photoélectrique y est développée [Elle lui vaudra le prix Nobel] ainsi que les mesures de Millikan permettant d'en déduire la constante de Planck.

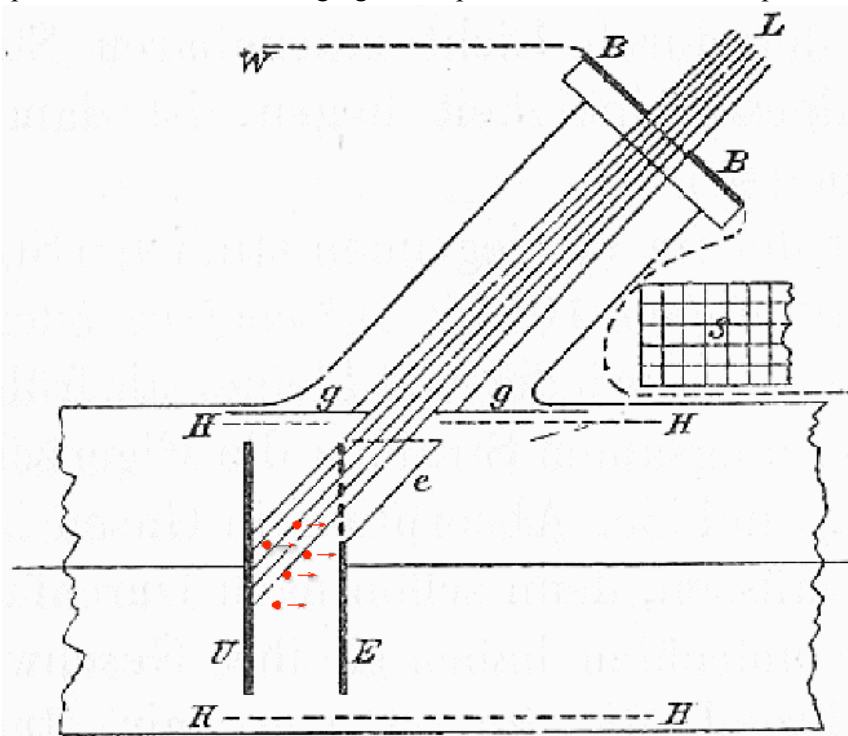
C'est cette théorie qui a véritablement donné naissance à la mécanique quantique prouvant que le rayonnement est bien quantifié alors que Planck lui même a toujours contesté sa propre quantification de la lumière dans sa théorie du rayonnement d'un corps noir, pourtant antérieure. Il considérait la quantification comme un artifice mathématique pour pouvoir calculer le spectre de puissance.

L'université de Toronto propose une appli Java [à Télécharger] permettant de refaire numériquement l'expérience de Lenard sur l'effet photoélectrique en jouant sur les différents paramètres de l'expérience.

### Effet photoélectrique

At the turn of the century, physicists who experimented with electricity had noticed something about the interaction of light, metals, and electric current. One of the most thorough accounts of such experiments was written by Lenard, in *Annalen der Physik*, vol. 4, p. 149 (1902) [written in German, in which I am not fluent, alas...].

One of Lenard's experiments involved shining light on a piece of metal which was part of a broken circuit:



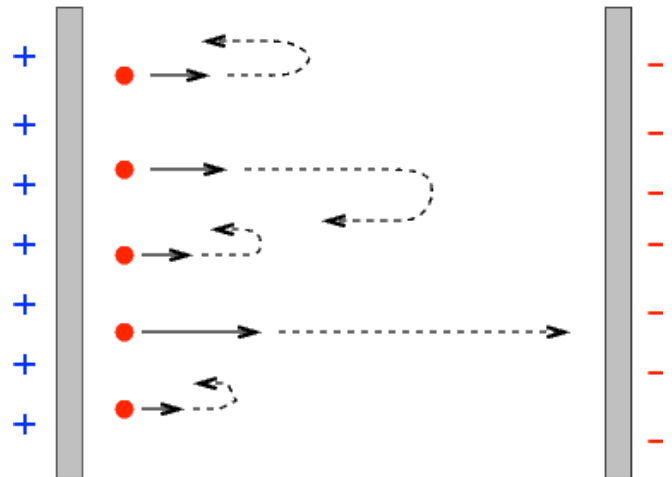
In this figure, a circuit connects metal plates U and E, which are separated in a vacuum by a small gap. One can set a voltage across the plates by modifying the circuit. Light from source L shines onto plate U.

The light waves may knock some electrons out of the plate U, causing them to fly across to the other plate E. These electrons complete the circuit. One can use an amper-meter to measure precisely how many electrons jump from one plate to the other. This current of electrons produced by light is called the photoelectric effect.

