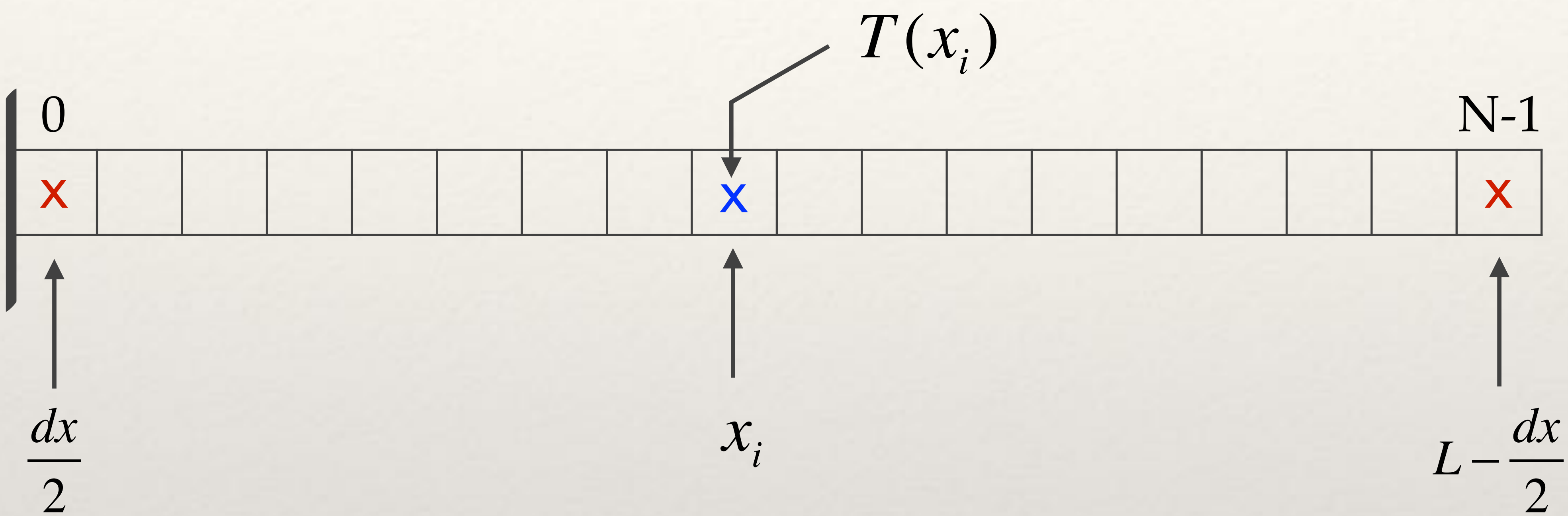
TD - Diffusion thermique

On considère une ailette de refroidissement de processeur en aluminium, de longueur L, de section S, de périmètre P et découpée en N cases élémentaires :



On note λ le coefficient de conductivité thermique de l'aluminium, ρ sa masse volumique :

- Q_{ent} est le flux surfacique entrant dans la première cellule tout à gauche.
- Les pertes latérales de l'ailette seront prises en compte à travers la loi de Newton, impliquant un coefficient d'échange h avec l'air à température T_0.
- Pour la dernière cellule on suppose que le flux échangé au bout de l'ailette est nul à droite.

Par un bilan de flux traduisant la conservation de l'énergie, établir l'équation de diffusion locale (cf cours de physique) au sein de l'ailette :

$$\rho c S \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = S\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - hP\left[T(x,t) - T_0\right]$$

Le bilan sur la première cellule utilisant un flux entrant constant Qent :

$$\rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}(\frac{dx}{2},t) = SQent + S\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(dx,t) - hPdx\left[T(\frac{dx}{2},t) - T_0\right]$$

Enfin le bilan sur la dénière cellule supposant un flux nul sur sa droite :

$$\rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}(L - \frac{dx}{2},t) = -S\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L - dx,t) - hPdx\left[T(L - \frac{dx}{2},t) - T_0\right]$$

On prendra le temps de bien vérifier l'homogénéité.