Now, if one arranges the voltage between the plates so that the "source" plate U is negative, and the "receptor" plate E is positive, the electrons are pushed away from the source and towards the receptor -- which helps the current to flow. But if one makes the "source" positive, and the "receptor" negative, then the voltage across the plates pushes the electrons BACK to the source [see the following figure].

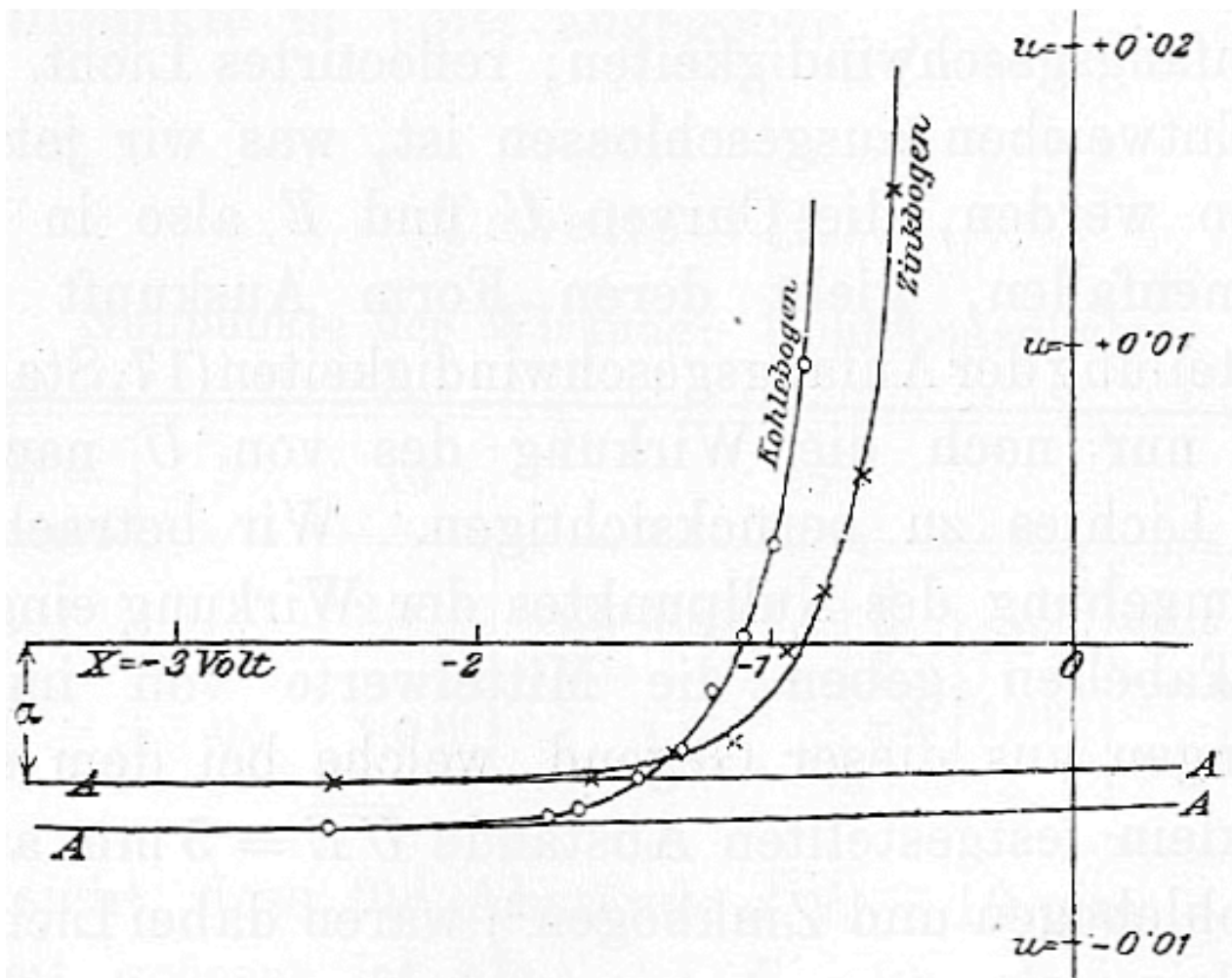
If one starts with zero voltage across the plates, then some current will flow when the light is turned on : electrons knocked off the "source" plate with any speed will eventually reach the "target" plate. But if one gradually increases the voltage difference, fewer and fewer electrons will make the journey, and eventually the current disappears.

**a - Simulation :** Try this experiments with the Java Simulation and comment the electrons' motions.



**In this next figure from Lenard's paper :**

The potential voltage is plotted on the x axis (Volts), against the current (A) on the y axis. There is a small offset from zero current due to Lenard's apparatus.



What's going on ?

As each electron moves from the positive "source" plate towards the "receptor" plate, it must work against the electric field. It exchanges kinetic energy (K) for electric potential energy (energy conservation). At some point, it loses all its kinetic energy and thus stops moving forward.

Now, when the electrons are knocked free, some have a lot of kinetic energy, others only a little, depending on the friction during the extraction process through the metal. [Electrons can be either on the surface or deep inside the metal plate]. The ones with the most kinetic energy are the last ones to stop reaching the "receptor" as we «increase» the negative voltage difference that pull back the electrons.

We can calculate this MAXIMUM kinetic energy K among the photo-electrons :  $K_{\max} = qV$

From Lenard plots we note that  $I = 0$  for  $U \approx -1V \Rightarrow K_{\max} = -eU = 1eV$

**b - Simulation :** Try this experiment with the Java Simulation and find  $K_{\max}$  for different setup of the experiment. It is constant for any given material or what else does it depend on ?

### The wave theory fails to explain the observations

Now, one might try to explain this photoelectric effect with waves of light : light waves impinge on the source plate. They give energy to electrons on the plate. The electrons fly off the source plate to the receptor. The wave theory predicts several things :

1. The more intense the light, the more energy the electrons will have when they fly off the plate.
2. If the light is very feeble, one may have to expose the source plate for several seconds or minutes until enough waves strike it to knock electrons loose.
3. Waves of any frequency ought to knock electrons free.

Careful measurements in the lab, however, showed that these predictions were wrong, wrong, and wrong !

1. The energy of the electrons does NOT depend on the intensity of the light.
2. The electrons always appear AS SOON AS the light reaches the plate [though a feeble light produces only a few].
3. NO electrons are produced if the frequency of the light waves is below a critical value.

### Einstein suggested a solution :

Planck's explanation of the blackbody spectrum was published in 1900. Five years later, Einstein published a paper (in the very same issue as his famous paper on relativity) which used Planck's idea of quanta to explain the photoelectric effect's quirks. He wrote :

«In accordance with the assumption to be considered here, the energy of a light ray spreading out from a point source is not continuously distributed over an increasing space, but consists of a finite number of energy quanta which are localized at points in space, which move without dividing, and which can only be produced and absorbed as complete units.»

In other words, Einstein proposed that light behaved not like a wave, but like a particle : the photon [a word coined in 1926 by G. N. Lewis].

### How does this explain the observed photoelectric phenomena ?

1. **The energy of the electrons does NOT depend on the intensity of the light :**
  - ☉ Each electron absorbs only one photon at a time. If the absorbed energy is large enough to expel the electron from the metal, it leaves. If not, the electron dissipates its energy in collisions with nearby electrons and atoms before it can absorb another photon.

☉ And yes, this implies that the time it takes for an electron to lose the energy gained in one absorption is much smaller than the interval between absorptions.  
Under ordinary circumstances, it is....

- 2. The electrons always appear AS SOON AS the light reaches the plate :**  
[though a feeble light produces only a few].

☉ As soon as a single photon containing sufficient energy strikes the source plate, it will knock an electron free. There is no need to wait for multiple waves to build up enough energy.

- 3. NO electrons are produced if the frequency of the light waves is below a critical value.**

☉ Since the energy of each photon is  $E = h\nu$  below some critical frequency, no photon has enough energy to knock an electron free.

Moreover, Einstein's theory was able to make one very strong prediction : the maximum energy of ejected electrons should increase linearly with frequency of the applied light. Again quoting Einstein :

«We shall assume that in leaving the body, each electron must perform an amount of work  $W$  characteristic of the substance. The ejected electrons leaving the body with the largest normal velocity will be those that were [located exactly on] the surface. The kinetic energy of such electrons is given by :  $K = h\nu - W$ . If the body is charged to a positive potential  $V_0$  and is surrounded by conductors at zero potential, and if  $V_0$  is just large enough to prevent the loss of electricity, it follows that :

$$K = eV_0 = h\nu - W$$

where  $e$  is the electronic charge.»

**c - Simulation :** Check this result by plotting the electron energy against the frequency of the source.

**d - Modelization :** Show that the Einstein relation can be written as follows :  $K = h\nu - W = eV_0 = h(\nu - \nu_c)$

What is the interpretation of  $\nu_c$ , what does it depend on ?