Différences finies

Les formules des bilans ne souffrent d'aucune approximation intrinsèque du point de vue numérique. En revanche nous commettons une approximation en disant que la température en homogène au sein d'une cellule, soit T[i] la température de la cellule i.

Etablir les formules du gradient et du laplacien au centre de la cellule i en fonction des températures au sein de la cellule et de ses voisines :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial x}(x_i,t) = \frac{1}{dx}\left[T[i+1]-T[i]\right]}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{dx}\left[\left(\frac{1}{dx}\left[T[i+1]-T[i]\right]\right)-\left(\frac{1}{dx}\left[T[i]-T[i-1]\right]\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i,t) = \frac{1}{dx^2}\left[T[i+1]+T[i-1]-2T[i]\right]}$$

Rq : plusieurs écritures sont possibles selon le choix des indices

Méthode d'Euler

En déduire $\frac{dT_i}{dt}$ Pour les bords i = 0 i = N-1 et les cellules centrales 0 < i < N-1

Ces dérivées seront exprimées en fonction des T[i] et T0, et de toutes les constantes.

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c dx^2}\left[T[i+1] + T[i-1] - 2T[i]\right] - \frac{hP}{\rho c S}[T[i] - T_0]$$

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{1}{\rho c dx}\left[Q_{ent} + \frac{\lambda}{dx}\left(T[1] - T[0]\right)\right] - \frac{hP}{\rho c S}[T[0] - T_0]$$

$$\frac{dT_{N-1}}{dt} = \frac{1}{\rho c dx}\left[-\frac{\lambda}{dx}\left(T[N-1] - T[N-2]\right)\right] - \frac{hP}{\rho c S}[T[N-1] - T_0]$$

Résolution par la méthode d'Euler explicite

On peut poser des conditions initiales en disant qu'à t = 0 les températures T[i] valent toutes T_0.

Les équations précédentes permettent d'intégrer pas à pas les équations de la chaleur pour obtenir le champ de température à chaque pas de temps.

Approche matricielle :

On pose T_n le vecteur température au n-ième pas de temps :

$$T_n \equiv \begin{pmatrix} T[0] \\ T[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ T[N-1] \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice A et le vecteur B tels que :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = AT + B}$$

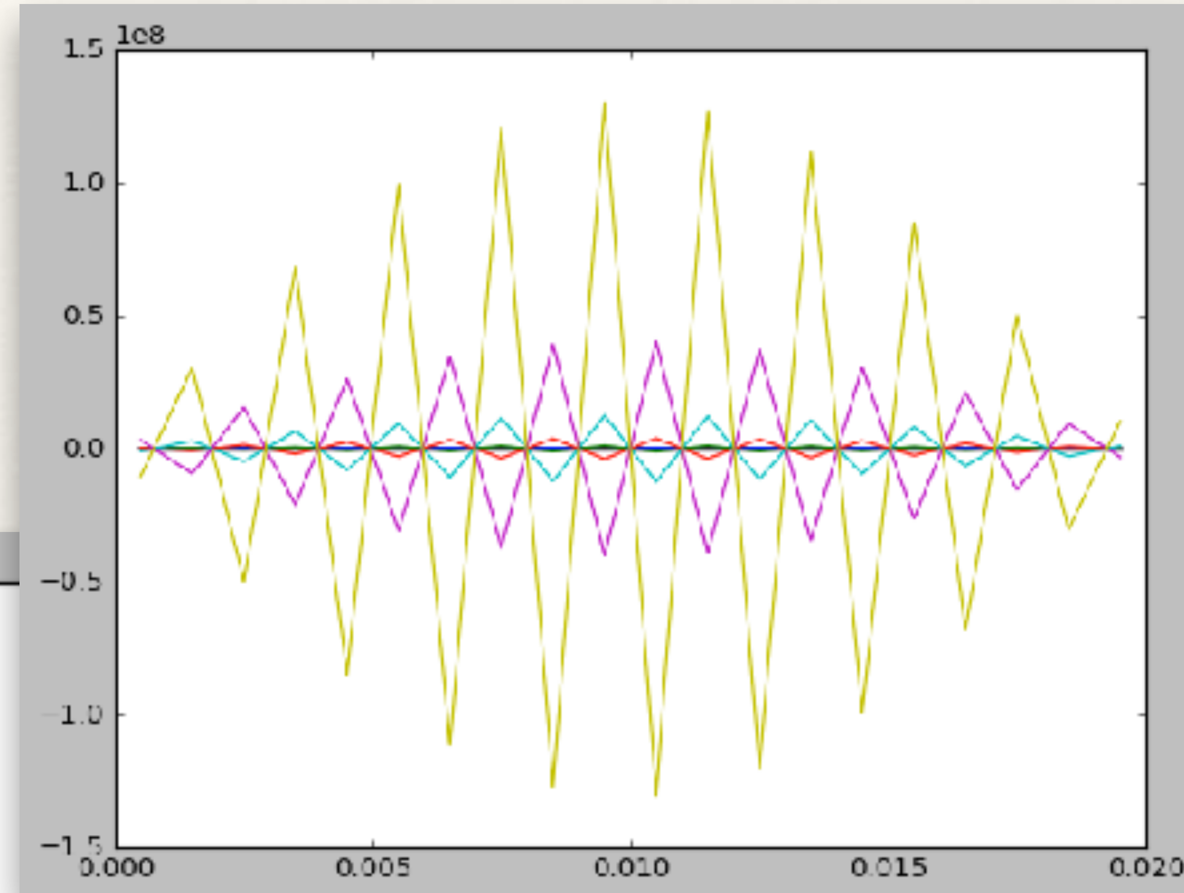
La méthode d'**Euler explicite** consiste à discrétiser cette équation dans le temps sous la forme :