## Einstein is proved right !

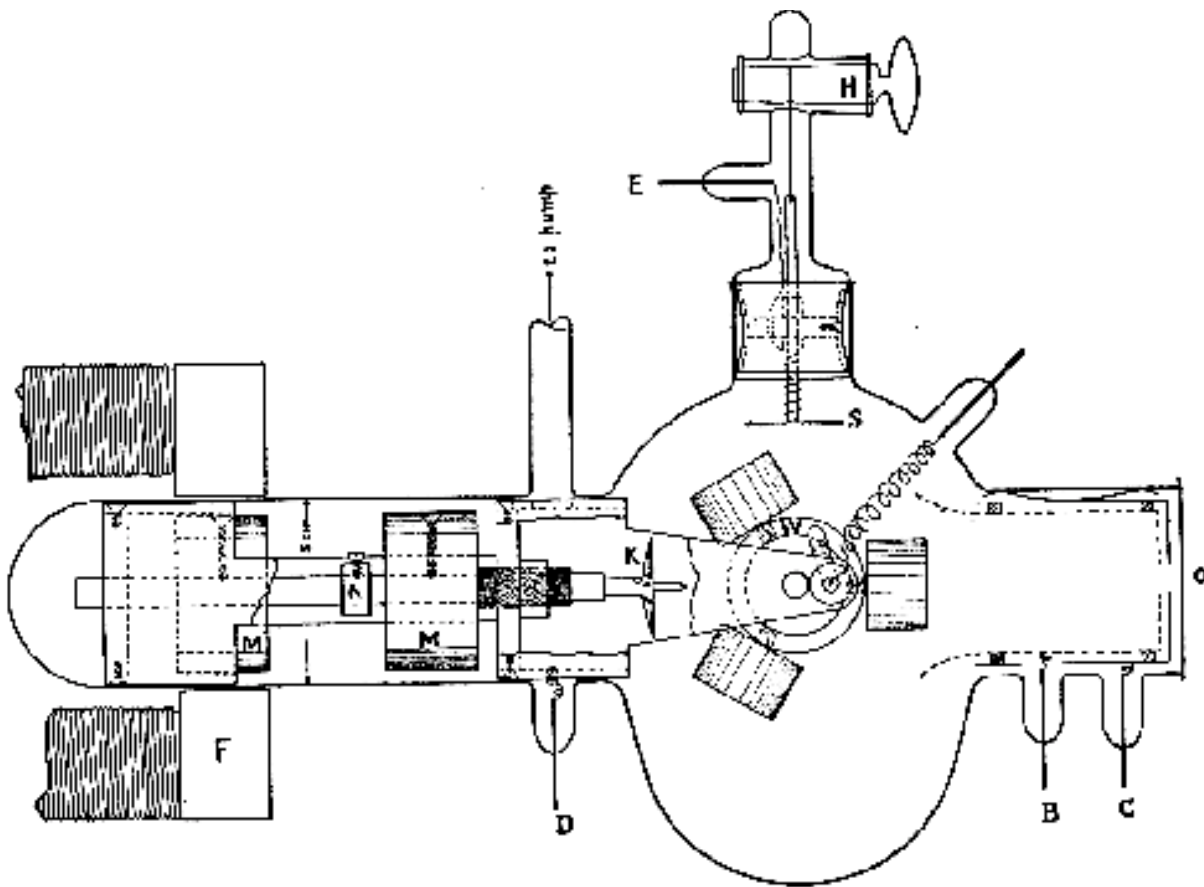
It seems simple enough to test this idea : shine light of various frequencies on a source plate, and measure the voltage  $V_0$  which just stops the current from flowing. And yet no one had ever tried it :

«At the time at which it was made, this prediction was as bold as the hypothesis which suggested it, for at that time there were no available experiments for determining anything about how the positive potential  $V$  necessary to apply to the illuminated electrode to stop the discharge of negative electrons from it under the influence of monochromatic light, varied with the frequency  $\nu$  of the light, or whether the quantity  $h$  to which Planck had already assigned a numerical value appeared at all in connection with photo-electric discharge.»

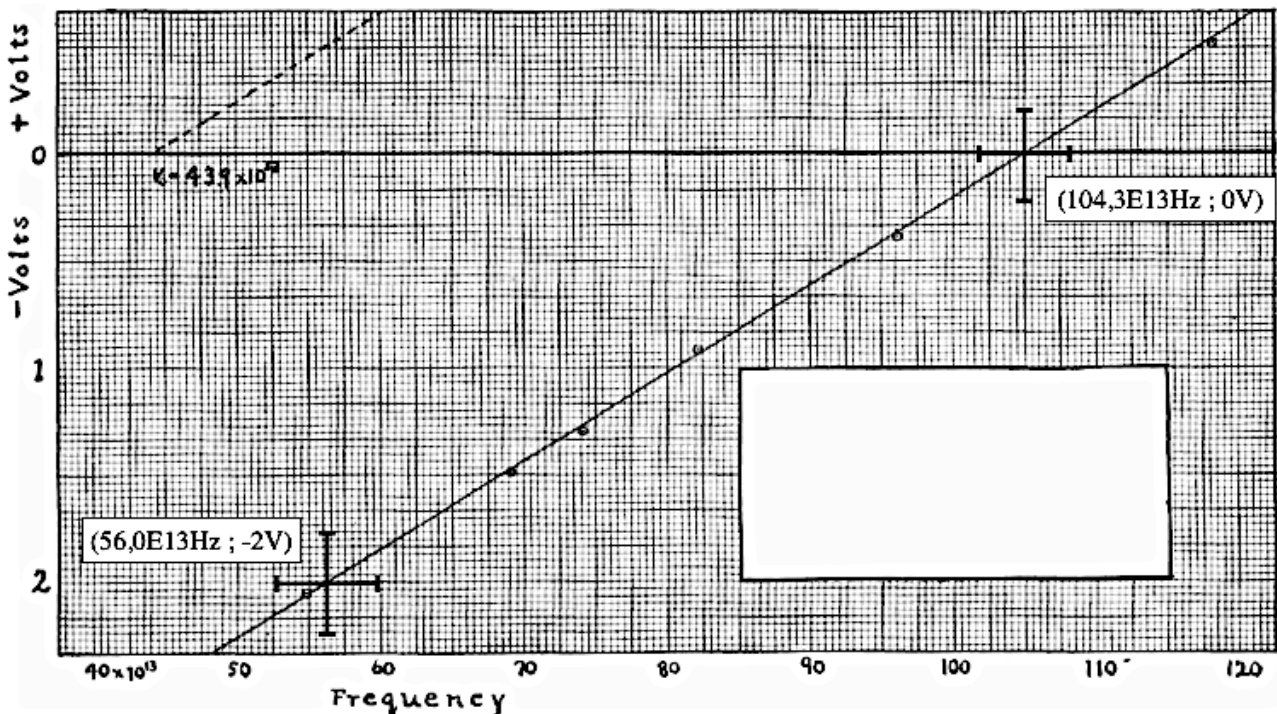
Millikan, The Electron, 1917

This was exactly what Robert Andrews Millikan (yes, that Millikan !) did. In an experiment performed in 1915 [and published in Physical Review, vol VII, p. 362 (1916)], he set up a system in which he could measure the photoelectric effect accurately from freshly-scraped surfaces of alkali metals. The glass vessel shown below was evacuated ; one of the metal samples mounted on the wheel  $W$  at the center was rotated to bring it next to the knife  $K$ , which scraped it clean; then the sample was rotated 180 degrees to face light shining through aperture  $O$ .





Millikan's data is shown below (I've wiped clean his calculation of the value of  $h$  from the graph). He shone light of various frequencies (plotted on the horizontal axis; note the factor of  $10^{13}$ ) on the metal plate, and determined the minimum voltage (plotted on the vertical axis) necessary to halt the induced current :



c - **Conclusion** : Does this plot confirm Einstein's theory & what in this plot proves it is correct ?

e - **Planck constant** : Measure the Planck constant  $h$  from this plot with the Einstein formula.

Rq : Millikan got the Nobel Prize in 1913 for his measure of the electronic charge  $e = 1.602E-19$ .



## II LES ONDES DE MATIÈRE

### DIFFRACTION D'ATOMES ULTRA-FROIDS

[Sources ESPCI] : «Ce texte est très largement inspiré des cours donnés par C. Cohen-Tannoudji au Collège de France lors des années 1977-78, 1988-89 et 1989-90».

### 1. L'EXPÉRIENCE DES TROUS D'YOUNG

#### 1.1 PRINCIPE

Cette expérience est bien connue de toute personne ayant un jour étudié un phénomène ondulatoire. Le principe est rappelé sur la figure 1.1. Une onde plane arrive sur un écran percé de 2 trous 1 et 2. On mesure l'intensité de l'onde sur un deuxième écran situé à une distance  $D$  du premier. L'amplitude en un point  $M$  de cet écran est la somme des amplitudes rayonnées par les deux trous, considérés comme des sources secondaires. En notant  $k = 2\pi/\lambda$  le vecteur d'onde, on trouve :

$$A(M) \propto e^{ikd_+} + e^{ikd_-} \quad \text{avec} \quad d_{\pm} = \sqrt{D^2 + \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2} \underset{a \ll D}{\approx} D \pm \frac{xa}{2D} + \dots \text{ordre 2} \quad (1.1)$$

Ce qui conduit à une modulation de l'intensité  $I(M) = |A(M)|^2$  en  $\cos^2\left(k \frac{xa}{2D}\right)$ ,

soit un interfrange égal à  $x_i = \frac{\lambda D}{a}$ .