$$\boxed{T_{n+1} = T_n + \left(AT_n + B\right)dt}$$

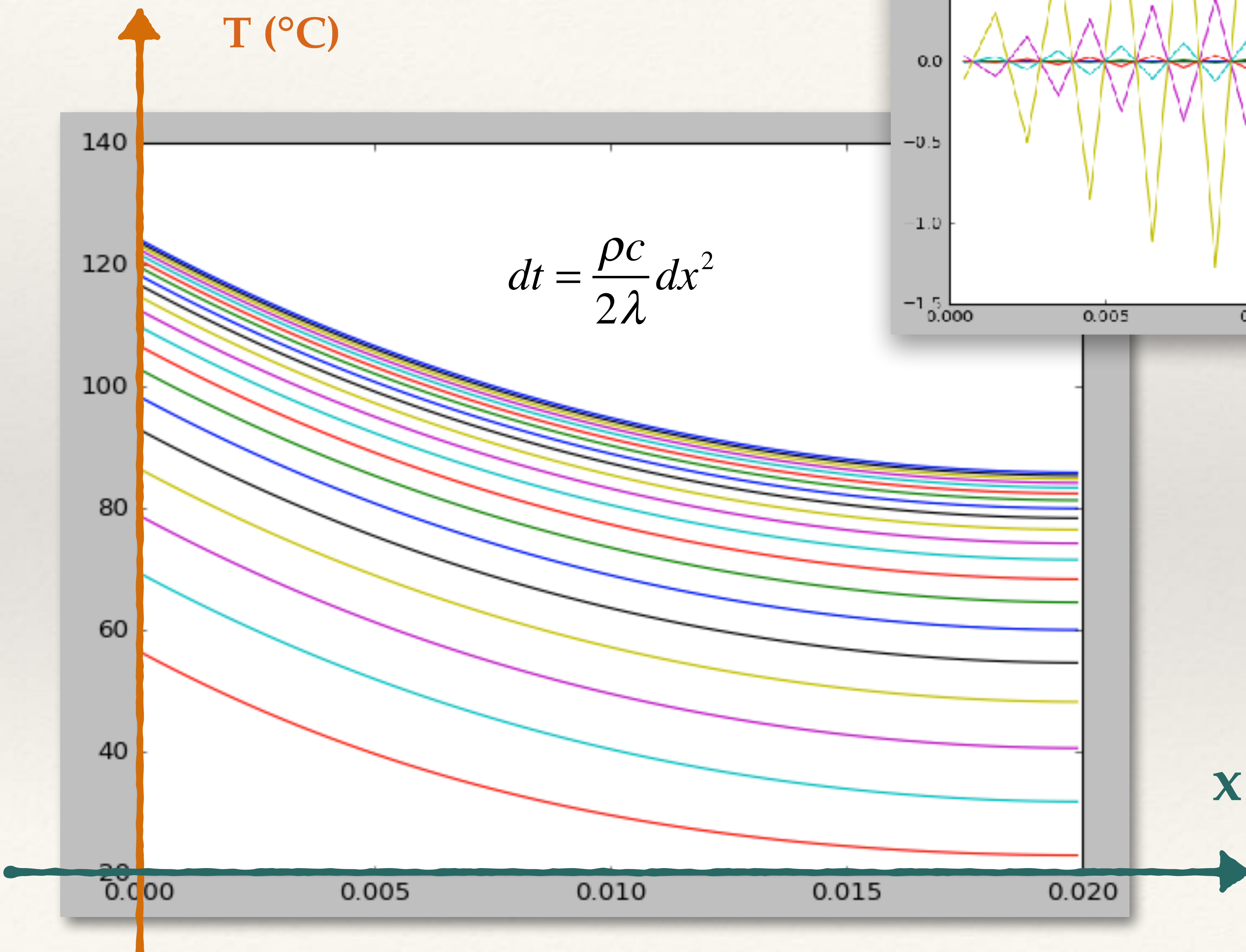
On montre que le schéma explicite de la méthode d'Euler ne converge qu'à la condition que le pas de temps est suffisamment petit :