[Reprendre à ce sujet le calcul complet du cours SP 3]

Le caractère paradoxal de cette expérience survient quand on associe une particule à l'onde. Dans un raisonnement classique, une particule passe par un trou ou par l'autre. On s'attend alors à ce que la figure obtenue sur le deuxième écran soit la somme des éclaircissements obtenus en bouchant un trou ou l'autre. Ce raisonnement classique ne rend pas compte du résultat obtenu expérimentalement avec des objets microscopiques, en particulier de la modulation avec la période  $x_i$  sur l'écran.

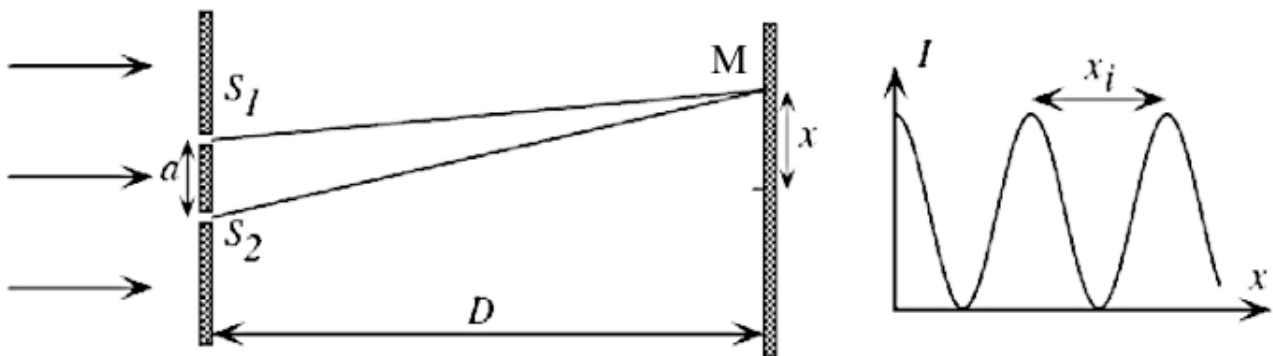


FIG 1.1 Expérience avec des trous de Young

Dans cette situation, le fait de permettre à la particule de passer par les deux trous à la fois diminue la probabilité d'atteindre certains points de l'écran, ce qui est évidemment paradoxal d'un point de vue classique.

**a - Plusieurs questions se posent alors naturellement :**

- ⊙ Jusqu'à quelle taille d'objet ce type d'expérience peut-il être mené ?
- ⊙ Que se passe-t-il si on enregistre, volontairement ou non, le chemin suivi dans cette expérience d'interférence ?
- ⊙ Cette interférence entre chemins quantiques peut-elle se généraliser à des chemins plus abstraits, dans un espace de Hilbert à plusieurs particules par exemple ?

## 1.2 EXPÉRIENCE DE YOUNG AVEC DES ATOMES

Les premières manifestations du caractère ondulatoire de la matière ont été obtenues avec des particules légères, comme des électrons (expérience de diffraction par Davisson et Germer). Depuis, on cherche à étendre ce type d'expérience à des objets de plus en plus massifs : neutrons, atomes, ou molécules.

Le principe et le résultat d'une expérience d'interférences effectuée avec des atomes [F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma, Phys. Rev. A46, R17(1992)] dans un dispositif de fentes d'Young est représenté sur la figure 1.2. Un nuage de quelques millions d'atomes de néon est d'abord capturé et refroidi au milliKelvin dans un piège laser. Il est ensuite lâché, sans vitesse initiale, à 3,5 cm au-dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur 2 microns et séparées par 6 microns. Les atomes sont détectés lorsqu'ils frappent une plaque située 85 cm sous le plan des deux fentes. La plaque détectrice enregistre l'impact de chaque atome, un impact étant représenté par un point sur la figure 1.2.

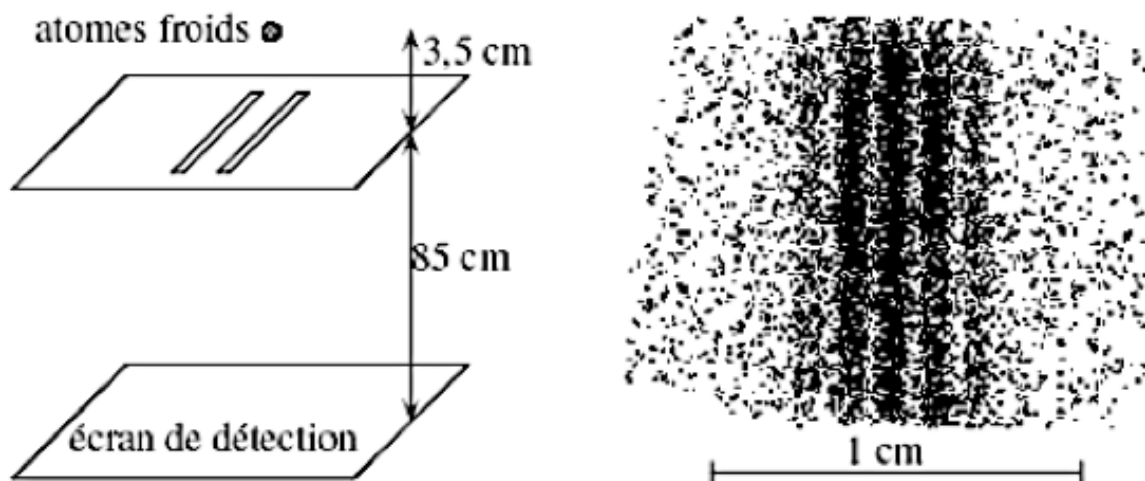


FIG. 1.2: A gauche : expérience de fentes d'Young réalisée avec des atomes de néon, préalablement refroidis par laser au milliKelvin. A droite : distribution observée expérimentalement ; chaque point de la figure correspond à l'impact d'un atome sur la plaque détectrice. Les franges d'interférences sont clairement visibles.

On observe que ces impacts se distribuent suivant un système de franges parfaitement semblable à celui obtenu dans des interférences lumineuses ou acoustiques. Il y a des zones sombres (beaucoup d'impacts ; flux d'atomes intense) parallèles à la direction des fentes, qui alternent avec des zones claires (peu ou pas d'impacts, flux d'atomes faible).

L'expérience a été reproduite avec d'autres particules : électrons, neutrons, molécules. Dans tous les cas, la distribution des impacts sur l'écran révèle une figure d'interférences.

(Le calcul précis des franges d'interférences dans l'expérience montrée en figure 1.2 doit prendre en compte la variation de la longueur d'onde de de Broglie au fur et à mesure de l'accélération des atomes par le champ de pesanteur. La vitesse des atomes au niveau des fentes est de 0,8 m/s ; au niveau de la plaque détectrice, elle est de 4 m/s).

**b - Calcul d'ordre de grandeur :**

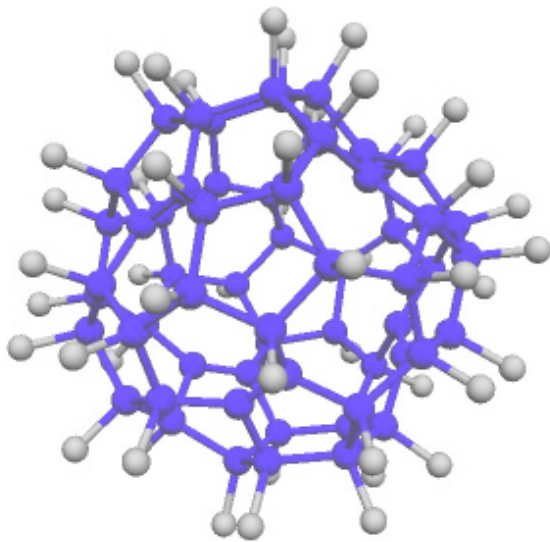
Calculer la taille des franges en vous basant sur les différentes valeurs indiquées pour la vitesse des atomes. Les ODG sont-ils cohérents avec la figure observée en 1.2 [chercher la masse de l'atome de néon]

### 1.3 INTERFÉRENCES QUANTIQUES AVEC DE GROS OBJETS

[pour aller plus loin]

Le groupe de Zeilinger à Innsbrück, puis à Vienne, a récemment mis en évidence le comportement ondulatoire de grosses molécules comme les fullerènes ( $C_{60}$ , masse 720uma) ou des molécules dérivées ( $C_{60}F_{48}$ , masse 1632uma).