$$dt < \frac{\rho c}{2\lambda} dx^2$$

Situation d'instabilité



$$dt = 1.01\frac{\rho c}{2\lambda}dx^2$$



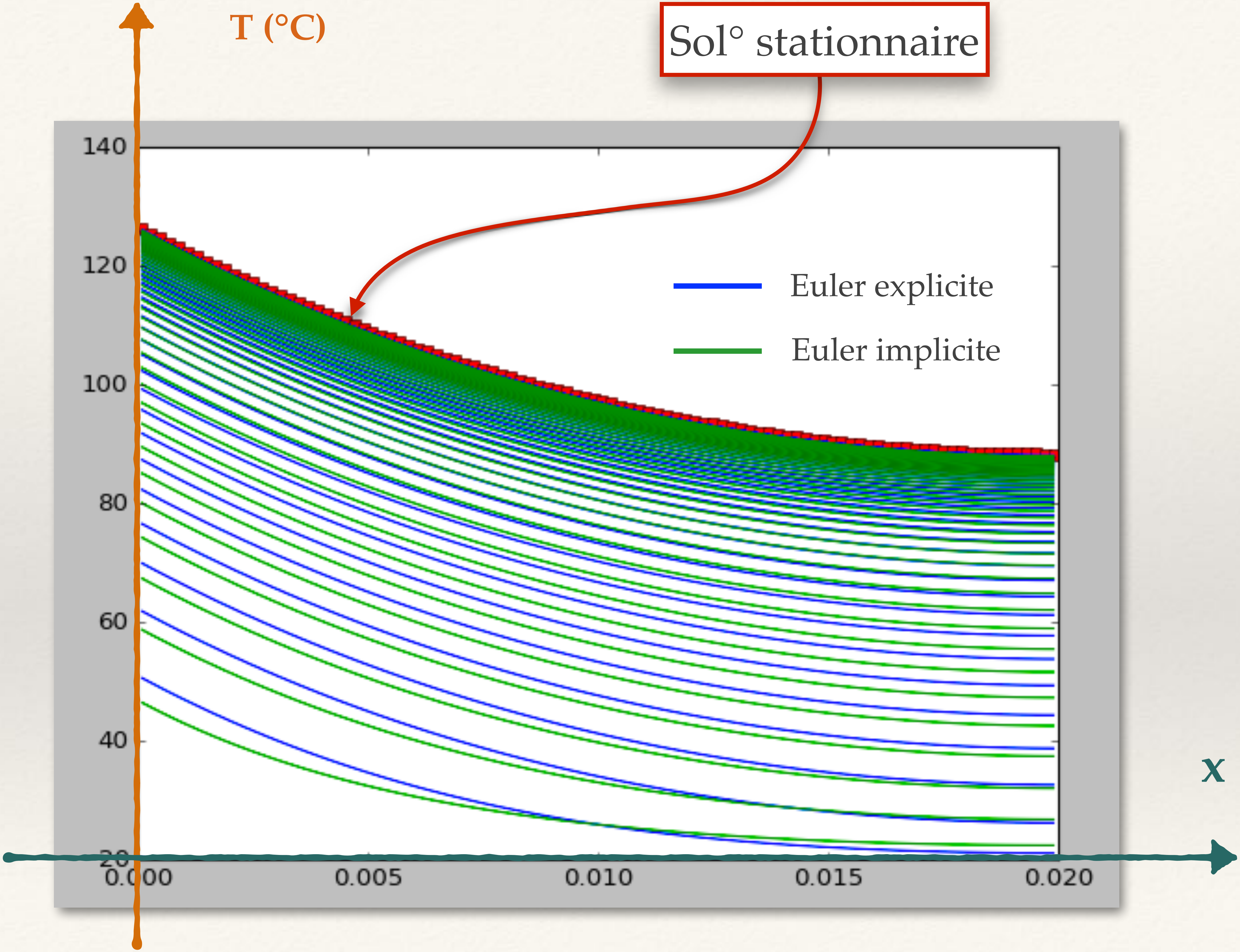
$$dt = \frac{\rho c}{2\lambda}dx^2$$

Résolution dans le cas du régime permanent

Si les températures ont atteint le régime permanent, les dérivées des températures sont toutes fixées à 0. Il « suffit » alors de résoudre un système linéaire sous la forme AX = -B. Numpy permet de le faire en python.

$$\begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{\rho c dx^2}-\frac{hP}{\rho c S} & \frac{\lambda}{\rho c dx^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{\rho c dx^2} & \frac{-2\lambda}{\rho c dx^2}-\frac{hP}{\rho c S} & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \frac{-2\lambda}{\rho c dx^2}-\frac{hP}{\rho c S} & \frac{\lambda}{\rho c dx^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{\rho c dx^2} & \frac{-\lambda}{\rho c dx^2}-\frac{hP}{\rho c S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T[0] \\ T[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ T[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{hP}{\rho c S}T_0 - \frac{1}{\rho c dx}Q_{ent} \\ -\frac{hP}{\rho c S}T_0 \\ \vdots \\ -\frac{hP}{\rho c S}T_0 \end{pmatrix}$$

Il n’y a pas besoin de déterminer toute l’évolution temporelle pour déterminer l’état final de l’ailette. Toutefois il faut résoudre un système linéaire.


T (°C)
Sol° stationnaire
Euler explicite
Euler implicite
x
140
120
100
80
60
40
20
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020

Résolution par la méthode d'Euler implicite

Il y a plusieurs façons de discrétiser l'équation d'évolution par rapport au temps :

$$\frac{dT}{dt} = AT + B$$

On évalue AT+B au pas de temps suivant n+1 et non plus n :

$$\boxed{T_{n+1} = T_n + \left(AT_{n+1} + B\right)dt}$$

Euler implicite

On peut isoler T_{n+1} en **résolvant un système** ou en **inversant** une matrice.

$$\boxed{\left(I - Adt\right)T_{n+1} = T_n + Bdt}$$

$$\boxed{T_{n+1} = \left(I - Adt\right)^{-1}\left(T_n + Bdt\right)}$$

Il faut donc résoudre un système linéaire pour chaque pas de temps. Toutefois la convergence est assurée et il n'y a pas besoin de prendre un pas de temps très petit.

Diffusion thermique 2D