[M. Arndt & al. Nature (London) 401, 680 (1999) ; B. Brezger & al., Phys. Rev. Lett. 88, 100 404 (2002); L. Hackermüller & al., Phys. Rev. Lett. 91, 090408 (2003)]



$C_{60}F_{48}$ , masse 1632uma



William Henry Fox Talbot (1800-1877)

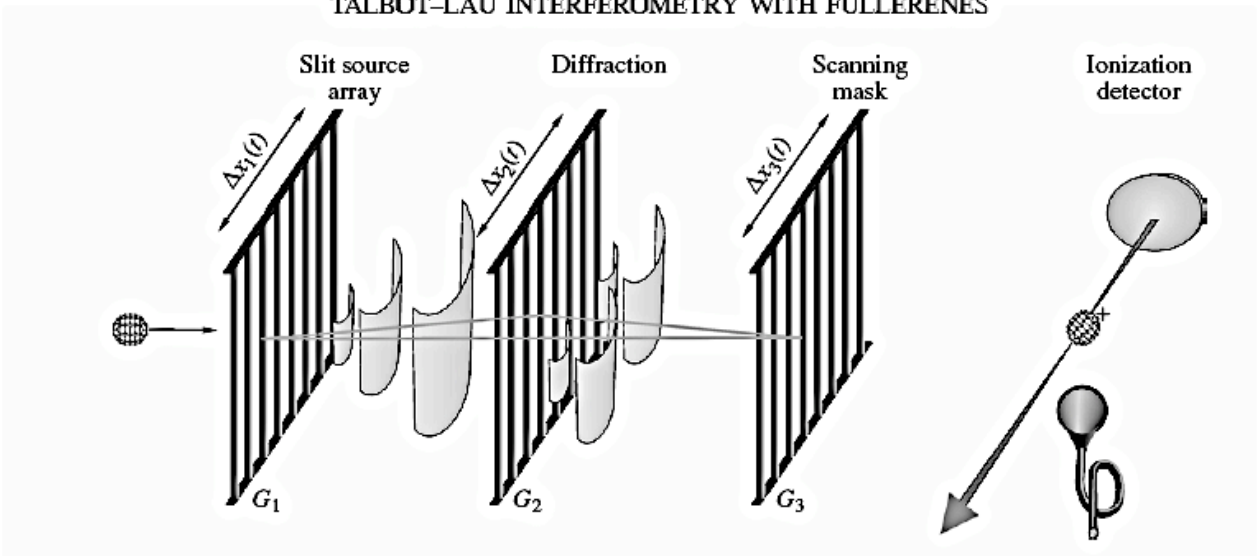
[Inventeur de la photographie et des fonctions elliptiques.....entre autres]

Le montage expérimental est un peu plus complexe qu'une simple expérience de trous d'Young (Figure 1). Il est fondé sur l'effet Talbot (1836) et utilise un **interféromètre Talbot-von Lau**.

On part de 3 réseaux identiques de pas  $d$  de l'ordre du micron, régulièrement espacés (distance  $D$  entre 20 et 40 cm). Le premier réseau prépare la cohérence transverse du jet. Le deuxième réseau est responsable de la diffraction. Le troisième réseau est utilisé pour sonder le profil diffracté, dont on s'attend à ce qu'il présente une modulation de période  $d$ . Cette modulation liée au caractère ondulatoire du mouvement atomique se superpose à la modulation attendue en prenant simplement des trajectoires classiques rectilignes. On peut montrer que l'effet ondulatoire est important si  $\lambda D \sim d^2$ .



TALBOT-LAU INTERFEROMETRY WITH FULLERENES



**Fig. 1.** Interferometer for large molecules. Three gratings of equal period are separated by approximately the Talbot length. The first grating  $G_1$  acts as an incoherent array of slit sources. Each of them illuminates the second grating with a transverse coherence of a few slit distances. Interference then leads to a self-image of the grating  $G_2$  at the position of  $G_3$ . The molecular interferogram is scanned by the third grating. Transmitted molecules are ionized and counted. Inertial forces due to the rotation of the earth, the gravitational acceleration, and acoustic vibrations of the apparatus may lead to a lateral displacement of the interference pattern that depends on the molecular velocity.

L'enjeu de ces expériences est d'étudier s'il existe une éventuelle limite au champ d'application de la mécanique quantique. Dans le cadre de la physique quantique, le phénomène d'interférence en tant que tel reste le même quand on passe d'un électron à une grosse molécule. C'est le degré de liberté du centre de masse de l'objet qui est en jeu et tous les degrés de liberté interne de la molécule (vibration, rotation, spin) sont *a priori* spectateurs. En pratique, ces expériences sont rendues difficiles par le fait que ces degrés de liberté peuvent se coupler à l'environnement lors du temps de vol de la molécule dans le dispositif expérimental. Par exemple, la molécule peut émettre spontanément un photon correspondant à une information sur le chemin suivi, ce qui doit en toute logique diminuer le contraste des interférences observées.

